ALLGEMEINE ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN KONVEKTIONS- UND INFLUENZSTROM SOWIE ZWISCHEN VERSCHIEBUNGS- UND KAPAZITIVEM STROM IN QUASISTATIONÄREN FELDERN

Von

M. ROMHÁNYI

Lehrstuhl für Elektronenröhren und Halbleiter, Technische Universität Budapest

(Eingegangen am 16. März 1961)

Vorgelegt vom Vorstand des Lehrstuhls Dr.-Ing. I. P. VALKÓ

Einleitung

Zum Verständnis der elektronischen Vorgänge, die sich in den im Ultrakurzwellen- und Mikrowellenbereich arbeitenden Elektronenröhren abspielen, ist es von grundlegender Bedeutung, die Natur der Ströme zu untersuchen, die in der Röhre selbst und in ihren Elektrodenzuführungen fließen. Die diesbezüglichen Begriffe wurden im Schrifttum schon vor längerer Zeit klargestellt. Es ist allgemein bekannt, daß sich der zwischen den Elektroden fließende Strom aus zwei Komponenten zusammensetzt, die beide eine anschauliche und selbständige physikalische Bedeutung besitzen. Diese beiden Komponenten sind der durch die Bewegung der Elektronen verursachte Konvektionsstrom und der durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes entstehende Verschiebungsstrom. Der Strom in den äußeren Stromkreisen, die an die Elektroden der Röhre angeschlossen sind, kann auf ähnliche Weise in zwei Komponenten zerlegt werden, die gleichfalls selbständige physikalische Bedeutung besitzen. Diese Komponenten sind der Influenzstrom, der durch die Elektronenbewegung, und der kapazitive Ladestrom,* der durch die zeitliche Änderung der kapazitiven Elektrodenladung** entsteht.

Im Schrifttum wurde der Influenzstrom zuerst für ein einziges Elektron in einem planparallelen Elektrodensystem durch zeitliche Differentiation der Influenzladung bestimmt, die nach dem Spiegelungsprinzip berechnet wurde [1]. Trotzdem sich dieses Verfahren sehr verbreitet hat [2, 3, 4, 5, 6], kann es für kompliziertere Elektrodensysteme nicht benützt werden. Einige Autoren

* Es soll darauf hingewiesen werden, daß der kapazitive Ladestrom nur im Verhältnis zur Spannung der Kapazität zwischen den Elektroden ein Blindstrom ist. Im Verhältnis zu den Spannungen in einzelnen Abschnitten des äußeren Stromkreises hat er dagegen im allgemeinen auch eine Wirkkomponente (so hat z. B. der Strom, der durch die Anoden-Gitter-Kapazität fließt, bei komplexer Anodenimpedanz für die Spannung des Steuergenerators eine Wirkkomponente).

** Mit kapazitiver Ladung wird künftig immer die Ladung der Elektroden im raumladungsfreien Fall bezeichnet.

warfen den Gedanken auf, den Influenzstrom aus der zeitlichen Änderung des elektrischen Kraftflusses zu berechnen, der durch die Bewegung des Elektrons auf der in Frage stehenden Elektrode verursacht wird [7, 8, 9], doch hat dieser Vorschlag der praktischen Schwierigkeiten wegen nur theoretische Bedeutung. Ein neues quantitatives Ergebnis bringt die Veröffentlichung von RAMO [10], der nach elektrostatischen Methoden eine Formel ableitet, die es gestattet, den Influenzstrom für beliebige Elektrodensysteme zu berechnen. Die Formel gilt für beliebig große Elektrodenspannungen und auch für Wechselspannungen, was jedoch aus der Ableitung von Ramo nicht hervorgeht, da er in seiner Untersuchung eine Einheitsspannung an den Elektroden und ein elektrostatisches Feld voraussetzt. Andere Verfasser bestimmen den Influenzstrom bei Abwesenheit von Raumladung für ein ganz allgemeines Elektrodensystem viel einfacher auf energetischer Grundlage [11, 12]. Den Influenzstrom hat JEN ganz allgemein in seiner 1941 erschienenen Veröffentlichung bestimmt [13]. Jen betrachtet jedoch das Problem in erster Linie vom energetischen Standpunkt aus, und obzwar er den Zusammenhang für den gesamten, im Außenkreis fließenden Strom angibt, befaßt er sich neben dem Influenzstrom nicht auch mit dem kapazitivem Ladestrom, der für die energetische Wechselwirkung zwischen Feld und Elektron keine Rolle spielt.* Die Betrachtung des Problems von der energetischen Seite her ermöglicht es ihm, das Gleichgewicht zwischen den Energieänderungen im »Elektrodenraum« und Außenkreis bei nicht stationären Verhältnissen in einem späteren Artikel zu behandeln [14].

In nicht stationären Systemen (d. h. also in Systemen, deren Abmessungen im Vergleich zur Wellenlänge der Schwingungen nicht vernachlässigt werden können) ist es sinnlos, von Influenzstrom und kapazitivem Strom zu sprechen, da man in einem System, das aus einem von leitenden Wänden eingeschlossenen Raum besteht, weder von Elektroden, noch von Kapazität oder von Spannung reden kann. Die hier gemachten Untersuchungen beschränken sich deshalb auf quasistationäre Verhältnisse. Die Ergebnisse können jedoch auch auf nicht stationäre Systeme angewendet werden, wie z. B. auf den Hohlraumresonator des Klystrons, bei denen an den Stellen des Konvektionsstromdurchflusses fast ausschließlich ein elektrisches Feld vorhanden ist.

Im folgenden soll zuerst die Elektrodenladung bestimmt und dann — ausgehend von dem für die Ladung ermittelten Ausdruck — der allgemeine Zusammenhang einerseits zwischen der räumlichen Verteilung des Konvektionsstromes und dem Influenzstrom, sowie andererseits zwischen der räumlichen

* Das eben ist der Sinn der Aufteilung des im Außenkreis fließenden Stromes in Influenzstrom und kapazitiven Ladestrom, daß die von der Elektronenbewegung bedingte energetische Wechselwirkung zwischen Elektron und Feld mit dem Influenzstrom streng zusammenhängt, da er gleichfalls von der Elektronenbewegung verursacht wird. Der kapazitive Ladestrom spielt dagegen nur eine passive Rolle. Das Gleichgewicht zwischen den Energieänderungen im Feld und im Außenkreis kann deshalb durch den Influenzstrom ausgedrückt werden.

Verteilung des Verschiebungsstromes und dem kapazitiven Ladestrom angegeben werden. In diesen Zusammenhängen zeigt sich eine erstaunliche Symmetrie.

Die Art der Elektrodenladungen

Bei quasistationären Betriebsverhältnissen setzt sich die Ladung jeder beliebigen Elektrode der Elektronenröhre aus zwei Teilen zusammen, die voneinander völlig unabhängig sind. Den einen Teil bildet die Influenzladung, die durch die im Entladungsraum befindlichen Elektronen hervorgerufen wird, während der andere Teil aus der kapazitiven Ladung besteht, die ihrerseits durch den Augenblickswert der an den Elektroden liegenden Spannungen im raumladungsfreien Zustand bestimmt wird. Genauer gesagt, ist die Influenzladung gleich der an der untersuchten Elektrode in jenem Falle auftretenden Ladung, in welchem alle Elektroden geerdet sind und die Raumladungsverteilung im System in Bezug auf den Betriebszustand als unverändert angenommen wird. Die kapazitive Ladung ist dagegen der Ladung gleich, die an der untersuchten Elektrode auftritt, wenn sämtliche Elektroden des Systems an Betriebsspannung liegen und die Raumladung im System überall gleich Null ist (kalte Röhre).

Laut Formel (A 1,22) des Anhangs I beträgt die Gesamtladung der j-ten Elektrode eines Systems, das n Elektroden beliebiger Form und Spannung enthält (siehe Abb. 3 Anhang I),

$$Q_j = -\int_V \varrho \varphi_j \, dV + \sum_{k=1}^{n} c_{jk} U_k \,. \tag{1}$$

Das erste Glied der rechten Seite gibt die Influenzladung, das zweite Glied hingegen die kapazitive Ladung an. Das vor dem Integral stehende negative Vorzeichen bedeutet, daß die Influenzladung das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie die Raumladung.

In Formel (1) bedeutet:

φ_j die auf die j-te Elektrode normierte, dimensionslose, statische Potentialfunktion im raumladungsfreien System. Ihr zahlenmäßiger Wert stimmt mit der Potentialverteilung überein, die im System entsteht, wenn man an die j-te Elektrode eine Einheitsspannung schaltet, die anderen Elektroden erdet und die Raumladung gleich Null ist,

ϱ die Raumladungsverteilung,

c_{jk} den Kapazitätskoeffizienten der j-ten Elektrode, bezogen auf die k-te Elektrode [nähere Definition siehe Anhang I Formel (A 1,21)],

U_k die Spannung der k-ten Elektrode.

Das Integral muß auf sämtliche Raumelemente ausgedehnt werden, in denen $\varrho \neq 0$. Die Formel verliert ihre Gültigkeit auch dann nicht, wenn sich die Elektrodenspannungen beliebig ändern, solange das System als quasistationär betrachtet werden kann (solange also die maximalen Abmessungen des als geschlossen betrachteten Systems im Verhältnis zur Wellenlänge λ vernachlässigt werden können).

Die physikalische Bedeutung der im Entladungsraum und im Außenkreis fließenden Ströme

Der im Vakuumraum zwischen den Elektroden fließende Strom setzt sich der ersten Maxwellschen Gleichung gemäß aus dem durch die Elektronenbewegung bedingten Konvektionsstrom und dem durch die zeitliche Änderung der elektrischen Feldstärke entstehenden Verschiebungsstrom zusammen, d. h. es gilt

$$\bar{\imath} = \varrho \bar{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} . \tag{2}$$

Das auf die Oberfläche der j-ten Elektrode bezogene Oberflächenintegral der Stromdichte liefert den in die untersuchte Elektrode fließenden Strom, wenn die Oberflächennormale in Richtung der Elektrode weist, also

$$I_j = \int\limits_{A_j} \varrho \bar{v}\, d\bar{A} + \varepsilon_0 \int\limits_{A_j} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} d\bar{A} . \tag{3}$$

A_j ist hier die Oberfläche der j-ten Elektrode. Im Sinne der Gleichung $\operatorname{div} \bar{\imath} = 0$ muß der gleiche Strom auch im Außenkreis der j-ten Elektrode fließen. Auch dieser Strom läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, die beide selbständige physikalische Bedeutung haben. Die eine Komponente ist der von der Elektronenbewegung verursachte Influenzstrom, die andere Komponente hingegen der kapazitive Ladestrom, der durch die zeitliche Änderung der kapazitiven Ladung der Elektrode zustande kommt, d. h.

$$I_j = I_{j\,\text{infl.}} + I_{j\text{kap.}} . \tag{4}$$

Treffen auf die untersuchte Elektrode keine Elektronen auf, wie dies bei negativem Gitter und im Übergangszustand nach dem Einschalten der Fall ist, bevor die Elektronen die untersuchte Elektrode erreichen, erhält man den Influenzstrom aus der zeitlichen Änderung der Influenzladung. Treffen jedoch Elektronen auf die Elektrode auf, ergibt sich der Influenzstrom nicht mehr aus der zeitlichen Änderung der Influenzladung, weil ja die Influenzladungen z. B. bei stationären Verhältnissen — makroskopisch betrachtet — zeitlich konstant sind. Trotzdem ist der im Außenkreis fließende Strom ein

Influenzstrom (siehe Anhang II Formel A 2,9a), denn die Elektronen erzeugen nicht dann einen Strom, wenn sie auf die Elektrode auftreffen, sondern während ihrer Bewegung im Raum vom Start bis zum Auftreffen auf die Elektrode.

Betrachtet man den Fall mikroskopisch, so ändern sich die von den einzelnen Elektronen verursachten Influenzladungen mit der Zeit und der im Außenkreis fließende Strom setzt sich aus den durch die Bewegung der einzelnen Elektronen verursachten Teilströmen zusammen. Von der makroskopischen Seite muß der Fall so betrachtet werden, daß die Influenzladung auf der Elektrode zwar konstant ist, jedoch durch die Bewegung der räumlichen Ladungen ständig ausgewechselt wird.

Der kapazitive Ladestrom kann als zeitliche Änderung der kapazitiven Ladung definiert werden. Im raumladungsfreien Fall ist der kapazitive Ladestrom dem aus der Elektrode ausfließenden Verschiebungsstrom gleich. Letzterer ist nämlich der zeitlichen Änderung der Elektrodenladung gleich, wobei jetzt die Richtung der Oberflächennormale aus der Elektrode hinausweist:

$$I_v = \int_A \bar{\imath}_v \, d\bar{A} = \int_A \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \, d\bar{A} = \frac{d}{dt} \int_A \bar{D} d\bar{A} = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} . \tag{5}$$

Im raumladungsfreien Fall ist die Ladung der Elektroden rein kapazitiv, woraus die Richtigkeit obiger Behauptung ohne weiteres einleuchtet. Anders verhalten sich jedoch die Dinge bei Anwesenheit einer Raumladung, da auf der Elektrode auch eine Influenzladung vorhanden ist. Der aus der Elektrode fließende Verschiebungsstrom ist deshalb dem kapazitiven Ladestrom nicht gleich und hat im allgemeinen für die Spannung der Kapazität auch eine Wirkkomponente.

Allgemeiner Zusammenhang zwischen den Strömen in Elektrodenraum und in den Außenkreisen der Elektroden

Laut Formel (A 2,9) Anhang II besteht zwischen dem Influenzstrom im Außenkreis der j-ten Elektrode und dem Konvektionsstrom im Elektrodenraum folgender, in quasistationären Systemen allgemein gültiger Zusammenhang:

$$I_{j\,\mathrm{infl.}} = \int_V \bar{\imath}_k \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dV . \tag{6}$$

Hier bedeutet

$\bar{\imath}_k = \bar{\imath}_k\ (\bar{r}, t) = \varrho\ (\bar{r}, t)\, \bar{v}\ (\bar{r}, t)$ die räumliche und zeitliche Verteilung der Konvektionsstromdichte;

$\varphi_j = \varphi_j\ (\bar{r})$ die auf die Oberfläche A_j der j-ten Eldektrode normierte statische Potentialfunktion, die in Verbindung mit der Formel (1) näher definiert wurde.

Das Integral ist auf alle Raumelemente auszudehnen, in denen $\bar{i}_k \neq 0$. Das Vorzeichen des durch das Integral bestimmten Stromes ist dann gültig, wenn die Meßrichtung des Stromes von der untersuchten Elektrode in Richtung des Außenkreises weist.

Ein ähnlicher Zusammenhang gilt nach Formel (A 2,7) Anhang II zwischen dem im Außenkreis der j-ten Elektrode fließenden kapazitiven Ladestrom und dem im Elektrodenraum fließenden Verschiebungsstrom und es gilt

$$I_{j\,\mathrm{kap.}} = \int\limits_V \bar{i}_v \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dV, \tag{7}$$

wo $\bar{i}_v = \bar{i}_v(\bar{r},t) = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ die räumliche und zeitliche Verteilung der Verschiebungsstromdichte,

$\varphi_j = \varphi_j(\bar{r})$ hingegen die auf die j-te Elektrode normierte Potentialfunktion bedeutet.

Das Integral muß auf sämtliche Raumelemente ausgedehnt werden, in denen $\bar{i}_v \neq 0$ ist. Das Vorzeichen des vom Integral bestimmten Stromes ist auch hier nur dann gültig, wenn die Meßrichtung des Stromes in Richtung des Außenkreises weisend angenommen wird.

Der kapazitive Ladestrom kann auch durch zeitliche Differentiation der kapazitiven Ladung ausgedrückt werden. Wird die Meßrichtung wie oben angenommen, erhält man laut Formel (A 2,8) Anhang II

$$I_{j\,\mathrm{kap}} = -\sum_{k=1}^{n} c_{jk} \frac{dUk}{dt} , \tag{8}$$

wo c_{jk} der Kapazitätskoeffizient ist, der in Formel (A 1,21) Anhang I näher definiert wird. U_k ist die Spannung der k-ten Elektrode. Es muß betont werden, daß der kapazitive Ladestrom $I_{j\,\mathrm{kap}}$ nicht unbedingt ein Blindstrom sein muß, da er für die Spannung des Zweipoles zwischen Elektrode und Erde auch eine Wirkkomponente haben kann (siehe auch die Fußnote auf Seite 26).

Die Zusammenhänge [6] und [7] gelten sowohl in Systemen mit als auch in solchen ohne Raumladung. $I_{j\,\mathrm{kap}}$ ist jedoch durch seine Definition immer dem kapazitiven Ladestrom im Außenkreis der j-ten Elektrode gleich, wenn keine Raumladung vorhanden ist (kalte Röhre). Die angegebenen Zusammenhänge ermöglichen die Berechnung des Influenzstromes, wenn die räumliche und zeitliche Verteilung des Konvektionsstromes bekannt ist. Genauso kann der kapazitive Ladestrom in Kenntnis der räumlichen und zeitlichen Verteilung des Verschiebungsstromes berechnet werden, bzw. in Kenntnis der Teilkapazitäten der Elektroden, was häufiger der Fall ist.

Man sieht, daß zwischen Konvektions- und Influenzstrom einerseits, und zwischen kapazitivem Ladestrom und Verschiebungsstrom andrerseits strenge Zusammenhänge bestehen. Das ist selbstverständlich, da sie paarweise auf dieselben Ursachen zurückzuführen sind, denn die ersteren stammen von der Elektronenbewegung, die letzteren hingegen rühren von der Änderung der Elektrodenspannungen her.

Sonderfälle

Die Formel (6) gilt natürlich auch für den Fall, daß sich im Elektrodenraum ein einziges Elektron bewegt. Das Raumintegral ist in diesem Fall nur innerhalb der kleinen Kugel K, die das Elektron umgibt, von Null verschieden.

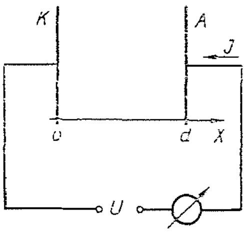


Abb. 1. Zur Bestimmung der Ströme im Außenkreis eines ebenen Elektrodensystems

Der Radius dieser Kugel K strebt gegen Null, man erhält also im raumladungsfreien Fall

$$\begin{aligned} I_{j\,\mathrm{infl}} &= \int_K \bar{i}_k \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dV = \int_K \varrho \bar{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi_j \, dV = \\ &= (\bar{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi_j) \int_K \varrho dV = -e(\bar{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi_j) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Es soll nun der Strom im Außenkreis eines ebenen Elektrodensystems (Abb. 1) bestimmt werden, für einen Fall also, der von großer praktischer Bedeutung ist.

Da man es hier mit einem eindimensionalen System zu tun hat, vereinfachen sich die räumlichen Vektorgleichungen zu skalaren Gleichungen. Für jeden Vektor soll als gemeinsame Meßrichtung die positive x-Achse gewählt werden. Jene Größen, deren physikalische Richtung mit der gewählten Meßrichtung übereinstimmt, erhalten hierbei positive Vorzeichen, während sämtliche Größen, deren physikalische Richtung nach der entgegengesetzten Richtung zeigt, mit negativem Vorzeichen in die Gleichung eingehen. Wird die Richtung des Stromes im Außenkreis so aufgetragen, wie in der Abbildung gezeigt, erhält man im Sinne der zur Gleichung (6) gemachten Bemerkung

$$I_{\mathrm{infl}}(t) = -A\int_0^d [-i_k\, x,t)] \cdot \frac{1}{d}\, dx = \frac{1}{d}\int_0^d [A i_k(x,t)]\, dx = \frac{1}{d}\int_0^d I_k(x,t)\, dx\,. \quad (10)$$

Gleichung (10) besagt, daß der Influenzstrom im Außenkreis eines ebenen Elektrodensystems zu jedem Zeitpunkt dem räumlichen Mittelwert des Konvektionsstromes in demselben Zeitpunkt gleich ist. Das positive Vorzeichen bedeutet, daß die Richtung des Influenzstromes mit der für den Außenkreis gewählten Meßrichtung zusammenfällt, d. h. mit der Richtung des Konvektionsstromes übereinstimmt.

Im quasistatischen Fall (bei dem die Laufzeit des Elektrons im Verhältnis zur Periodendauer des Signals vernachlässigt werden kann) ist der Konvektionsstrom zu jedem Zeitpunkt räumlich konstant, kann also vor das Integral gestellt werden, und man hat

$$I_{\mathrm{infl.}}(t) = \frac{1}{d}\int_0^d I_k(t)\, dx = I_k(t)\,. \quad (11)$$

Dieser Formel gemäß ist der im Außenkreis fließende Influenzstrom im quasistatischen Zustand dem in der Röhre fließenden Konvektionsstrom gleich.

Mit [7] erhält man ähnlich wie bei Gleichung [10]

$$I_{\mathrm{kap.}}(t) = -A\int_0^d [-i_v(x,t)] \cdot \frac{1}{d}\, dx = \frac{1}{d}\int_0^d I_v(x,t)\, dx\,, \quad (12)$$

d. h. *der im Außenkreis eines ebenen Elektrodensystems fließende kapazitive Ladestrom ist zu jedem Zeitpunkt dem räumlichen Mittelwert des Verschiebungsstromes im gleichen Zeitpunkt gleich.* Es ist leicht einzusehen, daß Gleichung [12] den kapazitiven Strom der kalten Röhre liefert, daß also

$$\frac{A}{d}\int_0^d i_v(x,t)\, dx = \frac{A}{d}\int_0^d \frac{\partial D}{\partial t}\, dx = \varepsilon_0\, \frac{A}{d} \cdot \frac{d}{dt}\int_0^d E\, dx = C \cdot \frac{dU}{dt}\,,$$

wo $C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$ die Kapazität des raumladungsfreien Systems und $U = \int_0^d E dx$ die Spannung zwischen den Elektroden bezeichnet. Dies erhellt außerdem ohne weiteres auch aus Gleichung (8).

Anwendungsbeispiele

Zur Veranschaulichung der abgeleiteten Formeln sollen folgende Beispiele gelöst werden.

1. Es soll die Ladung der Elektroden einer im Raumladungsgebiet arbeitenden ebenen Diode bestimmt werden, wenn an der Anode eine im Verhältnis zur Kathode positive Gleichspannung U_a liegt.

Lösung: Wie bekannt, ändert sich das Potential einer ebenen Diode bei Raumladung mit der $\frac{4}{3}$-Potenz der Entfernung x von der Kathode, es gilt mithin

$$U(x) = U_a \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}.$$

Der Poissonschen Gleichung gemäß ist

$$\varrho(x) = -\varepsilon_0 \frac{d^2 U}{dx^2} = -\frac{4}{9}\varepsilon_0 \frac{U_a}{d^2} \cdot \left(\frac{x}{d}\right)^{-2/3}.$$

Laut Formel (1) schreibt sich die Influenzladung der Anode zu

$$Q_{a\,infl} = -\int\limits_V \varrho\,\varphi_a\, dV = -A\int\limits_0^d \varrho(x)\cdot\varphi_a\, dx\,.$$

Hier bedeutet A die Oberfläche der Anode, d hingegen den Abstand zwischen Anode und Kathode. Der Wert des normierten Potentials φ_a ist $\frac{x}{d}$, weil sich das Potential der ebenen Diode im raumladungsfreien Fall linear ändert (und φ definitionsgemäß für ein raumladungsfreies System zu verstehen ist). Es wird also

$$Q_{a\,infl} = \frac{4}{9}\varepsilon_0 A \frac{U_a}{d^2}\int\limits_0^d \left(\frac{x}{d}\right)^{1/3} dx = \frac{1}{3}\varepsilon_0\frac{A}{d}U_a = \frac{1}{3}C_d U_a = \frac{1}{3}Q_{a\,kap}\,.$$

Hier ist $C_d = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ die kalte Kapazität der Röhre, $C_d U_a = Q_{a\,\mathrm{kap}}$ dagegen die kapazitive Ladung der Anode. Demzufolge beträgt die Gesamtladung der Anode

$$Q_a = Q_{a\,infl} + Q_{a\,kap} = \frac{4}{3}Q_{a\,kap}\,,$$

in Einklang mit der Tatsache, daß die Feldstärke an der Anode bei Raumladung den Wert $E_a = \frac{4}{3}\frac{U_a}{d}$ hat. Ähnlich läßt sich die Influenzladung der Kathode berechnen, nur muß dann φ auf die Kathode normiert werden, d. h. $\varphi_k = \frac{d-x}{d}$, womit

$$Q_{k\,infl} = \frac{4}{9}\varepsilon_0 A\frac{U_a}{d^2}\int\limits_0^d \left(\frac{x}{d}\right)^{-2/3}\frac{d-x}{d}\,dx = \varepsilon_0\frac{A}{d}U_a = C_d U_a\,.$$

Die kapazitive Ladung der Kathode ist genau so groß wie die der Anode, hat aber das umgekehrte, negative Vorzeichen, es ist also

$$Q_{k\,kap} = -C_d U_a\,.$$

Die Gesamtladung der Kathode schreibt sich sonach zu

$$Q_k = Q_{k\,infl} + Q_{k\,kap} = C_d\,U_a - C_d\,U_a = 0\,.$$

Dementsprechend ist die Feldstärke vor der Kathode bei Raumladung gleich Null.

2. Durch den Spalt des zweiten Resonators eines Zweikammerklystrons (Abb. 2) fließt ein Konvektionsstrom I_{konv}, durch den der Resonator erregt wird. Es ist die Grundwelle des von I_{konv} erzeugten Influenzstromes zu bestimmen.

Lösung: Wie bekannt, schreibt sich die Grundwelle des vom geschwindigkeitsmodulierten Elektronenstrahl erzeugten Konvektionsstromes, der durch den Spalt des zweiten Resonators fließt, zu

$$I_{21} = 2\,I_0 \cdot J\,(k) \cdot \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \Theta\right)\right],$$

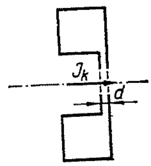


Abb. 2. Zur Bestimmung des Influenzstromes im Resonator eines Klystrons

wo I_0 der Gleichstrom des Elektronenstrahles, und $J_1\,(k)$ die Besselfunktion erster Ordnung und erster Art bedeutet, deren Argument der sogenannte Bündelungsparameter

$$k = \Theta \cdot \frac{\beta\,U_1}{2U_0}$$

ist.

$\Theta_0 = \omega\,\dfrac{l}{v_0}$ bezeichnet hier den Laufwinkel des unmodulierten Elektrons, das mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit v_0 fliegt, wobei l die Länge des Laufraumes, U_1 die Amplitude der Modulationsspannung mit der Kreisfrequenz ω am Spalt des ersten Resonators bedeutet. Ferner bezeichnen $\beta = \dfrac{\sin\vartheta/2}{\vartheta/2}$ den Modulationsfaktor, mit dem die Wirkung des endlichen Laufwinkels $\vartheta = \omega t = \omega\,\dfrac{d}{v_0}$ des Elektrons im Spalt berücksichtigt wird, d hingegen die Spaltbreite.

Wird der Anfangspunkt der x-Achse in die Spaltmitte gelegt, dann wird der Formel (10) entsprechend

$$I_{21\,infl} = \frac{1}{d}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} I_{21}\,(x,t)\,dx = 2I_0 \cdot \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{d}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} J_1\,(k) \cdot \exp\left(-j\,\Theta\right)dx\right].$$

Der Integrand hängt durch den Laufwinkel Θ von x ab, der im Spalt folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\Theta = \Theta_0 + \omega\,\frac{x}{v_0}\,,$$

wo Θ_0 den Laufwinkel zwischen den Spaltmitten der beiden Resonatoren bezeichnet. Man hat also

$$I_{21\,infl} = 2\,I_0 \cdot \exp\left[j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \Theta_0\right)\right] \cdot \frac{1}{d}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} J_1\,(k) \cdot \exp\left(-j\,\frac{\omega}{v_0}\,x\right)dx.$$

$J_1(k)$ hängt durch Θ von x ab. Die Änderung dieses Faktors kann jedoch im Integrationsbereich neben der Änderung von $\exp\left(-j\frac{\omega}{v_0}x\right)$ vernachlässigt und mithin vor das Integral gestellt werden, es wird also

$$I_{21\,infl} = 2\,I_0 J_1(k)\cdot\exp\left[j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\Theta_0\right)\right]\cdot\frac{1}{d}\int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\exp\left(-j\frac{\omega}{v_0}x\right)dx =$$

$$= 2\,I_0 J_1(k)\cdot\exp\left[j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\Theta_0\right)\right]\cdot\frac{\sin\vartheta/2}{\vartheta/2}\,,$$

worin $\vartheta = \frac{\omega}{v_0}d$, und mit $\beta = \frac{\sin\vartheta/2}{\vartheta/2}$ erhält man schließlich

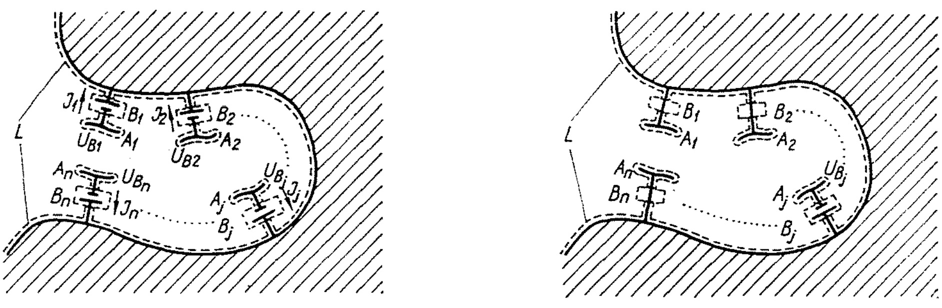
$$I_{21\,infl} = \beta\cdot 2\,I_0 J_1(k)\cdot\exp\left[j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\Theta_0\right)\right] = \beta\,I_{21}\,.$$

Die Grundwelle des Influenzstromes ist also gleich dem β-fachen der Grundwelle des Konvektionsstromes.

Anhang I

Bestimmung der Elektrodenladungen bei Raumladungsströmung

Es soll das Elektrodensystem beliebiger räumlicher Anordnung der Abb. 3*a* betrachtet werden. Zunächst wird vorausgesetzt, daß an den Elektroden konstante Gleichspannungen liegen, die mit $U_{B1}, U_{B2}, \ldots, U_{Bj}, \ldots, U_{Bn}$ bezeichnet werden, und daß im Vakuumraum zwischen den Elektroden eine stationäre Raumladungsströmung besteht. Es soll die Ladung der j-ten Elektrode bestimmt werden. Zu diesem Zweck betrachte man das Elektrodensystem der Abb. 3*b*, dessen räumliche Anordnung mit dem in 3*a* gezeigten System völlig übereinstimmt, das jedoch raumladungsfrei ist, und dessen sämtliche Elektroden, mit Ausnahme der j-ten Elektrode, geerdet sind. Für Form und Abmessungen des geerdeten Leiters, der die Elektroden umgibt, werden keine Bedingungen gestellt. Er kann z. B. geöffnet oder geschlossen sein. Im System *a* soll das Potential mit U, im System *b* mit Φ bezeichnet werden. Die Diskontinui-



a) *b)*

Abb. 3. Zur Bestimmung des Zusammenhanges zwischen den Strömen, die im Außenkreis der Elektroden und im Elektrodenraum fließen

a) Die Spannung an den Elektroden ist konstant. Bei Raumladungsströmung ($\varrho \neq 0$) wird das Potential durch die Poissonsche Gleichung $\Delta U = -\varrho/\varepsilon_0$ beschrieben

b) Sämtliche Elektroden außer der j-ten sind geerdet. Die Spannung der j-ten Elektrode ist U_{Bj}; keine Raumladung ($\varrho = 0$). Das Potential wird durch die Laplacesche Gleichung $\Delta\Phi = 0$ beschrieben täten, die von den Elektroden und deren Zuleitungen verursacht werden, sollen durch die sich ihnen anschmiegenden Flächen $A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_n$ ausgeschieden werden. Die Batterien, die die Elektrodenspannungen liefern, werden durch die sich ihnen anschmiegenden Flächen $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_n$, der geerdete Leiter hingegen durch die Fläche L aus dem Raum ausgeschlossen. Ist der Leiter L geöffnet, dann wird er durch eine Kugelfläche K mit dem Radius $R \to \infty$ umschlossen. Die so entstehende raumbegrenzende Fläche wird mit A bezeichnet und es gilt

$$A = \sum_{k=1}^{n} (A_k + B_k) + L + K\,.$$

Abb. 4 zeigt die schematische Anordnung der Elektroden, Batterien und Zuleitungen. Die Batterien werden als Zylinder mit dem gleichen Durchmesser wie die Anschlußleitungen angesehen. Durch die Abschlußplatten 0 und 1 der Fläche B_j wird das Metall an der Grenze des Elektrolytes und des Metalls durchgeschnitten.

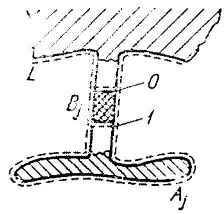


Abb. 4. Schema einer Elektrode mit Leitung und Batterie

Im Raume V, der durch die Fläche A begrenzt wird, befriedigt das Potential des Systems *a* die Poissonsche Gleichung

$$\Delta U = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \qquad (A\,1{,}1)$$

und genügt den Grenzbedingungen

$$U(A_k) = U_{Bk}\,; \quad U(B_k) = U'_{Bk}\,; \quad U(L) = 0\,. \qquad (A\,1{,}2)$$

$U(A_k)$ ist hierbei der Wert des Potentials U an der k-ten Elektrode, $U(B_k)$ hingegen die Potentialverteilung auf der Fläche B_k, die die Batterie umgibt, und $U(L)$ der Wert von U auf der Fläche L. Es wird angenommen, daß längs des Zylindermantels

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

ist.

Andererseits befriedigt das Potential des Systems *b* die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \qquad (A\,1{,}3)$$

und die Grenzbedingungen

$$\Phi(A_k)_{k \neq j} = 0,\ \Phi(A_j) = U_{Bj}\,; \quad \Phi(B_k)_{k \neq j} = 0,\ \Phi(B_j) = U'_{Bj}\,; \quad \Phi(L) = 0\,. \qquad (A\,1{,}4)$$

Außerdem wird angenommen, daß U und Φ genau so wie $\frac{1}{R}$ im unendlichen verschwinden. Da auf der unendlich großen Kugelfläche K $\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial R}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial R}$ ist, verschwinden die Gradienten im Unendlichen wie $\frac{1}{R^2}$.

Mit den Potentialen U und Φ schreibt man nun den Greenschen Satz

$$\int_V (U\Delta\Phi - \Phi\Delta U)\, dV = \int_A \left(U \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial U}{\partial n}\right) dA \tag{A 1,5}$$

auf. Hier bedeutet V das Raumgebiet, das durch die Fläche A begrenzt wird. Die Oberflächennormale ist nach außen gerichtet. Mit den Gleichungen (A 1,1) und (A 1,3) wird die linke Seite der Gleichung (A 1,5)

$$-\int_V \Phi\Delta U dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \Phi\varrho dV \ . \tag{A 1,6}$$

Zwecks Umformung der rechten Seite der Gleichung (A 1,5) geht man davon aus, daß im Sinne von (A 1,2) unter Berücksichtigung der Richtung der Oberflächennormale

$$\int_{A_k} U \frac{\partial\Phi}{\partial n} dA = -U_{Bk}\int_{A_k} \overline{E} d\overline{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} U_{Bk} \int_{A_k} \overline{D} d\underline{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} U_{Bk} Q_{bk}, \tag{A 1,7}$$

wo Q_{bk} die kapazitive Ladung der k-ten Elektrode des Systems b bedeutet, die von der Spannung U_{Bj} der j-ten Elektrode verursacht wird, während

$$\int_{B_k} U \frac{\partial\Phi}{\partial n} dA = 0 \ , \tag{A 1,8}$$

wenn $k \neq j$, weil dann im System b die Ladung des Leitungsstückes, das die Batterie ersetzt, vernachlässigt werden kann, im Falle $k = j$ hingegen deshalb, weil $\frac{d\Phi}{dn}$ auf der ganzen Fläche B_j gleich Null ist (die Flächen 1 und 0 verlaufen nämlich im Innern des Leiters, wo die Feldstärke gleich Null ist. Außerdem wurde angenommen, daß die Feldstärke auf dem Mantel keine normale Komponente hat).

Auf der Fläche L gilt

$$\int_L U \frac{\partial\Phi}{\partial n} dA = 0 \ , \tag{A 1,9}$$

weil dort $U = 0$. Den für das Verhalten von U und Φ im Unendlichen gestellten Bedingungen entsprechend, leuchtet ein, daß $U\frac{d\Phi}{dn}$ wie $\frac{1}{R^3}$ im Unendlichen verschwindet. Das Oberflächenintegral der Kugelfläche K strebt also wie $\frac{1}{R}$ gegen Null. Das Oberflächenintegral $\int_A U \frac{d\Phi}{dn} dA$ über die ganze, den untersuchten Raum einschließende Fläche $A = \sum_{k=1}^{n} (A_k + B_k) + L + K$ ergibt dann den Wert

$$\int_A U \frac{\partial\Phi}{\partial n} dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} U_{Bk} Q_{bk} \ . \tag{A 1,10}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (A 1,5) schreibt sich für die einzelnen Flächenstücke unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen (A 1,4) zu

$$-\int_{A_k \neq j} \Phi \frac{\partial U}{\partial n} dA = -\Phi(A_k) \int_{A_k \neq j} \frac{\partial U}{\partial n} dA = 0 \,, \tag{A 1,11}$$

$$-\int_{A_j} \Phi \frac{\partial U}{\partial n} dA = -\Phi(A_j) \int_{A_j} \frac{\partial U}{\partial n} dA = \frac{1}{\varepsilon_0} U_{Bj} Q_{aj} \,. \tag{A 1,12}$$

Hier bedeutet Q_{aj} die Ladung (Influenz- und kapazitive Ladung) der j-ten Elektrode des Systems a. Der Wert des Integrals ist auf sämtlichen Flächen B_k gleich Null, u. zw. teils deshalb, weil im Falle $k \neq j$ $\Phi(B_k) = 0$, teils deshalb, weil auf der Fläche B_j überall $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Damit wird also

$$-\int_{B_k} \Phi \frac{\partial U}{\partial n} dA = 0 . \qquad (A\ 1{,}13)$$

Schließlich gilt auch auf der Fläche L

$$-\int_{L} \Phi \frac{\partial U}{\partial n} dA = 0 , \qquad (A\ 1{,}14)$$

weil $\Phi(L) = 0$, und auch auf der Kugelfläche K bei $R \to \infty$

$$-\int_{K} \Phi \frac{\partial U}{\partial n} dA = 0 \qquad (A\ 1{,}15)$$

gilt, weil dort $\Phi \frac{\partial U}{\partial n}$ gleich wie $\frac{1}{R^3}$ gegen 0 strebt.

Mit den Zusammenhängen (A 1,7—15) wird der Wert des Integrals auf der rechten Seite der Gleichung (A 1,5) für die ganze, den Raum V umschließende Oberfläche A

$$\int_{A} \left(U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) dA = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} U_{Bk} Q_{bk} - \frac{1}{\varepsilon_0} U_{Bj} Q_{aj} . \qquad (A\ 1{,}16)$$

Auf Grund der Gleichungen (A 1,5—6) und (A 1,16) erhält man

$$\int_{V} \varrho \Phi dV = \sum_{k=1}^{n} U_{Bk} Q_{bk} - U_{Bj} Q_{aj} . \qquad (A\ 1{,}17)$$

Da Φ die Potentialverteilung ist, die von der Spannung U_{Bj} der j-ten Elektrode des Systems b verursacht wird, kann man auch

$$\Phi = U_{Bj} \cdot \varphi_j \qquad (A\ 1{,}18)$$

schreiben. φ_j ist hier die auf die j-te Elektrode des raumladungsfreien Systems normierte dimensionslose Potentialfunktion. Ihr Zahlenwert ist der Potentialverteilung gleich, die man erhält, wenn man an die j-te Elektrode des Systems eine der Einheit entsprechende Spannung legt und sämtliche anderen Elektroden erdet.

Dividiert man die Gleichung (A 1,17) mit U_{Bj} und berücksichtigt man Gleichung (A 1,18), so hat man

$$\int_{V} \varrho \varphi_j dV = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_{bk}}{U_{Bj}} U_{Bk} - Q_{aj} . \qquad (A\ 1{,}19)$$

Da Q_{bk} die kapazitive Ladung ist, die auf der k-ten Elektrode des Systems b durch die Spannung U_{Bj} der j-ten Elektrode entsteht, gilt

$$\frac{Q_{bk}}{U_{Bj}} = c_{jk} . \qquad (A\ 1{,}20)$$

Der Zahlenwert des Kapazitätskoeffizienten c_{jk} ist der Ladung der k-ten Elektrode im raumladungsfreien System gleich, wenn an die j-te Elektrode eine der Einheit entsprechende Spannung gelegt wird und die anderen Elektroden geerdet werden. Der Wert von c_{jk} kann durch die Teilkapazitäten folgendermaßen ausgedrückt werden*

$$c_{jk} = C_{jk}, \text{ wenn } j \neq k \text{ und}$$

$$c_{jj} = C_{j\infty} + C_{j1} + C_{j2} + \ldots + C_{jn}; \; C_{jj} = 0. \qquad (A\ 1{,}21)$$

Hier ist $C_{j\infty}$ die Kapazität der j-ten Elektrode, bezogen auf das Unendliche bzw. auf die Erde; C_{jk} ist die Kapazität zwischen der j-ten und der k-ten Elektrode.

Da $c_{jk} = c_{kj}$, leuchtet unmittelbar ein, daß das Term $\sum_{k=1}^{n} c_{jk} U_{Bk}$ die kapazitive Ladung der j-ten Elektrode bedeutet.

Damit kann also die Gleichung (A 1,19) umgeordnet werden, womit man durch Weglassen des Index a, mit dem das System mit Raumladung bezeichnet wurde, die Gleichung

$$Q_j = -\int_V \varrho \varphi_j \, dV + \sum_{k=1}^{n} c_{jk} U_{Bk} \qquad (A\ 1{,}22)$$

erhält. Dieser Ausdruck besagt, daß die Ladung der j-ten Elektrode bei Raumladung aus der Influenzladung und kapazitiven Ladung besteht. Das negative Vorzeichen des die Influenzladung ausdrückenden Integrals bedeutet, daß die Influenzladung ein Vorzeichen hat, welches dem den räumlichen Ladungen entgegengesetzt ist.

Bis jetzt war stets vorausgesetzt, daß die Spannungen U_{Bk} konstant sind. Diese Beschränkung soll jetzt fallen gelassen werden, was durch Weglassen des Indexes »B« angedeutet wird. Dagegen soll bedungen bleiben, daß der Leiter L das ganze System umschließt und daß die Abmessungen des so gewonnenen Raumes im Verhältnis zur Wellenlänge λ der größten Betriebsfrequenz sehr klein sind. Der Raum kann dann durch eine auch zeitabhängige retardationsfreie Potentialfunktion $U(r, t)$ bzw. $\Phi(r, t)$ beschrieben werden. Diese Funktionen genügen der Poissonschen bzw. der Laplaceschen Gleichung sowie den Grenzbedingungen ebenso wie im statischen Fall. Sämtliche Ausdrücke, die durch den Greenschen Satz gewonnen wurden, behalten also ihre Gültigkeit einschließlich der Gleichungen (A 1,20) und (A 1,22). Q_{bk} ändert sich nämlich proportional der Spannung U_j, so daß also ihr Quotient konstant bleibt. Aus der Gleichung (A 1,18) geht außerdem hervor, daß φ_j auch jetzt die auf die j-te Elektrode normierte *statische* Potentialfunktion des raumladungsfreien Systems ist.

Anhang II

Bestimmung der Zusammenhänge zwischen den Strömen im Elektrodenraum und im Außenkreis

Durch Gleichung (A 1,22) kann der allgemeine Zusammenhang zwischen Konvektions- und Influenzstrom, sowie zwischen Verschiebungs- und kapazitivem Strom bestimmt werden. Die positive Meßrichtung der Ströme im Außenkreis soll von den Elektroden in Richtung Erde zeigen. Bildet man nun den negativen Differentialquotienten der Gleichung (A 1,22) nach der Zeit in der Form

$$-\frac{dQ_j}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \varrho \varphi_j \, dV - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} U_k\,, \qquad (A\ 2{,}1)$$

* Siehe z. B. SIMONYI, K., Theoretische Elektrotechnik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956, S. 235.

dann gibt das Glied der linken Seite die zeitliche Änderung (Abnahme) der Ladung der j-ten Elektrode an, während das zweite Glied auf der rechten Seite den kapazitiven Ladestrom darstellt, der in der Zuleitung der j-ten Elektrode des raumladungsfreien Systems fließt. Die physikalische Bedeutung des ersten Gliedes der rechten Seite geht aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho\,\varphi_j\,dV = \int_V \frac{\partial\varrho}{\partial t}\,\varphi_j\,dV = -\int_V \varphi_j\,div\,\bar{\imath}_k\,dV \qquad (A\ 2{,}2)$$

hervor. Der Kontinuitätsgleichung entsprechend ist nämlich div $\bar{\imath}_k = -\frac{\partial\varrho}{\partial t}$, wo $\bar{\imath}_k = \varrho\bar{v}$ die Konvektionsstromdichte bedeutet. Die rechte Seite der Gleichung (A 2,2) kann mit Hilfe der Beziehung

$$\mathrm{div}\,(\varphi\,\bar{v}) = \varphi\,\mathrm{div}\,\bar{v} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\,\varphi \qquad (A\ 2{,}3)$$

und des Satzes von Gauß in folgende Form gebracht werden:

$$-\int \varphi_j\,\mathrm{div}\,\bar{\imath}_k\,dV = \int_V [\bar{\imath}_k\,\mathrm{grad}\,\varphi_j - \mathrm{div}\,(\varphi_j\,\bar{\imath}_k)]\,dV =$$

$$= \int_V \bar{\imath}_k\,\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV - \int_A \varphi_j\,\bar{\imath}_k\,d\bar{A} = \int_V \bar{\imath}_k\,\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV - \int_{A_j} \bar{\imath}_k\,d\bar{A}\,.$$

Demnach ist

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho\,\varphi_j\,dV = \int_V \bar{\imath}_k\,\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV - \int_{A_j} \bar{\imath}_k\,d\bar{A}\,, \qquad (A\ 2{,}4)$$

weil das normierte Potential φ_j auf der ganzen Fläche A überall den Nullwert hat, mit Ausnahme der Fläche A_j der j-ten Elektrode und der Fläche B_j der dazugehörigen Batterie. Der Wert des Potentials φ_j ist auf der Fläche $A_j = 1$, auf der Fläche B_j dagegen ist er uninteressant, weil dort $\bar{\imath}_k = 0$. (Es gilt als angenommen, daß die Spannungsquelle außerhalb des Strömungsraumes liegt.)

Wegen div $\bar{\imath} = 0$ wird div $\bar{\imath}_k = -$ div $\bar{\imath}_v$, weshalb die zeitliche Änderung der Influenzladung auch durch $\bar{\imath}_v$ ausgedrückt werden kann, man hat also

$$\frac{d}{dt}\int_V \varrho\,\varphi_j\,dV = \int_{A_j} \bar{\imath}_v\,d\bar{A} - \int_V \bar{\imath}_v\,\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV\,. \qquad (A\ 2{,}5)$$

Es wurde hierbei berücksichtigt, daß φ_j auf der Fläche A_j den Wert 1 hat, auf B_j jedoch bedeutungslos ist, weil dort $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, also $\int_{Bj} \bar{\imath}_v\,d\bar{A} = 0$. Auf den anderen Flächen jedoch ist $\varphi_j = 0$. Die rechten Seiten der Gleichungen (A 2,4) und (A 2,5) sind also gleich, so daß man folgenden wichtigen und interessanten Zusammenhang erhält:

$$\boxed{\int_{A_j} (\bar{\imath}_k + \bar{\imath}_v)\,d\bar{A} = \int_V (\bar{\imath}_k + \bar{\imath}_v)\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV.} \qquad (A\ 2{,}6)$$

Führt man die gesamte Stromdichte

$$\bar{\imath} = \bar{\imath}_k + \bar{\imath}_v$$

ein, dann hat man

$$\int_{A_j} \bar{\imath}\,d\bar{A} = \int_V \bar{\imath}\,\mathrm{grad}\,\varphi_j\,dV\,. \qquad (A\ 2{,}6a)$$

Der im Außenkreis der Elektrode A_j fließende Gesamtstrom schreibt sich also zu

$$I_j = \int_V \bar{\imath} \operatorname{grad} \varphi_j \, dV \; . \qquad (A\ 2{,}7)$$

Im Zusammenhang mit der Gleichung (A 2,6) muß darauf hingewiesen werden, daß im allgemeinen, trotzdem es zunächst anders scheint,

$$\int_{A_j} \bar{\imath}_k \, d\bar{A} \neq \int_V \bar{\imath}_k \operatorname{grad} \varphi_j \, dV \; ,$$

bzw.

$$\int_{A_j} \bar{\imath}_\nu \, d\bar{A} \neq \int_V \bar{\imath}_\nu \operatorname{grad} \varphi_j \, dV \; .$$

Gleichheit besteht nur in zwei Sonderfällen: 1. Wenn im Raum überall $\bar{\imath}_v = 0$ (stationärer Zustand im statischen Betrieb), 2. wenn überall im Raum $\bar{\imath}_k = 0$ (z. B. in »kalter« Röhre). Sonst liefern die Integrale der rechten Seite nicht den in die Elektrode A_j fließenden Konvektions- bzw. Verschiebungsstrom, sondern, wie noch gezeigt werden wird, den Influenzstrom bzw. den kapazitiven Ladestrom. Wird z. B. an die Elektroden Wechselspannung gelegt und treffen auf die Elektrode A_j keine Elektronen auf (negatives Gitter oder Übergangszustand unmittelbar nach dem Einschalten), dann ist $\bar{\imath}_k$ auf der Fläche A_j gleich Null, es gilt also!

$$\int_{A_j} \bar{\imath}_\nu \, d\bar{A} = \int_V (\bar{\imath}_k + \bar{\imath}_\nu) \operatorname{grad} \varphi_j \, dV \; . \qquad (A\ 2{,}8)$$

Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß die Gleichung (A 2,6) nur für den gesamten Strom Gültigkeit hat, für die Teilströme $\bar{\imath}_k$ und $\bar{\imath}_v$ dagegen nicht.

Greift man nun auf die Gleichung (A 2,1) zurück, dann läßt sich auf Grund der physikalischen Bedeutung des zweiten Gliedes der rechten Seite und anhand der Gleichung (A 2,5) schreiben:

$$-\frac{dQ_j}{dt} = \int_{A_j} \bar{\imath}_\nu \, d\bar{A} - \int_V \bar{\imath}_\nu \operatorname{grad} \varphi_j \, dV + I_{j\,\text{kap}}.$$

Wegen der physikalischen Bedeutung dieser Gleichung (da jetzt die Oberflächennormale aus dem Raume nach außen gerichtet ist) hat man

$$-\frac{dQ_j}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{A_j} \bar{D} d\bar{A} = \int_{A_j} \frac{\partial D}{\partial t} \, d\bar{A} = \int_{A_j} \bar{\imath}_v \, d\bar{A} \; ,$$

und mithin

$$I_{j\,\text{kap}} = \int_V \bar{\imath}_\nu \operatorname{grad} \varphi_j \, dV \; . \qquad (A\ 2{,}7)$$

Hier ist $\bar{\imath}_v = \bar{\imath}_v (\bar{r}, t)$ die räumliche und zeitliche Verteilung der Verschiebungsstromdichte, $\varphi_j = \varphi_j (\bar{r})$ hingegen die auf die Elektrode A_j normierte Potentialfunktion bzw. auf Grund der Gleichung (A 2,1)

$$I_{j\,\text{kap}} = \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \frac{dU_k}{dt} \; , \qquad (A\ 2{,}8)$$

worin c_{jk} die durch (A 1,21) definierte Kapazität bedeutet. Die Formel (A 2,7) ist sowohl bei Raumladung als auch im raumladungsfreien Falle gültig, jedoch bedeutet, der Gleichung (A 2,8) entsprechend, $I_{j\text{kap}}$ immer den kapazitiven Strom der j-ten Elektrode im raumladungsfreien System (»kalte« Röhre). Ausdrücklich wird betont, daß $I_{j\,\mathrm{kap}}$, der kapazitive Ladestrom, nicht unbedingt Blindstrom sein muß, weil er in Bezug auf die Elektrodenspannung U_j auch eine Wirkkomponente haben kann.

Treffen auf die j-te Elektrode keine Elektronen auf und treten auch keine aus ihr aus, dann gibt die linke Seite der Gleichung (A 2,1) den gesamten Strom im Stromkreis der Elektrode A_j. Dieser Strom ist der Summe des Influenzstromes und des kapazitiven Ladestromes gleich. Mit Gleichung (A 2,4) erhält man dann

$$I_{j\,infl} + I_{j\,\mathrm{kap}} = \int_V \bar{\imath}_k \,\mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV + I_{j\,\mathrm{kap}} \ ,$$

also

$$I_{j\,infl} = \int_V \bar{\imath}_k \,\mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV \ . \qquad (A\ 2{,}9)$$

Im stationären Zustand bei statischem Betrieb ist die Ladung Q_j der Elektrode A_j auch dann konstant, wenn Ladungen auf die Elektrode auftreffen bzw. aus ihr austreten. Da die kapazitive Ladung natürlich konstant ist, gilt dasselbe auch für die Influenzladung. Im Sinne der Gleichung (A 2,4) ist also

$$\int_{A_j} \bar{\imath}_k \, d\bar{A} = \int_V \bar{\imath}_k \mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV \ . \qquad (A\ 2{,}9\mathrm{a})$$

Das Glied auf der linken Seite gibt — seinem positiven bzw. negativen Vorzeichen entsprechend — den in die Elektrode A_j ein- bzw. den aus ihr ausfließenden Strom an. Dieser ist gerade dem im Außenkreis fließenden Strom gleich. Aus den beiden Gleichungen (A 2,9) und (A 2,9a) folgt, daß der im Außenkreis fließende Strom auch im stationären Betrieb ein Influenzstrom ist, trotzdem sich die Influenzladung makroskopisch nicht ändert.

Nach Untersuchung dieser Spezialfälle soll nun bewiesen werden, daß Gleichung (A 2,9) auch im allgemeinen Fall den Influenzstrom liefert. Der im Außenkreis fließende Gesamtstrom wird deshalb als Summe des Influenzstromes und des kapazitiven Stromes aufgeschrieben. Im Sinne der Gleichung (A 2,6) kann man schreiben

$$I_{j\,infl} + I_{j\,kap} = \int_V \bar{\imath}_k \,\mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV + \int_V \bar{\imath}v \,\mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV \ ,$$

woraus mit Berücksichtigung der Gleichung (A 2,7) ganz allgemein

$$I_{j\,infl} = \int_V \bar{\imath}_k \,\mathrm{grad}\, \varphi_j \, dV \qquad (A\ 2{,}9)$$

gilt. $\bar{\imath}_k = \bar{\imath}_k(\bar{r}, t) = \varrho(\bar{r}, t) \cdot \bar{v}(\bar{r}, t)$ ist hierin die räumliche und zeitliche Verteilung der Konvektionsstromdichte, $\varphi_j = \varphi_j(\bar{r})$ hingegen die auf die Elektrode A_j normierte Potentialfunktion. Das Vorzeichen des durch das Integral bestimmten Stromes ist dann richtig, wenn die Meßrichtung des Stromes von der Elektrode A_j gegen Erde gerichtet ist.

Ich spreche an dieser Stelle Hern G. Freud, Doktor der mathematischen Wissenschaften für seine wertvollen Bemerkungen sowie den Herren Prof. Dr. I. Barta und Oberassistent K. Géher für die Durchsicht des Manuskriptes meinen verbindlichsten Dank aus.

Zusammenfassung

In dem Artikel werden die allgemeinen Zusammenhänge zwischen dem Konvektionsstrom und dem Influenzstrom, sowie zwischen dem Verschiebungsstrom und kapazitiven Ladestrom in beliebigem Elektrodensystem beim Vorhandensein einer Raumladungsströmung angegeben. Es werden hierbei auch die Elektrodenladungen in allgemeiner Form bestimmt.

Literatur

1. KELLOG, O. D.: Foundations of potential theory, 1929, S. 231, B. 7.
2. NORTH, D. O.: Analysis of the effects of space charge on grid impedance, Proc. IRE, **24**, 108—136 (1936).
3. ROTHE, H.: Das Verhalten von Elektronenröhren bei hohen Frequenzen, Telefunkenröhre **9**, 33—65 (1937).
4. SPANGENBERG, K. R.: Vacuum tubes. McGraw-Hill, N.Y. 1948, 482—485.
5. HAMILTON, D. R., KNIP, I. K., KUPER, I. B. H.: Klystrons and microwave triodes. Radiation Laboratory Series VII. Mc-Graw-Hill, N.Y. 1948, 37—38.
6. КОВАЛЕНКО. В. Ф.: Введение в злектронику сверхвысоких частот. Советское Радио, Москва 1955, 72—77.
7. FERRIS, W. R.: Input resistance of vacuum tubes as ultra-high frequency amplifiers, Proc. IRE, **24**, 82—107 (1936).
8. HAHN, W. C., METCALF, G. F.: Velocity-modulated tubes, Proc IRE, **27**, 106—117 (1939).
9. HAEF, A. V.: An ultra-high frequency power amplifier of novel design, Electronics, **30** (1939).
10. RAMO, S.: Currents induced by electron motion, Proc. IRE, **27**, 584—585 (1939).
11. СИФОРОВ, В. И.: Радиоприемные устройства, Воениздат, Москва 1951, 4. 246—250.
12. KLEEN, W.: Einführung in die Mikrowellen-Elektronik, Hirzel, Zürich 1952.
13. JEN, C. K.: On the induced current and energy balance in electronics, Proc. IRE, **28**, 345—349 (1941).
14. JEN, C. K.: On the energy equation in electronics at ultra-high frequencies, Proc. IRE, **29**, 464—466 (1941).
15. GABOR, D.: Energy conversion in electric devices, III. J. Ind. Electr. Engrs. (London) **91**, 128—141 (1944).

M. ROMHÁNYI, Budapest, XI., Sztoczek u. 2. Ungarn.