

SCHNELLE BERECHNUNG DER IMPEDANZ VON PARALLELEN, VON STROMVERDRÄNGUNGS- (VOM HAUPTSTROM NICHT DURCHFLOSSENEN) SOWIE VON REIHENSCHLUSS-(NORMALEN) STÄBEN MIT HILFE KOMPLEXER FUNKTIONSKURVEN

Von

J. G. RETTER

Lehrstuhl für Elektrische Maschinen und Messungen, Technische Universität, Budapest
(Eingegangen am 13. April 1961)

In einer vorangegangenen Veröffentlichung [1] wurde gezeigt, wie sich die Impedanz und Stromverteilung zusammengesetzter Stäbe mit Hilfe komplexer Funktionsreliefs berechnen lassen.

Die Grundlage fußt auf der Überlegung, daß ein einziger Rechteckstab durch eine im Leerlauf befindliche Leitung bzw. durch einen Vierpol ersetzt werden kann, deren Impedanz bzw. normalisierte Impedanz

$$\bar{Z} = \bar{Z}_0 \operatorname{cth} \bar{\gamma} x \quad (1)$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}_0} = \operatorname{cth} \bar{\gamma} x \quad (2)$$

beträgt, wobei

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{j\omega\mu_0\epsilon} \frac{l}{c} \quad (3)$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\epsilon}} \quad (4)$$

Bei einem Stab, der aus zwei Abschnitten mit verschiedener charakteristischer Impedanz — z. B. verschiedener Breite — zusammengesetzt ist (Abb. 1), stellt die Eingangsimpedanz der den unteren Stababschnitt ersetzenden Leerlaufleitung die Belastungsimpedanz der oberen Leitung oder des diese ersetzenden Vierpols dar.

Werden die Primärspannung und der Primärstrom des oberen Stabes oder Vierpols, mit Hilfe der Vierpoltheorie, mit dem Sekundärstrom und der Sekundärspannung — mit Spannung und Strom des unteren Stabes — ausgedrückt, so läßt sich für die Eingangsimpedanz der Gesamtschaltung

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = \frac{\bar{U}_1 \operatorname{ch} \bar{g}_2 + \bar{Z}_{02} \bar{I}_1 \operatorname{sh} \bar{g}_2}{\bar{I}_1 \operatorname{ch} \bar{g}_2 + \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_{02}} \operatorname{sh} \bar{g}_2} \quad (5)$$

schreiben.

Mit der Impedanz $\bar{Z}_1 = \bar{U}_1/\bar{I}_1$ des unteren Stabes hat man

$$\bar{z} = \frac{\bar{Z}_1/\bar{Z}_{02} + \text{th}\bar{g}_2}{1 + \bar{Z}_1/\bar{Z}_{02}\text{th}\bar{g}_2} = \frac{\bar{z}'_1 + \text{th}\bar{g}_2}{1 + \bar{z}'_1\text{th}\bar{g}_2}, \quad (6)$$

worin $\bar{z}'_1 = \bar{Z}_1/\bar{Z}_{02}$ die auf die charakteristische Impedanz des oberen Abschnittes bezogene normalisierte Impedanz des unteren Abschnittes bedeutet.

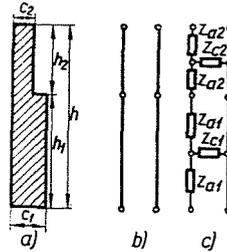


Abb. 1

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1) gilt

$$\bar{z}'_1 = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_{01}} \cdot \frac{\bar{Z}_{01}}{\bar{Z}_{02}} = \frac{\bar{Z}_{01}}{\bar{Z}_{02}} \text{th}(\bar{\gamma}_1 h_1 + j\pi/2) = \text{th}\bar{g}'_1, \quad (7)$$

worin \bar{g}'_1 durch die letzte Gleichheit definiert ist. Nach Substitution ergibt sich

$$\bar{z} = \frac{\text{th}\bar{g}'_1 + \text{th}\bar{g}_2}{1 + \text{th}\bar{g}'_1\text{th}\bar{g}_2} = \text{th}(\bar{g}_2 + \bar{g}'_1) = \text{th}\bar{g}. \quad (8)$$

Hierbei ist \bar{z} die normalisierte Impedanz des Gesamtstabes, \bar{g} hingegen dessen Übertragung. Mit diesen Werten erhält man

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{02} \text{th}(\bar{\gamma}_2 h_2 + \bar{g}_1). \quad (9)$$

Unter wiederholter Anwendung dieser Formel kann die Impedanz jedes beliebigen, zusammengesetzten Stabes von jedem beliebigen komplexen th-Relief (Tangensrelief) abgelesen werden. Einer vollständig analogen Methode kann man sich auch bei der Berechnung der Stromverteilung bedienen, bloß hat man statt des Reliefs für th dasjenige für sh (Sinusrelief) zu gebrauchen.

In zahlreichen Fällen ist die Benützung der auf die Ersatzschaltung aufgebauten nachstehenden Funktionskurven übersichtlicher und bequemer. Sie haben auch den weiteren Vorzug, anschaulicher und einfacher zu sein und überdies bei den hintereinander geschalteten (normalen) Stäben mit den bisher

gebräuchlichen Field-Emdeschen Formeln in unmittelbarem Zusammenhang zu stehen. Derartige Schaubilder lassen sich unter Zugrundelegung der Ersatzschaltungen auch für andere Gebilde einfach konstruieren. Die erhaltenen Diagramme kann der Ingenieur bei seinen Berechnungen direkt verwenden.

Zunächst sollen die zusammengesetzten-*parallelen* Stäbe — die Stromverdrängungsläuferstäbe — einschließlich der Berechnung der Impedanz und der Stromverteilung behandelt werden.

a) *Berechnungsmethode.* Der rechteckige Abschnitt eines zusammengesetzten Stabes ist, wie gezeigt, mit einem Vierpol gleichwertig. Wählt man eine T-Schaltung, lassen sich die quer- bzw. längsgerichteten Impedanzen anhand der Zusammenhänge

$$\bar{Z}_c = \frac{\bar{Z}_0}{\operatorname{sh} \bar{g}} \quad (10)$$

bzw.

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_ü - \bar{Z}_c \quad (11)$$

berechnen. ($Z_ü$ ist hier die Leerlaufimpedanz.)

Ein aus mehreren rechteckigen Abschnitten bestehender Stab kann durch eine Kette solcher T-Schaltungen ersetzt werden, wobei man die Berechnung der Impedanz auf Grund der Ersatzschaltung vornehmen kann.

Beispiel: Für die Berechnung eines L-Stabes, der durch die Kennwerte

$$h_1 = h_2 = 11,3 \text{ mm}, c_1 = 5,12 \text{ mm},$$

$$c_2 = 2,56 \text{ mm}, \rho = 0,02 \Omega \text{ m}^{-1} \text{ mm}^2,$$

$$l = 0,1 \text{ m}, f = 50 \text{ s}^{-1}, \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0,0993 + j 0,0993 \text{ mm}^{-1}$$

$$\bar{Z}_{01} = (0,375 + j 0,375) \cdot 10^{-4} \Omega$$

$$\bar{Z}_{02} = 2 \bar{Z}_{01} = (0,75 + j 0,75) \cdot 10^{-4} \Omega$$

gekennzeichnet ist (Abb. 1). Die Werte der Längs- bzw. Querimpedanzen belaufen sich in 10^{-4} Ohm auf

$$\bar{Z}_{a1} = 0,08 + j 0,4$$

$$\bar{Z}_{c1} = 0,298 - j 0,3$$

$$\bar{Z}_{a2} = 0,16 + j 0,8$$

$$\bar{Z}_{c2} = 0,596 - j 0,26$$

Aus Abb. 1c folgt:

$$\bar{Z}_I = \bar{Z}_{a2} + \bar{Z}_{a1} + \bar{Z}_{c1}$$

$$\bar{Z}_p = \frac{\bar{Z}_{c2} \bar{Z}_I}{\bar{Z}_{c2} + \bar{Z}_I}$$

$$\bar{Z}_b = \bar{Z}_{a2} + \bar{Z}_p = (0,717 + j 0,84) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

b) *Graphische Methode.* (Benützung der Funktionenbilder $(1 + j) \operatorname{cth}(1 + j) \xi$ und $(1 + j) \cdot 1/\operatorname{sh}(1 + j) \xi$.) Den nachstehenden Schaubildern

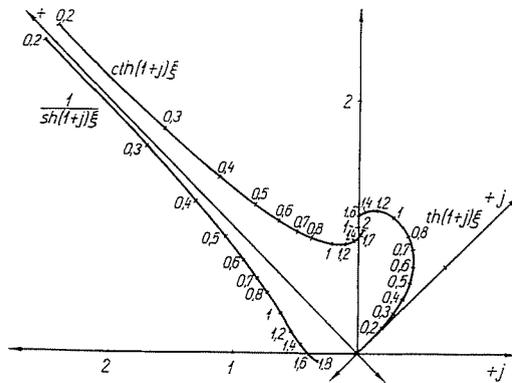


Abb. 2

können die Werte der Querimpedanz \bar{Z}_c und der Längsimpedanz \bar{Z}_a für einen beliebigen rechteckigen Abschnitt bequem entnommen werden.

Die Ausdrücke für die Leerlauf- und Querimpedanzen des Abschnittes können in folgender Form geschrieben werden:

$$\bar{Z}_{ii} = \bar{Z}_0 \operatorname{cth} \bar{g} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} (1 + j) \operatorname{cth}(1 + j) ah \quad (12)$$

$$\bar{Z}_{ii} = Z_0 / \underline{45^\circ} \operatorname{cth}(1 + j) \xi = R_e \xi / \underline{45^\circ} \operatorname{cth}(1 + j) \xi \quad (13)$$

$$\bar{Z}_c = \bar{Z}_0 \frac{1}{\operatorname{sh} \bar{g}} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}} (1 + j) \frac{1}{\operatorname{sh}(1 + j) ah} \quad (14)$$

$$\bar{Z}_c = Z_0 / \underline{45^\circ} \frac{1}{\operatorname{sh}(1 + j) \xi} = R_e \frac{1}{\operatorname{sh}(1 + j) \xi} \quad (15)$$

In Abb. 2 sind die Kurven von $\text{cth}\bar{\gamma}h$, $1/\text{sh}\bar{\gamma}h$ und $\text{th}\bar{\gamma}h$ aufgetragen. Mit einer Drehung der Achsen um 45° wurden die Funktionskurven von $\bar{z}_u = \frac{\bar{Z}_u}{\bar{Z}_0}$ und $\bar{z}_c = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_0}$ der Abb. 3 gewonnen. (R_e ist der Gleichstromwiderstand.)

Die normalisierte Impedanz \bar{z}_a des Zweiges in Längsrichtung ist die Differenz zwischen \bar{z}_u und \bar{z}_c und somit der Verbindungsvektor der dem gleichen Wert ah zugeordneten Punkte der beiden Kurven.

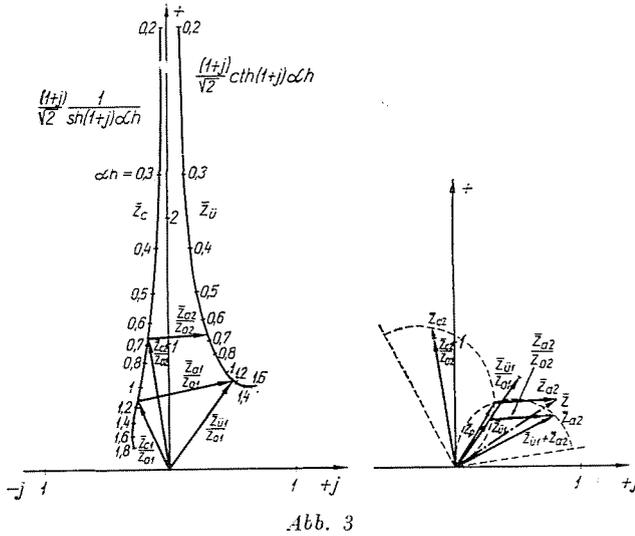


Abb. 3

Die Parameterverteilung ist in den Diagrammen in $\xi = ah$ -Einheiten aufgetragen, sie sind daher ganz allgemein gültig und können somit für beliebige Werkstoffe, Höhen und Frequenzen angewendet werden.

Auf Grund der Gleichung (13) und der Beziehung

$$\bar{Z}_0 = X_e \frac{3}{2\xi} \sqrt{2} / 45^\circ \tag{16}$$

— wo X_e die Reaktanz bei gleichförmiger Verteilung des Stromes ist — erhält man, wenn man den an der reellen Achse abgelesenen Wert der Kurve \bar{z}_u gemäß Abbildung mit ξ multipliziert, unmittelbar das Widerstandsverhältnis k_r , an der imaginären Achse hingegen den in der Theorie der Stromverdrängungsmaschinen verbreiteten Faktor k_x' . Durch Multiplikation des letzteren mit $\frac{3}{2}\xi$ läßt sich unmittelbar das Streuverhältnis k_x ermitteln. Die abgelesenen Werte ergeben also die Brüche in den Beziehungen (34) und (35), die aus Hyperbelfunktionen bestehen. Sie nähern sich bei großen Stabhöhen dem Wert 1, wie dies übrigens auch aus der Abbildung 2 klar hervorgeht.

† Periodica Polytechnica El. VI/1.

Beispiel: Es soll die Leerlaufimpedanz des unteren Stababschnittes an dem im vorangegangenen Beispiel berechneten L-Stab bestimmt werden.

Zu

$$\alpha_1 h_1 = \xi_1 = 1,12$$

kann der Kurve

$$\bar{z}_{\bar{u}} = 0,71 + j 0,505.$$

entnommen werden und mit dem Absolutwert der charakteristischen Impedanz

$$Z_0 = \sqrt{2} \cdot 0,373 \cdot 10^{-4} \Omega$$

oder mit $R_e h$ hat man

$$Z_{\bar{u}} = \bar{z}_{\bar{u}} Z_0 = (0,377 + j 0,268) \cdot 10^{-4} \Omega.$$

Besonders schnell kann man mit den Kurven der Abb. 3 zu einem Ergebnis gelangen, wenn die Berechnung des zusammengesetzten Stabes *graphisch* erfolgt.

Beispiel: Unter Zugrundelegung der Ersatzschaltung des L-Stabes im Sinne des vorangegangenen Beispiels (vergl. Abb. 1) wurde die Impedanz des Stabes graphisch ermittelt. Es wurde hierbei folgender Berechnungsvorgang befolgt (Abb. 3 rechts):

Zu $h_1 \alpha_1 = 1,12$ bzw. $h_2 \alpha_2 = 0,675$ wurden die Vektoren $\bar{z}_{\bar{u}1}$, \bar{z}_{a2} , \bar{z}_{c2} , und nachdem diese den Absolutwerten der charakteristischen Impedanzen entsprechend verlängert waren, die Vektoren $\bar{Z}_{\bar{u}1}$, \bar{Z}_{a2} und \bar{Z}_{c2} aufgetragen.

Auf Grund der Ersatzschaltung wurde dann die Resultierende \bar{Z}_p der Parallelschaltung $\bar{Z}_{\bar{u}1} + \bar{Z}_{a2}$ und \bar{Z}_{c2} konstruiert. Durch Hinzufügen von \bar{Z}_{a2} wurde die resultierende Impedanz Z des Stabes ermittelt.

Der Abbildung gemäß ist $\bar{Z} = (0,54 + j 0,81) 10^{-4} \text{ Ohm}$.

Jeder Stababschnitt kann als ein Vierpol angesehen werden, dessen Belastungsimpedanz (Z_t) der resultierenden Impedanz der unter ihnen befindlichen Stababschnitte entspricht. Im einfachen Fall des L-Stabes bildet z. B. der untere Stab die Belastungsimpedanz des Vierpols der oberen Stababschnitte (Abb. 1).

Dergestalt können zur Impedanzberechnung z. B. bei einem L-Stab die in der Vierpoltheorie zur Berechnung der Eingangsimpedanz dienenden Formeln angewendet werden.

Mit der Leerlaufimpedanz $\bar{Z}_{\bar{u}}$ und der Kernimpedanz \bar{M} läßt sich schreiben:

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{\bar{u}} - \frac{\bar{M}^2}{\bar{Z}_{\bar{u}} + \bar{Z}_t} \quad (17)$$

$$\bar{M}^2 = \bar{Z}_{\bar{u}}(\bar{Z}_{\bar{u}} - \bar{Z}_t), \quad (18)$$

während für die T-Schaltung

$$\bar{M} = \bar{Z}_c \tag{19}$$

gilt.

Beispiel: Mit den Kennwerten des vorangegangenen Beispiels sind das Übertragungsmaß und die Impedanzen des den oberen Stababschnitt ersetzenden Vierpols in 10^{-4} -Ohm:

$$\begin{aligned} \bar{g} &= 1,12 + j 1,12 \\ \bar{Z}_0 &= 0,75 + j 0,75 \\ \bar{Z}_{ü} &= 0,756 + j 0,54 \\ \bar{Z}_c &= 0,596 - j 0,26, \end{aligned}$$

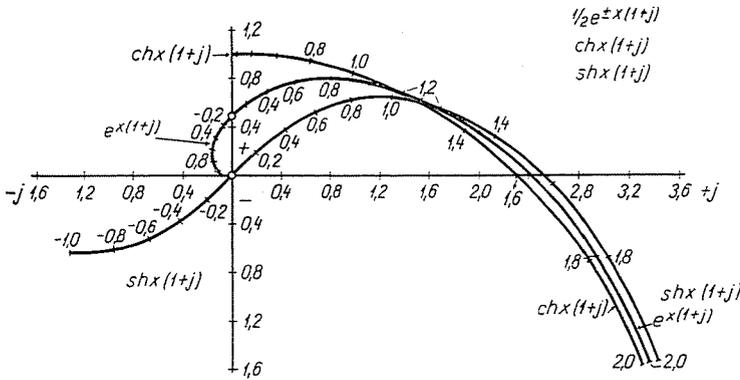


Abb. 4

wogegen sich die Impedanz des unteren Stabes zu

$$\bar{Z}_t = 0,38 + j 0,27$$

schreibt.

Auf Grund von Gleichung (17) gilt

$$\bar{Z} = 0,716 + j 0,84.$$

Die Berechnungen lassen sich auch hier am schnellsten auf graphischem Wege durchführen.

Benötigt man bei der Berechnung *der Stromverteilung* nur die Gesamtströme der einzelnen Abschnitte oder wünscht man nur die Berechnung der Stromverteilung der einzelnen Abschnitte unter Zugrundelegung der vorangegangenen Publikation in Angriff zu nehmen, eignet sich die Ersatzschaltung oder die Vierpoltheorie auch hierfür sehr gut.

Die Werte der Elemente der Ersatzschaltung lassen sich entweder auf Grund der Formeln oder mit Hilfe der Abb. 3 ermitteln. Anhand der einzelnen bekannten Längs- und Querimpedanzen findet die Berechnung in der bekannten Weise statt.

Beispiel: Wählt man den Strom des unteren Stabes im vorangegangenen Beispiel zu 1 A, wird durch diesen in der Reihenschlußimpedanz

$$\bar{Z}_{c1} + \bar{Z}_{a1} + \bar{Z}_{a2} = (0,538 + j1,07) \cdot 10^{-4} \Omega$$

eine Spannung erzeugt, die durch die Impedanz \bar{Z}_{c2} einen Strom der Größe

$$0,102 + j1,84 \text{ A}$$

fließen zu lassen vermag.

Der totale Strom ist

$$\bar{I} = 1,102 + j1,84 \text{ A,}$$

das Verhältnis der beiden Ströme hingegen

$$\frac{\bar{I}}{\bar{I}_a} = 2,142 \cdot e^{j59^\circ} \text{ A.}$$

Die Verteilung der Ströme des L -Stabes kann man anhand der Formeln für den impedanzbelasteten Vierpol, z. B. auf Grund der Beziehungen

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_b}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_i} e^{-\bar{g}} \quad (20)$$

oder

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = \frac{1}{\text{ch}\bar{g} + \frac{\bar{Z}_i}{\bar{Z}_0} \text{sh}\bar{g}} \quad (21)$$

berechnen.

In diesen Gleichungen steht der Index 2 für den Sekundärstrom, der Index 1 für den Primärstrom. \bar{I}_1 ist mithin der gesamte Stabstrom, \bar{I}_2 der Strom des unteren Abschnittes, während sich die übrigen Größen — \bar{Z}_0, \bar{g} — auf den belasteten Vierpol, also auf den oberen Abschnitt beziehen.

Die Gleichung (21) ermöglicht eine besonders schnelle Berechnung, wenn man analog den bisherigen Verfahren die Kurven $\text{ch}(1 + j)\xi$ bzw. $\text{sh}(1 + j)\xi$ (siehe Abb. 4) benützt. \bar{Z}_i/\bar{Z}_0 ist in der Regel aus der Berechnung der Impedanz bekannt.

Beispiel: Für den L -Stab des vorangegangenen Punktes gilt

$$\frac{\bar{Z}_t}{\bar{Z}_0} \equiv \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_{02}} = 0,433 - j 0,073.$$

Für die Werte $\bar{g} = \gamma_2 h_2 = 1,122 + j 1,122$ ergibt sich aus Abb. 4

$$\operatorname{ch} \bar{g} = 0,73 + j 1,122$$

$$\operatorname{sh} \bar{g} = 0,60 + j 1,152,$$

woraus unter Anwendung von (21)

$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{\bar{I}}{\bar{I}_a} = 1,101 + j 1,835$$

folgt.

Die Beziehung (21) eignet sich bei zusammengesetzten Stäben zur Berechnung des Stromes in jedem beliebigen Abschnitt, wenn Impedanz und Strom der unter dem betreffenden Abschnitt liegenden Stäbe bekannt sind.

Die Ströme des gegossenen Doppelkäftigstabes lassen sich z. B. in der Weise berechnen, daß zunächst der aus dem unteren Stab und dem Steg zusammengesetzte Stab als die Belastung des oberen Stabes betrachtet wird, worauf man den derart erhaltenen Belastungsstrom auf die beiden unteren Abschnitte verteilt.

Im Läufer mit nicht vom Hauptstrom durchflossenen Stromverdrängungsstäben wird nur der untere Arbeitsstab mit einem Ring kurzgeschlossen, während die Enden — evtl. die Windungen des über ihm befindlichen Stabes — offen sind, so daß deren resultierender Strom gleich Null ist. Man bezweckt damit, infolge der Wirbelströme, die das vom unteren Arbeitsstab erzeugte Streufeld darin induziert, die Impedanz des Arbeitsstabes zu ändern und somit ähnliche Anlaßverhältnisse zu schaffen, wie sie bei den Tiefnut- und Doppelkäftigarten bestehen.

Diese Anordnung kann als eine solche zweischichtige Wicklung aufgefaßt werden, bei der der resultierende Strom der oberen Schicht gleich Null ist, so daß diese kein eigenes Streufeld erzeugt. Derart kann sie vom theoretischen Gesichtspunkt aus als ein Übergangs- oder Vorbereitungstyp zur Berechnung der hintereinander geschalteten (normalen) Stäbe angesehen werden.

Im Falle *eines einzigen, alleinstehenden Leiters* wird die einseitige Stromverdrängung durch das eigene Streufeld des Leiters herbeigeführt (Abb. 5). Bei gleichmäßiger Stromverteilung nimmt sie linear zu. Bei zwei übereinander liegenden, hintereinander geschalteten Stäben bleibt die Stromverdrängung im unteren Stab durch den oberen Stab unbeeinflußt, weil Wirbelströme nur

durch die teilweise verketteten Flüsse induziert werden. Das der gleichmäßigen Stromverteilung zugeordnete Streufeld des oberen Stabes besteht bereits aus zwei Teilen, aus der durch die Durchflutung des unteren Stabes erzeugten konstanten und aus der vom Eigenstrom des Stabes hervorgerufenen linear zunehmenden Komponente (Abb. 7a).

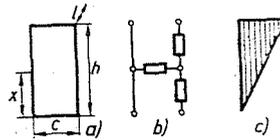


Abb. 5

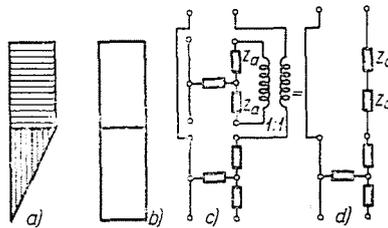


Abb. 6

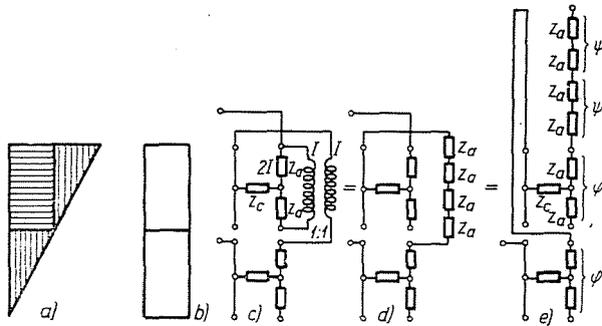


Abb. 7

Die Stromverdrängung kommt hier unter dem gemeinsamen Einfluß der beiden Komponenten zustande, und zwar dank dem konstanten Feld des unteren Stabes ist sie nicht ein- sondern zweiseitig, das heißt die Stromdichte steigt sowohl am oberen als auch am unteren Teil des Stabes an. Zwischen dem unteren und dem oberen Stab ist bei Reihenschaltung einerseits eine galvanische, andererseits eine induktive Verbindung vorhanden.

Beim nicht vom Hauptstrom durchflossenen *Stromverdrängungsstab* fehlt das Eigenfeld des oberen Stabes. Die Feldverteilung gestaltet sich demnach der Abb. 6a gemäß. Zwischen den beiden Stäben besteht nur eine in-

duktive Verkettung, die durch einen idealen Transformator mit einer Übersetzung von 1 : 1 symbolisiert ist.

Die unter dem Einfluß des oberen Stabes zustande gekommene Impedanzänderung des Arbeitsstabes kann also auf Grund der Ersatzschaltung *c* berechnet werden. Die den einzelnen Stäben entsprechenden Leitungen sind durch ihre äquivalenten *T*-Schaltungen ersetzt. Die in Abb. 6*d* enthaltene Ersatzschaltung ist mit der so gewonnenen gleichwertig, und demnach schreibt sich die durch den oberen Stab erzeugte zusätzliche Impedanz zu

$$\bar{Z}_j = 2\bar{Z}_a. \quad (22)$$

Die durch den Stromverdrängungsstab erzeugte zusätzliche Impedanz beträgt der vorangegangenen Publikation gemäß

$$\bar{Z}_j = 2 \left[\bar{Z}_0 \operatorname{cth} \bar{g}_m - \bar{Z}_0 \frac{1}{\operatorname{sh} \bar{g}_m} \right]. \quad (23)$$

Wie ersichtlich, ist die Gesamtimpedanz des Arbeitsstabes gleich der Summe seiner soeben berechneten und der durch den Stromverdrängungsstab erzeugten zusätzlichen Impedanz. Liegen die Stäbe nicht unmittelbar aufeinander, ist der so berechneten Impedanz die Reaktanz zu addieren, die der Streuung des durch Leiter nicht ausgefüllten Abschnittes zugeordnet ist.

Sind die in der Nut übereinander liegenden *beiden Stäbe in Reihe geschaltet*, fließt also im oberen Stab derselbe Strom wie im unteren, so besteht zwischen ihnen infolge der Reihenschaltung eine galvanische und durch den unteren Stab erzeugten Feldes auch eine gegenseitige induktive Verbindung. Die Verteilung des Feldes und die Ersatzschaltung sind in den Abb. 7*a* und *c* dargestellt. Die beiden leerlaufenden Vierpole sind einerseits in Reihe geschaltet, andererseits wird der Einfluß des konstant großen Streufeldes durch den idealen Transformator mit einer Übersetzung von 1 : 1 ersetzt.

Die Schaltung *d*, aus welcher der Transformator eliminiert wurde, ist hinsichtlich der resultierenden Impedanz mit der Schaltung *c* gleichwertig. Der Spannungsabfall an der Sekundärseite des Transformators beläuft sich auf $2 \bar{I} \bar{Z}_a + \bar{I} \bar{Z}_a = \bar{I} 3 \bar{Z}_a$. Der Spannungsabfall an der Primärseite ist gleich groß. Nach dem Wegfall des Transformators kann diese Spannung mit der Reihenimpedanz $3 \bar{Z}_a$ in Betracht gezogen werden. Mit dem Weglassen des Transformators nimmt der obere Längsimpedanzstrom der *T*-Schaltung von $2 I$ auf I ab. Die Differenz wurde mit der vierten Reihenimpedanz Z_a ausgeglichen.

Für drei Stäbe ist die Ersatzschaltung und die aus dieser hergeleitete Schaltung ohne gegenseitige Induktivität aus Abb. 8 ersichtlich. Hier erscheinen an der Primärseite der einzelnen Transformatoren die Spannungsabfälle

$(3 + 2) \bar{I} \bar{Z}_a$ und die Abnahme auf der Primärseite beträgt nach dem Fortfall des Transformators $2 \bar{I} \bar{Z}_a$. Somit macht die Zahl sämtlicher Reihenimpedanzen $12 \bar{Z}_a$ aus.

Jede beliebige hyperbolische Reliefart eignet sich auch zur Berechnung der Impedanzen von Reihenschlußstäben. Die Leerlaufimpedanz $\bar{Z}_a + \bar{Z}_c = \bar{Z}_u$ kann den Diagrammen *th*, der zur Berechnung von \bar{Z}_j erforderliche Wert *shyh* dem Diagramm *sh* entnommen werden. Damit hat man die Möglichkeit,

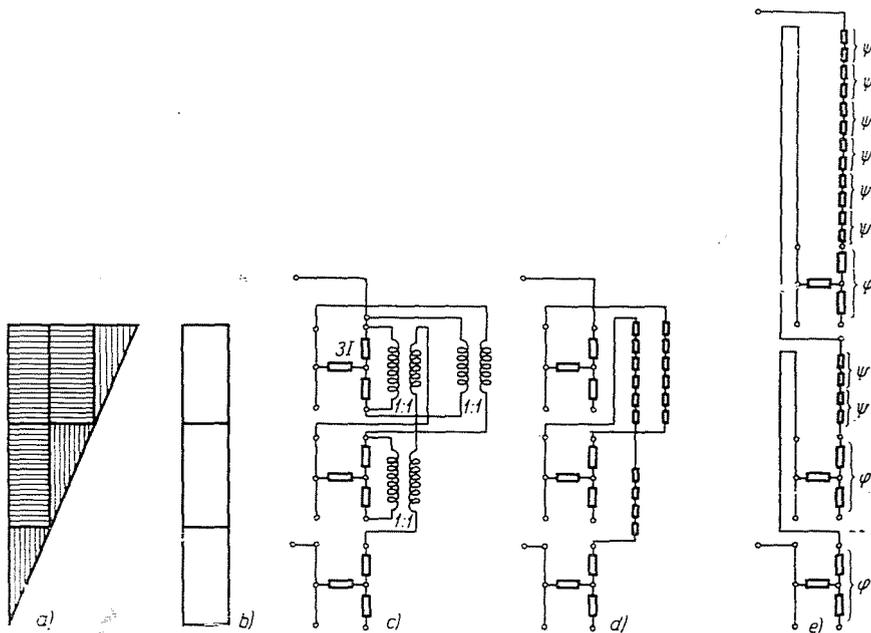


Abb. 8

bei beliebigen Schichtzahlen die Impedanz jeder beliebigen Schicht oder auch die der Gesamtwicklung und anhand der so ermittelten Impedanzen auch die Faktoren der Widerstandszunahme bzw. der Reaktanzabnahme zu berechnen. Die letzteren sind allerdings für gewöhnlich belanglos, weil man den Wechselstromwiderstand selbst und die Reaktanz zu suchen pflegt.

Die Berechnung der Stromverteilung ist bei den in Reihe geschalteten Stäben in der Praxis allgemein unnötig.

Außerordentlich bequem läßt sich die Impedanz mit Hilfe der Kurven in Abb. 3 berechnen.

Die Bestimmung der Impedanzen und der Beiwerte k_r , k_x wird für zwei übereinander befindliche Stäbe gezeigt werden; hieraus folgt die Berechnung von mehreren Schichten unter Zugrundelegung der in vorangegangenem besprochenen Ersatzschaltungen sinngemäß.

Für die Impedanzen und für die Faktoren k_r und k_x der unteren Schicht 1 und oberen Schicht 2 kann man unter Anwendung von (1) und (23) im Sinne der Abbildungen 6d und 7e schreiben:

$$\bar{Z}_1 = Z_{01} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \operatorname{cth}(1+j)ah_1 \quad (24)$$

$$\bar{Z}_2 = Z_{02} \frac{1+j}{\sqrt{2}} \left\{ \operatorname{cth}(1+j)ah_2 + 4 \left[\operatorname{cth}(1+j)ah_2 - \frac{1}{\operatorname{sh}(1+j)ah_2} \right] \right\}. \quad (25)$$

Die in der eckigen Klammer von (25) vorkommenden Funktionswerte und diejenigen von $\frac{1+j}{\sqrt{2}} \operatorname{cth}(1+j)ah$ können dem Diagramm der Abb. 3 entnommen werden. Letztere sind auf der rechts liegenden Kurve, die anderen zwischen den entsprechenden Punkten der beiden Kurven zu finden.

Die derart abgelesenen Werte sind im Sinne der Beziehung

$$\bar{Z}_0 = \sqrt[4]{45^\circ} \sqrt{2} ah R_e \quad (26)$$

mit dem Absolutwert der charakteristischen Impedanz

$$Z_0 = R_e ah \sqrt{2} \quad (27)$$

zu multiplizieren.

Aus den abgelesenen Funktionswerten können auch die *Widerstandszunahme* und die *Reaktanzabnahme* leicht ermittelt werden. Für die untere Schicht gilt mit der Beziehung (27) und mit

$$X_e = (ah)^2 \frac{2}{3} R_e = \xi^2 \frac{2}{3} R_e, \quad (28)$$

daß

$$\underline{k}_r = \frac{\bar{z}_{re}}{R_e} = \frac{\xi \sqrt{2} \bar{z}_{re}}{R_e} \quad (29)$$

und

$$\underline{k}_x = \frac{\bar{z}_{im}}{\xi^2 \frac{2}{3} R_e} = \frac{3}{\sqrt{2} \xi} \bar{z}_{im}, \quad (30)$$

wobei \bar{z}_{re} bzw. \bar{z}_{im} die reellen bzw. imaginären Teile der den Kurven entnommenen, um 45° verdrehten normalisierten Impedanz bedeuten.

Die Berechnung der Widerstandszunahme in der zweiten oder in irgendeiner beliebigen Schicht erfolgt ebenfalls anhand der Gleichung (29). Bei der

Berechnung des Reaktanzabnahmefaktors ist der geänderte Wert der der gleichmäßigen Stromverdrängung zugehörigen Reaktanz zu berücksichtigen. Aus der Flußverteilung der Abb. 7a geht hervor, daß das Feld des oberen Stabes die Reaktanz der Wicklung um das Siebenfache der Reaktanz des unteren Stabes erhöht. Beim oberen Stab wird nämlich durch das Eigenfeld eine mit $\frac{1}{3}$ der Stabhöhe verhältnismäßige Flußverkettung erzeugt, während das vom unteren Stab erzeugte Feld eine Flußverkettung hervorruft, die der Hälfte der Stabhöhe proportional ist. Das gesamte Feld hingegen, welches das Dreifache des Flusses des unteren Stabes ausmacht, ist mit dem ganzen unteren Stab zur Gänze verkettet. Die Gesamtverkettung ist demnach der Summe $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = 2 \frac{1}{3}$ proportional. Dies beläuft sich aber auf das $2 \frac{1}{3} / \frac{1}{3} = 7$ fache der Verkettung des unteren Stabes.

Beispiel: Obgleich wegen der kritischen Leiterhöhe größere Werte als $\xi = 1,32$ nicht üblich sind, soll aus Gründen des bequemeren Vergleiches eine aus zwei gleich hohen ($h_1 = h_2$) Schichten bestehende Wicklung untersucht werden, wobei $\xi = 1,6$.

Für die untere Schicht ergibt sich aus dem Diagramm

$$\bar{z} = 0,645 + j 0,662$$

$$k_r = \xi \sqrt{2} \bar{z}_{re} = 1,46 \quad \text{nach der Kurve aus RICHTER,} \\ \text{Band I.: } \sim 1,46$$

$$k_x = \frac{3}{\sqrt{2} \xi} \bar{z}_{im} = 0,878 \quad \text{nach RICHTER,} \\ \text{Band I.: } \sim 0,875$$

Für die obere Schicht:

$$\bar{z} = 0,645 + j 0,662 + 4 (0,396 + j 0,951) = 2,229 + j 4,462$$

$$k_1 = \xi \sqrt{2} \bar{z}_{re} = 5,04 \quad \text{nach der Kurve aus RICHTER,} \\ \text{Band I.: } \sim 5,00$$

$$k_x = \frac{3}{\sqrt{2} \xi} \bar{z}_{im} \frac{1}{7} = 0,845 \quad \text{nach der Kurve aus RICHTER,} \\ \text{Band I.: } \sim 0,844$$

In Abb. 9 sind auf Grund der vorstehenden Ausführungen mit Hilfe der Kurven 3 für zwei Schichten der Verlauf der Impedanzänderung in der unteren und oberen Schicht sowie die Änderung der Gesamtimpedanz der beiden Schichten in Abhängigkeit von der reduzierten Leiterhöhe ξ aufgetragen.

getragen, erhält man die Hochlaufkurve, die man in der üblichen Weise auswertet [2].

Die Ersatzschaltungen und die gezeigten Diagramme bieten eine gute Übersicht über die physikalischen Verhältnisse und ermöglichen auch dem Starkstromingenieur, der in der Behandlung des elektromagnetischen Feldes im allgemeinen etwas unsicher ist, aber die Ersatzschaltungen vorzüglich beherrscht, sich in den Fragen der Stromverdrängung eine gewisse Sicherheit anzueignen und seine Kenntnisse auf Grundlagen aufzubauen, die auch das physikalische Bild ausdrücken und auch die Übersicht bzw. Berechnung der qualitativen oder quantitativen Verhältnisse jener Fälle, die von den allgemeinen abweichen, möglich machen.

Überdies eignen sich die Ersatzschaltungen auch zur außerordentlich einfachen und übersichtlichen Herleitung der Field-Emdeschen grundlegenden Gleichungen, bringen sie doch, was ihren Inhalt anbelangt, dasselbe zum Ausdruck wie jene.

Im Falle *eines einzigen Stabes* kann die Gleichung (1) für die Impedanz mit der Bezeichnung $\bar{\gamma}h = ah + jah = \xi + j\xi$ und nach entsprechender Änderung in der Form

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= Z_0 \operatorname{cth}(\xi + j\xi) = \\ &= (A_0 + jA_0) \left(\frac{2\operatorname{sh}\xi \operatorname{ch}\xi}{\operatorname{ch}2\xi - \operatorname{cos}2\xi} - j \frac{2\operatorname{sin}\xi \operatorname{cos}\xi}{\operatorname{ch}2\xi - \operatorname{cos}2\xi} \right) = \\ &= A_0 \frac{\operatorname{sh}2\xi + \operatorname{sin}2\xi}{\operatorname{ch}2\xi - \operatorname{cos}2\xi} + jA_0 \frac{\operatorname{sh}2\xi - \operatorname{sin}1\xi}{\operatorname{ch}2\xi - \operatorname{cos}2\xi}\end{aligned}\quad (31)$$

geschrieben werden.

Mit den Beziehungen

$$\frac{A_0}{R_e} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_0\rho}{2} \frac{l}{c}}}{\frac{\rho}{\operatorname{ch}} \frac{l}{\operatorname{ch}}} = \frac{1}{\xi} \quad (32)$$

und

$$\frac{A_0}{X_e} = \frac{A_0}{\xi^2 \frac{2}{3} R_e} = \frac{3}{\xi} \quad (33)$$

erhält man für die Widerstandszunahme bzw. für die Reaktanzabnahme die bekannten Gleichungen

$$k_r = \xi \frac{\operatorname{sh}2\xi + \operatorname{sin}2\xi}{\operatorname{ch}2\xi - \operatorname{cos}2\xi} = q(\xi) \quad (34)$$

und

$$k_x = \frac{3}{2\xi} \frac{\text{sh}2\xi - \sin 2\xi}{\text{ch}2\xi - \cos 2\xi} = \varphi'(\xi). \quad (35)$$

R_e und X_e sind der der gleichmäßigen Stromverteilung zugehörige Widerstand bzw. die ihr zugehörige Reaktanz.

Bei einem einzigen Leiter wird die Stromverdrängung ausschließlich durch sein eigenes Streufeld erzeugt.

Für die Läuferbauart mit nicht vom Hauptstrom durchflossenem Stromverdrängungsstab gilt mit den vorstehenden Bezeichnungen

$$\bar{Z}_j = 2A_0 \left(\frac{\text{sh}\xi - \sin\xi}{\text{ch}\xi + \cos\xi} \right) + j2A_0 \left(\frac{\text{sh}\xi + \sin\xi}{\text{ch}\xi + \cos\xi} \right), \quad (36)$$

woraus mit den vorstehend schon angewendeten Beziehungen für die durch den Stromverdrängungsstab erzeugte Widerstandszunahme bzw. für die Reaktanzabnahme

$$k_v = 2\xi \frac{\text{sh}\xi - \sin\xi}{\text{ch}\xi + \cos\xi} = \psi(\xi) \quad (37)$$

$$k_x = \frac{3}{\xi} \frac{\text{sh}\xi + \sin\xi}{\text{ch}\xi + \cos\xi} = \psi'(\xi) \quad (38)$$

folgt.

Für zwei hintereinander geschaltete Stäbe stellt Abb. 7c die Konstruktion der bekannten Emdeschen Formeln

$$k_{rp} = \varphi + (p^2 - p) \psi = \varphi + \psi + \psi \quad (39)$$

$$k_{xp} = \varphi' + \psi' + \psi' \quad (40)$$

anschaulich dar, e hingegen ihr Endergebnis. Die Widerstandszunahme — bzw. Reaktanzabnahme — der Schicht 2 setzt sich aus drei Teilen zusammen. Der erste (φ) stellt den Einfluß des Eigenfeldes dar und entspricht der Wärme, die entstehen würde, wenn im unteren Leiter kein Strom fließen würde, der andere (ψ) ist der Einfluß des unteren Leiterfeldes, der auftritt, wenn der resultierende Strom des oberen Stabes gleich Null ist, während das dritte Glied (ψ) das Ergebnis des gemeinsamen Vorhandenseins der beiden anderen bildet. Aus Abb. b ist klar zu ersehen, daß es sich hierbei um die gemeinsame Resultierende der Reihenschaltung und des Transformatoreinflusses handelt.

Bei drei Stäben beträgt die Zahl sämtlicher Reihenschlußimpedanzen gemäß Abb. 8d und e $12 \bar{Z}_a$, was 6ψ entspricht. Hiervon sind 2ψ der Einfluß der unteren, 4ψ derjenige der zweiten Schicht.

In den Schaltungen lassen sich die physikalischen Verhältnisse und die Einflüsse der einzelnen Teilfaktoren vorzüglich überblicken.

Zusammenfassung

Mit Hilfe von Ersatzschaltungen ist eine schnelle Berechnung der Impedanz und Stromverteilung von zusammengesetzten parallelen-, von Hauptstrom nicht durchflossenen Stromverdrängungs- und von normalen (Serien-) Stäben möglich. Die Berechnung wird besonders bequem durch Anwendung von Funktionenkurven, die sich anhand der Ersatzschaltungen konstruieren lassen. Die Ersatzschaltungen und Kurven bieten für den Starkstromingenieur, der in der Behandlung des elektromagnetischen Feldes im allgemeinen etwas unsicher ist, ein anschauliches Mittel zur leichten und sicheren Orientierung in den Fragen der Stromverdrängung.

Schrifttum

1. RETTER, J. G.: Die Berechnung der Läuferstäbe von Stromverdrängungsmotoren. Periodica Polytechnica—Elektrotechnik. Vol. 2. No 3.
2. LENGYEL, Z.: Der Entwurf von Spezialkäfigläufern (M. T. K. I. 1955).

J. G. RETTER, Budapest, XI., Egry József u. 18., Ungarn.