

# AUSGANGS- UND ANFANGSWERTE IN ÜBERMÄSSIG IDEALISIERTEN ELEKTRISCHEN NETZEN

Von

Gy. FODOR

Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 13. April 1961)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. SIMONYI

## 1. Ausgangs- und Anfangswerte

Bei der Berechnung der Übergangserscheinungen in linearen elektrischen Netzen spielen die sogenannten *Anfangswerte* eine grundlegende Rolle. Unter Anfangswerten sind jene Werte der veränderlichen Größen zu verstehen, die sich im Moment  $t = +0$ , d. h. im Augenblick des Einsetzens der Übergangserscheinung ergeben. Sie lassen sich aus den im Augenblick der Schaltung ( $t = -0$ ) gültigen Werten auf Grund der einfachen Regel ermitteln, daß sich der Strom der Induktivitäten und die Spannung der Kondensatoren nicht sprunghaft verändern kann. Im gegenteiligen Fall nämlich würden die induzierte Spannung bzw. der kapazitive Strom

$$u_L = N \frac{di_L}{dt} \quad \text{bzw.} \quad i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (1)$$

im Augenblick  $t = 0$  unendliche Werte annehmen. Einer zweiten möglichen Begründung gemäß hätte eine sprunghafte Veränderung auch eine sprunghafte Änderung der Induktivitäts- bzw. der Kondensatorenergie

$$w_L = \frac{1}{2} Li_L^2 \quad \text{bzw.} \quad w_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 \quad (2)$$

zur Folge, was eine unendlich hohe Leistung beanspruchen würde.

Die Anfangswerte können mithin aus den Beziehungen

$$i_L(+0) = i_L(-0), \quad u_C(+0) = u_C(-0) \quad (3)$$

errechnet werden. Bezeichnet man die im Augenblick ( $t = -0$ ) des Einsetzens der Übergangserscheinung gültigen Werte als *Ausgangswerte*, lassen sich die obigen Beziehungen so formulieren, daß die gesuchten Anfangswerte der Induktivitätsströme und der Kondensatorspannungen mit den als gegeben anzusehenden Ausgangswerten übereinstimmen. Diese Regeln geben die Handhabe zur Bestimmung von Strom und Spannung der übrigen Elemente des Netzes.

## 2. Problemstellung

Die hier dargelegte Regel trifft für *wirkliche* Systeme unbedingt zu, dagegen vermag die notgedrungene Vereinfachung, d. h. die *Idealisierung* zu dem Ergebnis zu führen, daß die zitierten Zusammenhänge für idealisierte Systeme ihre Gültigkeit verlieren.

Einem solchen Fall findet man sich beispielsweise gegenübergestellt, wenn man die impulsförmige Klemmenspannung mit einem unendlich kurzen, jedoch gleich intensiven Impuls, d. h. mit einem Dirac-Impuls annähert. Substituiert man den  $T$  langen Spannungsimpuls mit der Amplitude  $U_0$  durch die »Funktion«  $u(t) = U_0 T \delta(t)$ , dann ergibt sich z. B. in einem in Reihe

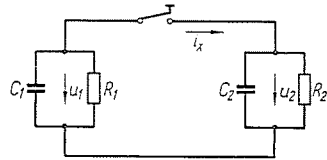


Abb. 1. Parallelschaltung verlustbehafteter Kondensatoren. Das System ist übermäßig idealisiert, weil es den Widerstand und den Selbstinduktionskoeffizienten der Verbindungsleitungen unberücksichtigt läßt

geschalteten  $R$ — $L$ -Kreis bei einem Ausgangs-Stromwert von  $i(-0) = 0$  für den Anfangswert des Stromes nicht der Nullwert, vielmehr gilt für ihn  $i(+0) = U_0 T/L$ . Es öffnet sich damit ein Problemkreis, der beispielsweise durch konsequente Anwendung der Laplace-Transformation einfach behandelt werden kann [1]. Das Wesen der Methode soll im folgenden Abschnitt erörtert werden.

Ganz ähnliche Probleme ergeben sich jedoch auch dann, wenn man nicht die Klemmenspannung (oder den Quellenstrom des Stromgenerators), sondern das Netz übermäßig idealisiert. Als Beispiel möge der — später noch zu behandelnde — Fall gemäß Abb. 1 dienen. Legt man den verlustbehafteten Kondensator mit der Kapazität  $C_1$  im Moment  $t = 0$  an den gleichfalls verlustbehafteten Kondensator  $C_2$ . Der erste Kondensator habe in dem der Schaltung vorangehenden Augenblick die Spannung  $U_0$ , während der zweite ungeladen ist. Im Bereich  $t > 0$  wird die gemeinsame Spannung  $u$  der beiden Kondensatoren mit der Zeitkonstante  $\tau = R_0 C_0$  offenbar exponentiell absinken, wobei  $R_0 = R_1 \times R_2$  und  $C_0 = C_1 + C_2$ . Von welchen Spannungswerten nimmt nun dieser Vorgang seinen Anfang? Im Sinne der Regel (3) trachtet der erste Kondensator die Spannung  $U_0$ , der zweite hingegen die Ausgangsspannung Null zu halten, doch kann der Anfangswert der Spannung mit keinem dieser Spannungswerte übereinstimmen.

In diesem einfachen Fall verursacht es keine sonderlichen Schwierigkeiten, den Anfangswert der Spannung auf Grund physikalischer Überlegun-

gen zu bestimmen, denn es muß für sämtliche im System gespeicherte getrennte Ladungen der Anfangswert dem Ausgangswert gleich sein, d. h. es muß die Gleichung

$$(C_1 + C_2) \cdot u(+0) = C_1 U_0$$

erfüllt sein.

Der Anfangswert der gemeinsamen Spannung schreibt sich mithin zu

$$u(+0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0,$$

woraus sich die beachtenswerte Tatsache ergibt, daß der Anfangswert der im System gespeicherten Energie unter ihrem Ausgangswert liegt, denn es gilt

$$w(-0) = \frac{1}{2} C_1 U_0^2,$$

$$w(+0) = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) u^2(+0) = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

$$\Delta w = w(-0) - w(+0) = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Der doppelte Widerspruch erklärt sich offenbar daraus, daß insofern ein übermäßig idealisiertes System gewählt wurde, als der Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Verbindungsleitung unberücksichtigt blieben. In Wirklichkeit ist die auf dieser auftretende Spannung gerade so groß, daß unverändert  $u_1(+0) = u_1(-0)$  und  $u_2(+0) = u_2(-0) = 0$  ist. Offenbar werden die beiden Spannungen den Wert von

$$u(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = R_0 C_0$$

um so rascher erreichen, je niedriger der Leitungswiderstand  $R_x$  und der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  liegen. Hierbei stimmt die Energie, die sich in der Verbindungsleitung zu Wärme umwandelt, eben mit der »verschwundenen« Energie  $\Delta w$  überein. Ist mithin im Grenzfall  $R_x = 0$  und  $L = 0$ , dann geht dieser Vorgang unendlich rasch vor sich, und ebenso unendlich rasch kommt es auch zur Energiedissipation in der widerstandsfreien Leitung.

Unsere Vorstellung läßt sich also so formulieren, daß die Leitungsparameter einen überaus raschen, »subtransienten« Vorgang auslösen, der um so schneller beendet ist, je niedriger der Wert der Leitungsparameter liegt. Ihre völlige Vernachlässigung ergibt mithin qualitativ in jedem Fall, quantitativ jedoch erst von den relativ kleinen Werten des Quotienten  $t/\tau$  angefangen

richtige Werte. Wie später noch zu sehen sein wird, treffen unsere primitiven Gedankengänge nicht ganz zu.

Das Problem hat somit zwei Seiten. Einerseits bedarf es eines mathematischen Formalismus, der anhand der bekannten Ausgangswerte den ganzen Vorgang einschließlich der Anfangswerte beschreibt, so daß sie also nicht auf Grund physikalischer Überlegungen separat bestimmt zu werden sind. Andererseits taucht die Frage auf, inwieweit die derart ermittelte, asymptotisch zu nennende Lösung die tatsächlichen Verhältnisse richtig beschreibt. Auf diese letztere Frage läßt sich offenbar keine allgemein gültige Antwort geben, vielmehr können bloß Schlüsse aus konkreten Beispielen gezogen werden.

### 3. Mathematischer Formalismus

Im streng mathematischen Sinne ist die Ableitung einer unstetigen Funktion in den Unstetigkeitspunkten undefinierbar. In der technischen Praxis betrachtet man jedoch die über Unstetigkeiten erster Art verfügenden, sonst

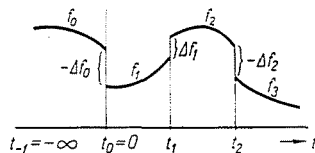


Abb. 2. Stückweise stetig und differenzierbare Funktion mit rechts- und linksseitigen Grenzwerten

aber überall differenzierbaren Funktionen im verallgemeinerten Sinne als an jeder Stelle differenzierbar. Mit anderen Worten bedeutet dies so viel, daß der Dirac-Impuls nach Art gewöhnlicher Funktionen behandelt werden kann. Zur Unterscheidung soll im weiteren der im gewöhnlichen Sinne gedeutete Differentialquotient einer Funktion  $f(t)$  mit  $f'(t)$ , seine *verallgemeinerte Ableitung* hingegen mit  $f''(t)$  bezeichnet werden.

Der grundlegende Zusammenhang für die verallgemeinerte Derivierte schreibt sich zu

$$f'(t) = \delta(t), \quad (4)$$

d. h. die Ableitung der Einheitsfunktion entspricht genau dem Dirac-Impuls. Mit Hilfe der Einheitsfunktion lassen sich die nur stückweise kontinuierlich und differenzierbaren Funktionen »in geschlossener Form« aufschreiben. Für die in Abb. 2 aufgetragene Funktion

$$f(t) = f_i(t), \quad t_{i-1} < t < t_i \quad (5)$$

gilt somit

$$f(t) = \sum_{i=0}^n [1(t - t_{i-1}) - 1(t - t_i)] f_i(t). \quad (6)$$

Nachweisbar läßt sich die verallgemeinerte Derivierte durch formale Anwendung der Regel für das Differenzieren von Produkten bestimmen, es gibt also

$$\begin{aligned} f'(t) = & \sum_{i=0}^n [1(t - t_{i-1}) - 1(t - t_i)] \dot{f}_i(t) + \\ & + \sum_{i=0}^n [\delta(t - t_{i-1}) - \delta(t - t_i)] f_i(t), \end{aligned} \quad (7)$$

während sich die Sprünge der Funktion zu

$$\Delta f_i = f(t_i + 0) - f(t_i - 0) = f_{i+1}(t_i) - f_i(t_i) \quad (8)$$

schreiben. Mit dieser Bezeichnung hat man schließlich

$$f'(t) = \dot{f}(t) + \sum_{i=0}^n \Delta f_i \delta(t - t_i). \quad (9)$$

Die Einführung der verallgemeinerten Ableitung hat den doppelten Vorteil, daß sich einerseits die Funktion anhand der bekannten verallgemeinerten Derivierten und eines einzigen bekannten Funktionswertes in der Form

$$f(t) = f(T) + \int_T^t f'(\tau) d\tau \quad (10)$$

rekonstruieren läßt, wobei unter Umkehrung von (4)

$$\int_T^t \delta(\tau - t_i) d\tau = \begin{cases} 1(t - t_i), & T < t_i \\ 0, & T > t_i, \end{cases} \quad (11)$$

während andererseits nachgewiesen werden kann [1], daß sich die Laplace-Transformierte der verallgemeinerten Ableitung mit der Bezeichnung

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p) \quad (12)$$

unabhängig von der Stelle und der Zahl ihrer Unstetigkeiten erster Art zu

$$\mathcal{L} f'(t) = pF(p) - f(-0) \quad (13)$$

schreibt. Für die Laplace-Transformierte der in gewöhnlichem Sinne gedeuteten Ableitung gilt demgegenüber der kompliziertere Zusammenhang

$$\mathcal{L} f(t) = pF(p) - f(+0) - \sum_{i=1}^n \Delta f_i e^{-pt_i}.$$

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden besteht darin, daß man gemäß (13) bloß den Ausgangswert  $f(-0)$  zu kennen braucht, während sich der Anfangswert  $f(+0)$  aus dem mathematischen Formalismus von selbst ergibt, womit auch die weiter oben aufgeworfene Frage beantwortet ist.

Die Laplace-Transformation bietet also die Handhabe dazu, auch übermäßig idealisierte Aufgaben zu lösen, da bloß die Ausgangswerte (d. h. die im Augenblick vor der Schaltung gültigen Werte) bekannt sein müssen.

#### 4. Einige Beispiele

a) Wir können uns nunmehr der Lösung der in Abb. 1 umrissenen Aufgabe zuwenden. Der Kirchhoffschen Knotenregel zufolge schreibt sich die Differentialgleichung des Systems zu

$$C_1 u_1' + \frac{1}{R_1} u_1 + C_2 u_2' + \frac{1}{R_2} u_2 = 0,$$

seine Ausgangswerte hingegen zu

$$u_1(-0) = U_0, \quad u_2(-0) = 0.$$

Im Bereich  $t > 0$  ist  $u_1 = u_2 = u$  und somit  $\mathcal{L} u_1 = \mathcal{L} u_2 = U(p)$ , und mit (13) hat man nach Transformierung der Differentialgleichung

$$C_1(pU - U_0) + \frac{1}{R_1} U + C_2(pU - 0) + \frac{1}{R_2} U = 0.$$

Von da ab verfolgt die Lösung den üblichen Weg, so daß man schließlich

$$u(t) = 1(t) U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} e^{-\delta t}$$

erhält, worin  $\delta = 1/R_0 C_0$ ,  $R_0 = R_1 \times R_2$ ,  $C_0 = C_1 + C_2$ . Als Anfangswert der Spannung hat man somit

$$u(+0) = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

wie wir dies bereits weiter oben festgestellt haben.

Ebenso läßt sich der Verbleib der »verschwundenen« Energie nachweisen. Tritt in der Leitung die Spannung  $u_x$  auf, dann wird  $u_x(-0) = U_0$  und  $u_x(+0) =$

= 0. Der an der Bruchstelle auftretende Wert kann als das arithmetische Mittel  $U_0/2$  angesehen werden, wie es bei der Entwicklung des Fourier-Integrals entsteht. Gelegentlich des Umschaltens, d. h. also in der Zeitspanne  $t = -0$ ,  $t = +0$  wird in der Leitung die Energie

$$W_x = \int_{-0}^{+0} u_x i_x dt = \int_{-0}^{+0} \frac{U_0}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_0 \delta(t) dt = \frac{1}{2} C_1 U_0^2 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

zu Wärme umgewandelt, ein Wert, der genau mit dem zuvor ermittelten Energieunterschied  $\Delta w$  übereinstimmt. In der als widerstandsfrei angesehenen

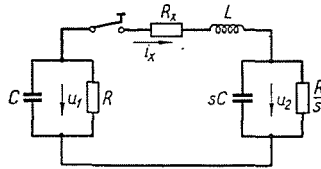


Abb. 3. Parallelschaltung verlustbehafteter Kondensatoren unter Berücksichtigung von Widerstand und Induktivität der Verbindungsleitungen

Leitung kommt es wegen des unendlich großen, dem Dirac-Impuls entsprechenden Stromes zur Dissipation einer Energie endlicher Größe.

Für Zwecke der späteren Untersuchung sollen hier die Endergebnisse auch für den Spezialfall  $R_1 = R$ ,  $C_1 = C$  und  $R_2 = R/s$ ,  $C_2 = sC$  aufgeschrieben werden, d. h. für den Fall, daß die beiden Kondensatoren die gleiche Zeitkonstante aufweisen:

$$u = U_0 \frac{1}{1 + s} e^{-\delta t}, \quad \delta = \frac{1}{RC}, \quad W_x = \frac{1}{2} \frac{s}{1 + s} C U_0^2.$$

b) Es wirft sich nun die Frage auf, inwieweit die soeben erhaltene Lösung eine physikalische Realität besitzt. In Abb. 3 sind der Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Verbindungsleitung berücksichtigt. Zur Vereinfachung des Rechnungsganges wurde überdies angenommen, daß  $R_2 = R/s$  und  $C_2 = sC$ , wenn  $R_1 = R$  bzw.  $C_1 = C$ .

Auf dieser Grundlage ergeben sich die Ausgangswerte zu

$$u_1(-0) = U_0, \quad u_2(-0) = 0, \quad i_x(-0) = 0.$$

Sie stimmen hier mit den Anfangswerten überein. Nachdem man die Rechnung in gewohnter Weise durchgeführt hat, ergibt sich für die Spannung des zweiten Kondensators die Beziehung

$$u_2(t) = \frac{U_0}{1 + s} \left[ e^{-\delta t} - e^{-(\delta + \gamma) t/2} \left( \frac{\gamma - \delta}{2\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right],$$

worin

$$\delta = \frac{1}{RC}, \quad \gamma = \frac{R_x}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1+s}{sLC}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\gamma - \delta}{1}\right)^2.$$

Strebt nun der Widerstand und der Selbstinduktionskoeffizient der Leitung dem Nullwert zu, während  $\gamma = R_x/L$  konstant bleibt, dann hat man  $\omega \rightarrow \omega_0 \rightarrow \infty$  und somit

$$u_2 \approx \frac{U_0}{1+s} e^{-\delta t} [1 - e^{-(\gamma - \delta)t/2} \cos \omega t].$$

Der Faktor vor dem Klammerausdruck entspricht der soeben erhaltenen asymptotischen Lösung. Die Amplitude der als Korrektur auftretenden Hochfrequenzschwingung strebt rasch dem Nullwert zu, wenn  $\gamma > \delta$ , wenn also

$$\frac{R_x}{L} > \frac{1}{RC}, \quad \tau_x < \tau_C,$$

d. h. wenn die Zeitkonstante der Leitung unter derjenigen der Kondensatoren liegt. In solchen Fällen löst also die Gegenwart der Leitung einen »subtransienten« Vorgang aus, und der Ausdruck für die Spannung wird in kurzer Zeit mit dem oben ermittelten übereinstimmen. Ist jedoch  $RC < L/R_x$  (schlechter Kondensator, Leitung mit sehr kleinem Widerstand), dann überwiegt der Schwingungscharakter, und die soeben erhaltene asymptotische Lösung wird unbrauchbar. Selbstverständlich kann dies nicht dem Versagen des mathematischen Formalismus zugeschrieben werden, vielmehr bedeutet es bloß so viel, daß die Schaltung gemäß Abb. 1 im gegebenen Fall zu sehr vereinfacht ist, als daß sie das Verhalten des Systems richtig widerspiegeln könnte. In anschaulicher Weise stellt dies Abb. 4 dar, in der die Werte von  $u_2(1+s)/U_0$  in Abhängigkeit von  $\delta t$  aufgetragen sind. Wie man sieht, ergibt die dem Parameter  $\gamma/\delta = \infty$  (d. h. also dem Idealfall) zugehörige Kurve eine gute Annäherung, wenn  $\gamma/\delta = 5$ , wogegen man bereits bei einem  $\gamma/\delta = 1$  ein falsches Bild erhält.

Die in der Leitung im Zuge des Vorganges zu Wärme umgewandelte Energie schreibt sich zu

$$W_x = \int_0^{\infty} R i_x^2 dt = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \frac{CU_0^2}{(1+\delta/\gamma)(1+\gamma\delta/\omega_0^2)} \approx \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \frac{CU_0^2}{1+\delta/\gamma}.$$

Ist  $\delta/\gamma \ll 1$ , dann nimmt  $W_x$  wieder den für den idealisierten Fall ermittelten Wert an.



c) Als zweites Beispiel soll das bereits früher eingeschaltete Netz gemäß Abb. 5 untersucht werden, in welchem der Schalter S im Augenblick  $t = 0$  getrennt wird. Die Spule  $L_1$  trachtet den Ausgangs-Stromwert  $i_1(-0) =$

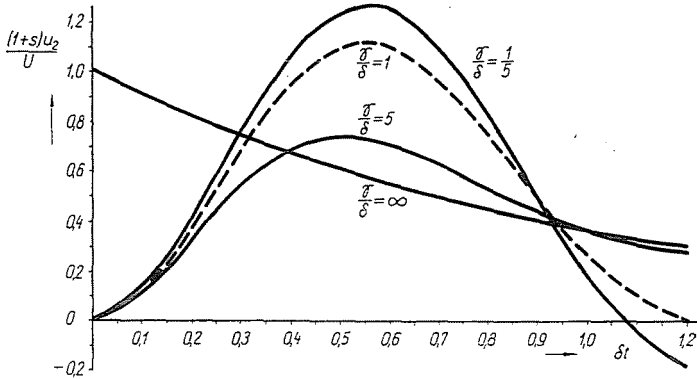


Abb. 4. Zeitabhängiger Verlauf der Spannungskurve des zweiten Kondensators. Ist  $\gamma \geq \delta$ , dann ergibt sich eine gute Annäherung des wirklichen Netzes durch das idealisierte System

$= U/R_1$ , die Spule  $L_2$  hingegen den Ausgangs-Stromwert  $i_2(-0) = 0$  zu halten, doch ist bei  $t > 0$  mit  $i_1 = i_2 = i$  zu rechnen. Die übermäßige Idealisierung rührt nun davon her, daß die Streukapazität und die Querleitung des Schalters

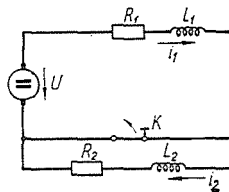


Abb. 5. Reihenschaltung verlustbehafteter Induktivitäten. Das System ist übermäßig idealisiert, weil es Kapazität und Querleitung des Schalters unberücksichtigt läßt

nicht berücksichtigt wurden. Im Sinne der Kirchhoffschen Maschenregel schreibt sich die Differentialgleichung des Systems nach Trennung des Schalters zu

$$L_1 i_1' + R_1 i_1 + L_2 i_2' + R_2 i_2 = U,$$

woraus man nach erfolgter Laplace-Transformation (13) und unter Berücksichtigung der Ausgangsdaten

$$L_1 \left( pI - \frac{U}{R_1} \right) + R_1 I + L_2 (pI - 0) + R_2 I = \frac{U}{p}$$

erhält. Hieraus ergibt sich für den Strom ohne weitere Schwierigkeit

$$i(t) = 1(t) \frac{U}{R_1 + R_2} \left[ 1 + \frac{L_1 R_1 - L_2 R_2}{R_1 (L_1 + L_2)} e^{-\delta t} \right], \quad \delta = \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}$$

während für den Anfangswert des Stromes die Beziehung

$$i(+0) = \frac{U L_1}{R_1 (L_1 + L_2)} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(-0)$$

gilt.

Dies entspricht der Tatsache, daß der magnetische Fluß  $\psi$  in den Spulen während der Umschaltung konstant bleibt. Dagegen »verschwindet« auch hier Energie:

$$w(-0) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(-0) = \frac{L_1 U^2}{2R_1^2},$$

$$w(+0) = \frac{1}{2} (L_1 + L_2) i_2^2(+0) = \frac{L_1^2 U^2}{2R_1^2 (L_1 + L_2)},$$

$$\Delta w = w(-0) - w(+0) = \frac{L_1 L_2 U^2}{2R_1^2 (L_1 + L_2)}.$$

Mit ähnlichen Überlegungen wie zuvor läßt sich auch hier nachweisen, daß es wieder der widerstandsfreie Schalter ist, an dem es zur Energiedissipation kommt, denn

$$u_x \approx L_2 i_2' = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{U}{R_1} \delta(t),$$

$$i_x(0) = \frac{1}{2} \left[ i_x(-0) + i_x(+0) \right] = \frac{1}{2} i_1(-0) = \frac{U}{2R_1},$$

$$W_x = \int_{-0}^{+0} u_x i_x dt = \int_{-0}^{+0} \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{U^2}{2R_1^2} \delta(t) dt = \frac{L_1 L_2 U^2}{2R_1^2 (L_1 + L_2)} = \Delta w.$$

Ist  $R_1 = R$ ,  $L_1 = L$  und  $R_2 = sR$ ,  $L_2 = sR$ , haben also die beiden Spulen dieselben Zeitkonstanten, dann ändert sich der Strom sprunghaft, um sodann konstant zu bleiben, d. h.

$$i(t) = 1(t) \frac{U}{(1+s)R}, \quad \delta = \frac{R}{L}.$$

d) Abb. 6 zeigt eine bessere Annäherung der zuvor gestellten Aufgabe, da sie auch die Kapazität und die Querleitung des Schalters berücksichtigt. Zur Vereinfachung der Berechnung ist demgegenüber für die Spulen eine einheitliche Zeitkonstante vorausgesetzt. Zufolge des Stromes durch den Kondensator

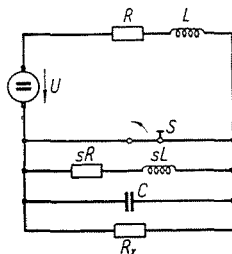


Abb. 6. Reihenschaltung verlustbehafteter Induktivitäten unter Berücksichtigung von Kapazität und Querleitung des Schalters

sator und den Widerstand, stimmen nun die Anfangswerte der Spulenströme mit deren Ausgangswerten überein.

Die Ermittlung des Stromes verursacht keine Schwierigkeiten und man hat als Endergebnis

$$i(t) = \frac{U}{R} \left[ \frac{1 + R/R_x}{1 + s + sR/R_x} + \frac{s}{1 + s + sR/R_x} \cdot e^{-(\delta + \gamma)t/2} \left( \cos \omega t + \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \omega t \right) \right],$$

worin

$$\delta = \frac{R}{L}, \quad \gamma = \frac{1}{R_x C}, \quad \omega_0^2 = \frac{1 + s}{sLC}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \left( \frac{\gamma - \delta}{2} \right)^2.$$

Hat man  $R_x \rightarrow \infty$ ,  $C \rightarrow 0$ , wobei jedoch  $\gamma = 1/R_x C$  konstant bleibt, dann gilt  $\omega \rightarrow \omega_0 \rightarrow \infty$  und mithin annähernd

$$i(t) \approx \frac{U}{R} \left[ \frac{1}{1 + s} + \frac{s}{1 + s} e^{-(\delta + \gamma)t/2} \cos \omega t \right].$$

Das so gewonnene Resultat gestattet keinen unmittelbaren Vergleich mit dem Ergebnis des Berechnungsganges im vorangegangenen Punkt, weil dort der Strom — bei Wahl derart spezieller Parameter — konstant bleibt. Ist jedoch  $R_1/L_1$  nicht genau gleich  $R_2/L_2$ , dann hat der Dämpfungskoeffizient der Änderung nach dem Sprung annähernd den Wert  $\delta$ . Eine schnellere Däm-

pfung der Schwingungen tritt ein, wenn  $(\delta + \gamma)/2 > \delta$ , d. h. wenn

$$\gamma > \delta, \quad \tau_x < \tau, \quad R_x C < \frac{L}{R}.$$

Sind die Spulen gut, dann kann die Wirkung des Schalters vernachlässigt werden, selbst wenn dieser relativ schlecht isoliert ist, im entgegengesetzten

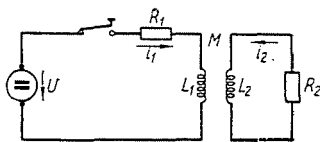


Abb. 7. Induktiv gekoppelte Spulen, an Gleichstrom gelegt. Die Annahme einer vollkommenen Kopplung kommt einer übermäßigen Idealisierung gleich

Fall dagegen bietet die in Abb. 5 dargestellte Schaltung auch qualitativ ein falsches Bild vom wirklichen System.

e) Interessanter Weise stellt das Problem der ideal gekoppelten Spulen eine ebensolche Aufgabe dar. Setzt man voraus, daß in der in Abb. 7 gezeigten Anordnung  $M^2 = L_1 L_2$  und setzt man der Einfachheit halber die Ausgangswerte beider Ströme gleich Null, dann hat man bei Einschaltung im Augenblick  $t = 0$  für den Strom die Beziehungen

$$i_1(t) = \frac{U}{R_1} \left[ 1 - \frac{\delta L_1}{R_1} e^{-\delta t} \right],$$

$$i_2(t) = \frac{U}{R_1} \frac{\delta M}{R_2} e^{-\delta t},$$

$$\delta = \frac{R_1 R_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}, \quad \tau = \frac{1}{\delta} \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}.$$

Beachtenswert ist die Tatsache, daß der Anfangswert beider Ströme vom Nullwert abweicht, denn es ist

$$i_1(+0) = \frac{U L_2}{L_1 R_2 + L_2 R_1}, \quad i_2(+0) = \frac{U M}{L_1 R_2 + L_2 R_1}.$$

Energetisch besteht dennoch kein Widerspruch, denn es ist leicht einzusehen, daß

$$w(+0) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(+0) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(+0) - M i_1(+0) i_2(+0) = 0,$$

die Energie des Systems hat also den Anfangswert Null.

Ist im Sonderfall  $L_1 = L$ ,  $R_1 = R$ ,  $L_2 = sL$ ,  $R_2 = sR$ , haben demnach die beiden Spulen die gleiche Zeitkonstante, dann nimmt die Lösung die Form

$$i_1(t) = \frac{U}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-\delta t} \right],$$

$$i_2(t) = \frac{U}{2\sqrt{s} R} e^{-\delta t}, \quad \delta = \frac{R}{2L}$$

an.

f) Geht man von einem endlichen Kopplungskoeffizienten aus und beschränkt man sich der Einfachheit halber auf Spulen mit gleichen Zeitkonstanten, dann erhält man für die Ströme mit

$$M^2 = k^2 L_1 L_2 = k^2 sL^2 = (1 - \sigma^2) sL^2$$

folgende Beziehungen:

$$i_1(t) = \frac{U}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-\gamma_1 t} - \frac{1}{2} e^{-\gamma_2 t} \right],$$

$$i_2(t) = \frac{U}{2\sqrt{s} R} \left[ e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right],$$

$$\gamma_1 = \frac{R(1 - \sqrt{1 - \sigma^2})}{\sigma^2 L} = \frac{R}{L} \frac{1}{1 + k},$$

$$\gamma_2 = \frac{R(1 + \sqrt{1 + \sigma^2})}{\sigma^2 L} = \frac{R}{L} \frac{1}{1 - k}.$$

Hier haben beide Ströme den Anfangswert Null.

Ist die Kopplung sehr fest, ist also  $\sigma \approx 0$ , dann erhält man folgende angenäherte Werte:

$$\gamma_1 \approx \frac{R}{2L} = \delta, \quad \gamma_2 \approx \frac{2R}{\sigma^2 L} = \frac{4}{\sigma^2} \delta \gg \delta,$$

$$i_1(t) \approx \frac{U}{R} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-\gamma_1 t} - \frac{1}{2} e^{-\gamma_2 t} \right],$$

$$i_2(t) \approx \frac{U}{2\sqrt{s} R} \left[ e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right].$$

In beiden Ausdrücken bedeuten die letzten Glieder die Korrektur, die bei zunehmend fester Kopplung schnell dem Nullwert zustrebt. Die Verhält-

nisse sind in Abb. 8 dargestellt, die den Verlauf der  $i_1$ -Kurve für verschiedene  $k$ -Werte veranschaulicht. Bei  $k \neq 1$  nimmt der Stromwert seinen Ausgang stets von Null und erreicht mit wachsendem  $k$  den  $U/2 R$ -Wert immer früher. Ist dagegen  $k = 1$  (was sich in Wirklichkeit niemals erzielen läßt), dann

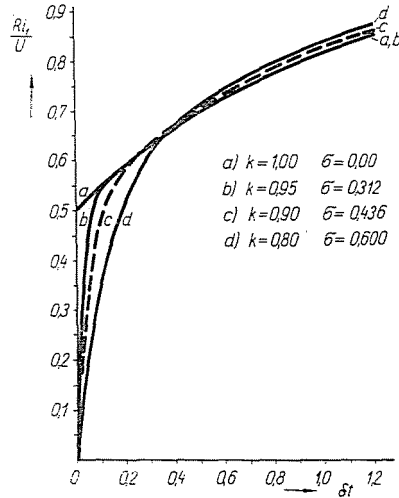


Abb. 8. Zeitabhängiger Verlauf der Primärstromkurve. Ist  $k \approx 1$ , dann ergibt sich eine gute Annäherung des wirklichen Netzes durch das idealisierte System

erreicht der Strom diesen Wert in einer unendlich kurzen Zeit, d. h. er nimmt seinen Ausgang vom Wert  $U/2 R$ .

## 5. Schlußfolgerungen

Aus den angeführten Beispielen geht klar hervor, daß die Untersuchung der Übergangerscheinungen in übermäßig idealisierten Systemen mathematisch keine zusätzliche Schwierigkeiten verursacht. Die Einführung der verallgemeinerten Ableitung gestattet es, in Kenntnis der vor dem Schaltvorgang vorhandenen Ausgangswerte mit Hilfe der Laplace-Transformation die Zeitabhängigkeit der gesuchten Größen und unter diesen auch die im ersten Augenblick nach der Schaltung auftretenden Anfangswerte zu ermitteln. Die übermäßige Idealisierung hat bei gewissen Vorgängen einen unendlich raschen Verlauf zur Folge, woraus sich unter anderem eine sprunghafte Veränderung der im System gespeicherten Energie ergeben kann.

Nur fallweise läßt sich jedoch die Frage entscheiden, inwieweit die Vorgänge, wie sie sich für idealisierte Systeme ergeben, die wirklichen Verhältnisse richtig beschreiben. Bei gekoppelten Spulen ist die Lage klar: Je fester die

Kopplung, desto besser (bzw. von um so niedrigeren Zeitwerten an) läßt sich der Prozeß mit dem Vorgang annähern, wie er sich im idealen gekoppelten System abspielt. Besteht die Idealisierung in der Vernachlässigung der Streuparameter, dann ist die Annäherung offenbar berechtigt, sofern die Zeitkonstante der Streuparameter weit niedriger (bzw. ihr Dämpfungskoeffizient weit höher) liegt als der entsprechende Wert im Hauptteil des Systems. Im entgegengesetzten Fall nämlich ergeben sich im wirklichen System ganz andere Vorgänge (beispielsweise Schwingungen mit großer Amplitude) als im adäquaten idealisierten System. In konkreten Fällen verursacht es natürlich nicht geringe Schwierigkeiten, die wesentlichen Streuparameter und besonders ihre Größe zu bestimmen.

### Zusammenfassung

In wirklichen Systemen können sich der Strom der Induktivitäten sowie die Spannung der Kondensatoren nicht sprunghaft ändern, doch vermag die übermäßige Idealisierung sowohl der Zeitfunktion der Klemmenspannung als auch des Netzaufbaues die entgegengesetzte Wirkung auszulösen. Infolgedessen unterscheiden sich die Ausgangswerte vor der Schaltung von den Anfangswerten nach der Schaltung und ebenso kann es zu einer sprunghaften Änderung der Energie des Systems kommen.

Durch Einführung der den Dirac-Impuls enthaltenden verallgemeinerten Derivierten der Funktionen mit Unstetigkeiten erster Art und mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich die anfallenden Aufgaben mathematisch unschwer behandeln, da man hierzu bloß die Ausgangswerte zu kennen braucht, während sich die Anfangswerte von selbst ergeben.

Andererseits muß es der fallweisen Entscheidung vorbehalten bleiben, ob Prozesse, wie sie sich für das übermäßig idealisierte System ergeben, die in Wirklichkeit bestehenden Vorgänge richtig widerspiegeln. Liegt die Zeitkonstante der Streuparameter weit unter derjenigen des idealisierten Systems, dann kann die Annäherung im allgemeinen als richtig akzeptiert werden. In entgegengesetzten Fällen können sich auch qualitative Unterschiede zwischen den wirklichen und den im idealisierten System vor sich gehenden adäquaten Vorgängen ergeben, wie etwa dadurch, daß zusätzliche Schwingungen mit großer Amplitude auftreten.

### Literatur

1. FODOR, GY.: *Periodica Polytechnica*, V, 1, 1961.
2. CHURCHILL, R. V.: *Operational Mathematics*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958.
3. DOETSCH, G.: *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*. R. Oldenbourg, München, 1956.
4. SIMONYI, K.: *Theoretische Elektrotechnik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

GY. FODOR, Budapest XI. Múegyetem rkp. 3. Ungarn.