ÜBER EINEN SATZ DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Von

GY. FODOR

Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 22. August, 1960)

Vorgelegt von Prof. Dr. K. SIMONYI

1. Einleitung

Durch die Anwendung der Laplace-Transformation wird die Behandlung jener Erscheinungen, deren Gesetzmäßigkeiten durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, durch eine Integro-Differentialgleichung, durch eine Volterra-Integralgleichung oder durch ein System dieser Gleichungen beschrieben werden, im allgemeinen beträchtlich erleichtert. Die beiden grundlegenden Vorzüge der Methode bestehen darin, daß einerseits die einzelnen Operationen (Differentiation, Integration) in algebraische Ausdrücke übergehen, und folglich die Gleichungen, die die Operationen enthalten, in algebraische Gleichungen transformiert werden. Andererseits kann die Laplace-Transformation der Funktion auch dann in geschlossener Form angegeben werden, wenn diese für die Originalfunktion nicht gültig ist (in Intervallen kontinuierliche oder periodische Funktionen). Diese Vorzüge machen die weite Verbreitung der Laplace-Transformation auf dem Gebiet der Elektrotechnik, der Regelungstechnik, der Schwingungslehre, usw. verständlich.

Die Laplace-Transformation ist aus der primitiven Heavisideschen Operatorenrechnung entwickelt worden, die auf die technische Betrachtungsweise aufgebaut ist. Da ihre Regeln nicht genau formuliert waren, führte ihre Anwendung oft zu falschen Ergebnissen, weshalb sie durch die von Mathematikern ausgearbeitete strenge Methode verdrängt wurde. Es mag hier erwähnt werden, daß die moderne, auf der Distributionstheorie beruhende Operatorenrechnung als eine Synthese der beiden Verfahren aufgefaßt werden kann [3].

Während die Mathematiker nun einerseits klare Regeln des Verfahrens entwickelten, behandelten sie die Laplace-Transformation andererseits notwendigerweise in einer Formulierung, die sich für die technischen Anwendungen wenig eignete. Die Gegensätze in der Auffassung lassen sich um die hier zu besprechenden beiden Probleme gruppieren. Der strengen mathematischen Auffassung gemäß kann die Derivierte einer in Intervallen kontinuierlichen Funktion an der Unstetigkeitsstelle nicht definiert werden, vielmehr kann man höchstens von links- und rechtsseitigen Grenzwerten sprechen. In der technischen Auffassung hingegen wird der Begriff der Derivierten in einem allgemeineren Sinne gebraucht. Die Frage läßt sich auch so formulieren, daß der Dirac-Impuls der mathematischen Auffassung nach keine Funktion darstellt, während er in der technischen Praxis als eine Funktion behandelt wird. Dieses Problem offenbart sich im Satz über die Laplace-Transformierte der derivierten Funktion. Andererseits ist die Laplace-Transformation der mathematischen Auffassung gemäß im allgemeinen für derartige Funktionen definiert, deren Wert links vom Punkte $t = 0$ gleich Null ist. Die in den technischen Anwendungen vorkommenden Funktionen sind nicht notwendigerweise dieser Art, was bei einigen Aufgaben Schwierigkeiten verursacht.

Die erwähnten Probleme wurden auch in den Werken über die technische Anwendung der Laplace-Transformation nicht überbrückt, da diese entweder besondere Regeln zu schaffen gezwungen sind [2], oder innere Widersprüche enthalten [1], oder die Frage einfach umgehen [3]. Im folgenden wird eine Abfassung der Laplace-Transformation gegeben, die den zweiten Widerspruch eliminiert und damit den Satz über die Laplace-Transformierte der Derivierten ermittelt.

2. Mathematische Behandlung der Laplace-Transformation

Zur Klärung der Unterschiede zwischen den beiden Auffassungen bzw. den diesbezüglichen Sätzen, soll zuerst ein Überblick über das bekannte mathematische Verfahren der Laplace-Transformation gegeben werden. Demnach haben Funktionen der Form $f(t)$ mit reellen Veränderlichen eine Laplace-Transformierte, die sich im Bereiche $t > 0$ dem Unendlichen höchstens so nähern wie e^{at}, ferner deren Integral für jedes Intervall von endlicher Länge beschränkt und $f(t)$ gleich Null ist im Intervall $t < 0$. In diesem Falle ist die Laplace-Transformierte $F(p)$ der Funktion $f(t)$ definitionsgemäß:

$$\mathscr{L} f(t) = F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{1}$$

Ist nun $f(t)$ in Intervallen kontinuierlich, so gilt

$$f(t) = f_i(t), \qquad t_{i-1} < t < t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

wo $f_i(t)$ kontinuierlich und $t_0 = 0$ ist. Den in der Praxis vorkommenden Fällen entsprechend soll die Funktion in sämtlichen Intervallen einen links- und rechtsseitigen Grenzwert haben, d. h. es gelte

$$f(t_{i-1} + 0) = f_i(t_{i-1}) = \lim_{t \to t_{i-1}} f_i(t),$$
$$f(t_i - 0) = f_i(t_i) = \lim_{t \to t_i} f_i(t).$$

Wird der Differentialquotient der Funktion, — der im weiteren analytische Derivierte genannt wird — und der in den $t = t_i$-Stellen nicht definiert ist, mit $\dot{f}(t)$ bezeichnet, dann schreibt sich seine Laplace-Transformierte laut (1) zu

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = \int_0^\infty \dot{f}(t)\, e^{-pt}\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{f}_i(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{3}$$

Nach partieller Integration hat man

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = p\,\mathscr{L} f(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[f_i(t_i)\, e^{-pt_i} - f_i(t_{i-1})\, e^{-pt_{i-1}}\right]. \tag{4}$$

Führt man für den Sprung der Funktion die Bezeichnung

$$\Delta f(t_i) = f_{i+1}(t_i) - f_i(t_i) = f(t_i + 0) - f(t_i - 0) \tag{5}$$

ein, dann kann Satz (4) in die Form

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = pF(p) - f(+0) - \sum_{i=1}^{n} \Delta f(t_i)\, e^{-pt_i} \tag{6}$$

umgeschrieben werden. Da definitionsgemäß $f(-0) = 0$, läßt sich (6) auch in die Form

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = pF(p) - \sum_{i=0}^{n} \Delta f(t_i)\, e^{-pt_i} \tag{7}$$

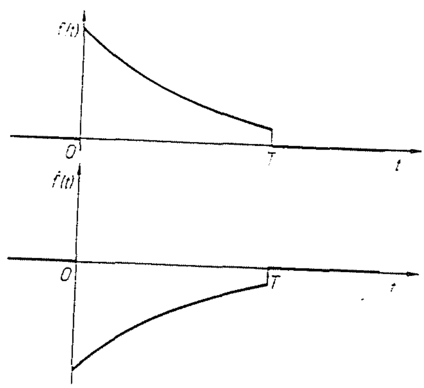
bringen.

Letzten Endes besteht also die Möglichkeit, die Laplace-Transformierte der Derivierten einer Funktion dann aus der Laplace-Transformierten der Originalfunktion zu bilden, wenn die Werte des Sprunges der Funktion an den einzelnen Unstetigkeitsstellen bekannt sind. Ist die Funktion im Falle $t > 0$ kontinuierlich, so braucht nur der Wert $f(+0)$ bekannt zu sein. Ist die Funktion $f(t)$ gegeben, dann verursacht das keine Schwierigkeit, doch hat der Satz in diesem Falle keine größere Bedeutung. Einerseits wird die Derivierte der gebenen Funktion nur selten angegeben, andererseits kann die Differentiation durchgeführt werden, und man braucht die Transformierte von $\dot{f}(t)$ nicht mit der Transformierten von $f(t)$ auszudrücken.

In der Praxis hingegen ist eben jener Fall von Interesse, bei dem es sich um die Laplace-Transformierte der gesuchten Unbekannten handelt. In solchen Fällen bedeutet die Ermittlung der Sprünge $\Delta f(t_i)$ bzw. in einfacheren Fällen des Wertes $f(+0)$ eine besondere Aufgabe. Unbequem wirkt sich ferner aus, daß der Ausdruck eventuell viele — im Falle von periodischen Funktionen sogar unendlich viele — Glieder zählt.

Wird der Ausdruck $\mathcal{L}\dot{f}(t)$ rücktransformiert, dann muß man sich vor Augen halten, daß er an den Stellen $t = t_i$ nicht definiert ist, man erhält also keine Aufklärung über die Größe der Sprünge. Aus der analytischen Derivierten läßt sich mithin die Funktion nur dann rekonstruieren, wenn die $\Delta f(t_i)$-Sprünge gesondert angegeben sind. Zur Illustration des Gesagten untersuchen wir die in Abbildung 1 gezeigte exponentielle Impulsfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \quad t > T, \\ e^{-at} & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8}$$



Die Laplace-Transformierte dieser Funktion ist

$$F(p) = \frac{1 - e^{-(a+p)T}}{p+a} . \tag{9}$$

Da $f(+0) = 1$ und $\Delta f(T) = -e^{-aT}$, erhalten wir auf Grund von (6)

$$\mathcal{L}\dot{f}(t) = p\,\frac{1 - e^{-(a+p)T}}{p+a} - 1 + e^{-(a+p)T} = -a\,\frac{1 - e^{-(a+p)T}}{p+a} , \tag{10}$$

woraus man mit (9)

$$\dot{f}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, t > T \\ -a\,e^{-at} & 0 < t < T \end{cases} \tag{11}$$

erhält. Dies kann auf Grund von (8) auch unmittelbar errechnet werden, doch hat man für die Sprünge an den Stellen $t = 0$ und $t = T$ keinerlei Aufschlüsse.

3. Sprungfunktion und Dirac-Impuls

Vom Gesichtspunkte der technischen Anwendung aus ist die Einheitsfunktion 1 (t) von äußerst großer Bedeutung. Sie wird folgendermaßen definiert

$$1(t-T)=\begin{cases}0 & t<T,\\ 1 & t>T.\end{cases} \tag{12}$$

Streng genommen, kann diese Funktion an der Stelle $t = T$ nicht differenziert werden. Führt man jedoch formell den Dirac-Impuls $\delta(t)$ ein, der eben die verallgemeinerte Derivierte von $1(t)$ sein soll, und bezeichnet man diese allgemeinere — auch für die Unstetigkeitsstellen definierte — Derivierte im Interesse der Unterscheidung von der analytischen Derivierten statt mit $\dot{f}(t)$ mit $f'(t)$, dann hat man

$$1'(t-T)=\delta(t-T)=\begin{cases}0 & t<T,\ t>T,\\ \infty & t=T.\end{cases} \tag{13}$$

Der Dirac-Impuls wird auf die an der Stelle $t = T$ ermittelte Weise unendlich, denn gemäß (13) gilt für $t_0 < T$

$$\int_{t_0}^{t}\delta(t-T)\,\mathrm{d}t=1(t-T)=\begin{cases}0 & t<T,\\ 1 & t>T.\end{cases} \tag{14}$$

In Übereinstimmung mit dem Gesagten wird der Dirac-Impuls so definiert, daß an jeder Stelle t_0 für eine kontinuierliche Funktion $f(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=f(t_0), \quad t_1<t_0<t_2\,. \tag{15}$$

woraus sinngemäß

$$\mathcal{L}\,\delta(t-T)=\mathrm{e}^{-pT} \tag{16}$$

folgt.

Die Dirac-Funktionen höherer Ordnung können als Derivierte höherer Ordnung der Sprungfunktion $1(t)$ definiert werden, doch pflegen diese nicht vorzukommen.

In der technischen Mathematik werden die Sprungfunktion und der Dirac-Impuls als ebensolche Funktionen betrachtet wie die kontinuierlichen und beschränkten Funktionen, und dementsprechend wird auch mit ihnen gerechnet. Den strengen mathematischen Beweis für das Verfahren lieferte die neuentwickelte Distributionstheorie, die die in der technischen Mathematik üblichen Methoden praktisch nur bestätigte.

Die in Abbildung 1 gezeigte Funktion kann also in der Form

$$f(t) = [1(t) - 1(t - T)]\, \mathrm{e}^{-at} \tag{17}$$

geschrieben werden. Sie wird gemäß den Regeln für die Differentiation eines Produktes deriviert und man erhält

$$\begin{aligned} f'(t) &= [1(t) - 1(t - T)] \cdot [-a\, \mathrm{e}^{-at}] + [\delta(t) - \delta(t - T)\, \mathrm{e}^{-at}] = \\ &= -a f(t) + \delta(t) - \delta(t - T)\, \mathrm{e}^{-aT}. \end{aligned} \tag{18}$$

Die Funktion $f(t)$ zeigt an der Stelle $t = 0$ einen Sprung von der Größe $+1$, und an der Stelle $t = T$ einen Sprung von der Größe $-e^{-aT}$. Auf Grund der Regeln für die Differentiation von Produkten haben wir also tatsächlich ein richtiges Ergebnis erhalten.

4. Modifizierte Form der Laplace-Transformation

Unter den in der technischen Praxis vorkommenden Vorgängen lassen sich zwei Gruppen unterscheiden. Es gibt Vorgänge, die in einem bestimmten Zeitpunkt (oder an einer bestimmten Stelle) beginnen, zuvor jedoch einen Nullwert haben, oder doch zumindest gleich Null gesetzt werden können. Bei zeitlichen Vorgängen nennt man sie Einschalterscheinungen und wählt als Anfangszeitpunkt im allgemeinen den Wert $t_0 = 0$. Bei der anderen Gruppe von Vorgängen können wir annehmen, daß sich die Einschaltung schon früher abgespielt hat, so daß ein stationärer Zustand erreicht ist, und die Größen in der Zeit konstant oder periodisch sind. In einem gegebenen Zeitpunkt ereignete sich jedoch im System eine Veränderung, etwa im System selbst, oder in der Zeitfunktion der äußeren (konstanten oder periodischen) Erregung. Als Zeitpunkt wird in diesem Fall für gewöhnlich $t = 0$ gewählt. Dieser Fall ist offenbar allgemeiner, als der zuvor erwähnte und schließt auch jenen in sich.

Die vorkommenden Größen sind also im Falle $t < 0$ nicht gleich Null, sondern sie sind gemäß einer gegebenen Funktion veränderlich. Die Aufgabe besteht darin, die Veränderung im Bereiche $t > 0$ auf Grund der bekannten Veränderung im Bereiche $t < 0$ zu ermitteln. Unter der Laplace-Transformierten der Funktion $f(t)$ versteht man nun den Ausdruck

$$\mathcal{L}_{t_0} f(t) = F_{t_0}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t - t_0) f(t)\, \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t\,. \tag{19}$$

Da im allgemeinen $t_0 = 0$ gewählt wird, ist

$$\mathscr{L}_0 f(t) = F_0(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t) f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t, \tag{20}$$

was formell völlig mit der Definition (1) übereinstimmt, dem Inhalt nach jedoch nicht. Dort wurde nämlich von der zu transformierenden Funktion vorausgesetzt, daß sie die Form $1\,(t)\, f\,(t)$ hat, während hier der Faktor $1\,(t)$ in der Definition der Transformation mitinbegriffen ist. Im Laufe der Anwendungen brauchen wir deshalb den Index 0 nicht anzugeben.

Wird die Laplace-Transformation für eine Differentialgleichung angewendet, so wird diese zuerst mit $1\,(t)$ multipliziert, und danach die Formel (1) oder (20) angewendet. Das ist deshalb wesentlich, da im Sinne des Gesagten man nicht die Laplace-Transformierte des Ausdruckes $[1\,(t)\, f\,(t)]'$, sondern die des Ausdruckes $1\,(t)\, f'\,(t)$ benötigt.

5. Die Laplace-Transformierte der Derivierten

Es sei also $f\,(t)$ eine in Intervallen kontinuierliche und kontinuierlich differenzierbare, an jeder Stelle über rechts- und linksseitige Grenzwerte verfügende Funktion, die nun auch für die Werte $t < 0$ in der Form

$$f(t) = f_i\,(t) \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad i = 0, 1, 2 \ldots n \tag{21}$$

definiert wird, wobei $t_0 = 0$ und $t_{-1} = -\infty$. Mit der Einheitsfunktion ausgedrückt, hat man somit

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} [\,1\,(t - t_{i-1}) - 1(t - t_i)]\, f_i\,(t). \tag{22}$$

Die verallgemeinerte Derivierte der Funktion wird in der Form

$$\begin{aligned} f'\,(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Big\{ & [1(t - t_{i-1}) - 1(t - t_i)]\, \dot{f}_i\,(t) + \\ & + [\delta(t - t_{i-1}) - \delta(t - t_i)]\, f_i(t) \Big\} \end{aligned} \tag{23}$$

gebildet. Für kontinuierliche f_i-Funktionen ist natürlich $\dot{f}_i\,(t) = f'_i(t)$. Bildet man auf Grund der Formel (20) die Laplace-Transformierte von $f'(t)$ mit dem Anfangspunkt $t_0 = 0$ in der Form

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1(t) f'\,(t)\, \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t, \tag{24}$$

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_i'(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t + f_i(t_{i-1})\, \mathrm{e}^{-pt_{i-1}} - \right. \\ \left. - f_i(t_i)\, \mathrm{e}^{-pt_i} \right\} - f_0(0), \tag{25}$$

dann wird mit (4) oder durch partielle Integration

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = p\, \mathscr{L}_0 f(t) - f_0(0) + \sum_{i=1}^{n} [f_i(t_i)\, \mathrm{e}^{-pt_i} - \\ - f_i(t_{i-1})\, \mathrm{e}^{-pt_{i-1}} + f_i(t_{i-1})\, \mathrm{e}^{-pt_{i-1}} - f_i(t_i)\, \mathrm{e}^{-pt_i}]. \tag{26}$$

Letztlich ergibt sich mit $f_0(0) = f(-0)$ der sehr einfache Zusammenhang

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = pF(p) - f(-0). \tag{27}$$

Dieser Ausdruck ist auch formell viel einfacher als der Zusammenhang (7) für die Laplace-Transformierte der Funktion $\dot{f}(t)$. Wesentlicher ist aber die inhaltliche Vereinfachung: Zur Bildung der Laplace-Transformierten der Derivierten brauchen wir keinen Wert aus dem Bereiche $t > 0$, sondern nur den »Endzustand« der gesuchten Funktion zu kennen. Der Endzustand $f(-0)$ ist jener Wert, den die Größe in dem vorläufig stationären Zustand, unmittelbar vor der Veränderung aufgenommen hat. Der Zusammenhang (27) ist nicht nur einfacher, sondern wir wissen auch, daß die Derivierte $f'(t)$ mehr Informationen enthält, als $\dot{f}(t)$.

Im Beispiel, das in Abschnitt 2 geprüft wurde (Abb. 1), ist

$$F(p) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-(a+p)T}}{p + a}. \tag{28}$$

Da $f(-0) = 0$, erhält man

$$\mathscr{L} f'(t) = p\, \frac{1 - \mathrm{e}^{-(a+p)T}}{p + a} = -a\, \frac{1 - \mathrm{e}^{-(a+p)T}}{p + a} + 1 - \mathrm{e}^{-(a+p)T}. \tag{29}$$

Die inverse Transformierte wird durch Anwendung von Gleichung (16) zu

$$1(t) f'(t) = -af(t) + \delta(t) - \delta(t - T)\, \mathrm{e}^{-aT}. \tag{30}$$

wie das schon früher (Zusammenhang 18) unmittelbar errechnet wurde.

6. Kontinuität der Funktion

Wenn man die Regeln (6) bzw. (27) für die Laplace-Transformation der Derivierten vom Gesichtpunkte der Rechentechnik aus prüft, so kann man feststellen, daß sich die beiden im wesentlichen nur dann unterscheiden, wenn die Funktion $f(t)$ selbst nicht kontinuierlich ist. In diesem Zusammenhang taucht die Frage auf, ob es überhaupt eine physikalische Realität hat, wenn die Funktion einer Größe unstetig ist, deren Differentialquotient gleichfalls einen physikalischen Inhalt besitzt und in derselben Aufgabe vorkommt. Ist das nämlich unmöglich, kommt also die Derivierte der unstetigen Funktionen in Wirklichkeit nicht vor, so ist die hier aufgeworfene Frage ein Scheinproblem.

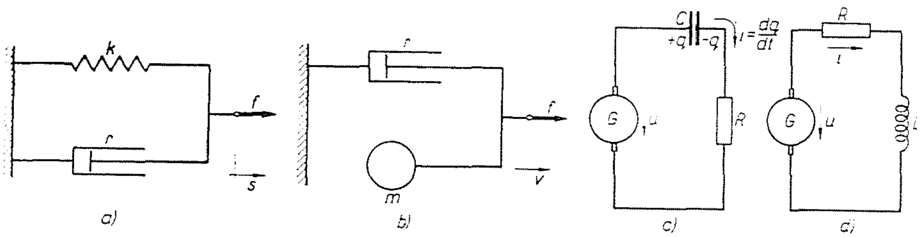


Abb. 2

Betrachtet man die Zeit als unabhängige Veränderliche, dann ist die Differentialgleichung der auf Abb. 2 gezeigten mechanischen bzw. elektrischen einfachen Systeme (d. h. der Systeme mit einem Energiespeicher)

$$a)\ r s' + ks = f; \qquad b)\ m v' + r v = f; \tag{31}$$

$$c)\ R q' + \frac{1}{c} q = u; \quad c)\ Li' + Ri = u,$$

wo f die Zeitfunktion der wirkenden Kraft ist. Wenn sich in diesen Systemen die Bewegung s, die Geschwindigkeit v, die Ladung q bzw. der Strom i sprungweise ändern, so werden sich auch die dazugehörenden Energien sprungweise ändern :

$$a)\ w_k = \frac{1}{2} ks^2; \qquad b)\ W_m = \frac{1}{2} m v^2; \tag{32}$$

$$c)\ w_C = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2; \quad c)\ w_L = \frac{1}{2} L i^2.$$

Eine sprungweise Energieveränderung setzt eine unendlich hohe Leistung voraus, sie kann also nur dann zustandekommen, wenn die äußere Erregerwirkung (Kraftquelle, Spannungsgenerator) eine unendlich hohe Leistung liefert. Da dies unmöglich ist, kann es sich bei den Funktionen nur um kontinuierliche handeln. Dieser Satz kann auch derart formuliert werden, daß das Integral der Erregerwirkung nur eine kontinuierliche Funktion sein kann.

Streng genommen, ist diese Argumentation in der Tat richtig. In der Praxis liegen die Dinge aber anders. Kurz dauernde Kraft-, Spannungs- oder Stromimpulse werden oft zweckmäßig und berechtigterweise durch einen unendlich kurzen Impuls von gleicher »Fläche«, also durch einen Dirac-Impuls ersetzt:

$$g(t) \approx G_0 \delta(t) \qquad \text{worin} \qquad G_0 = \int_0^T g(t)\,dt, \tag{33}$$

und $g(t)$ die gegebene Kraft-, Spannungs- oder Stromfunktion ist. Das Integral dieser Erregung ist im Sinne von (14) unstetig, ihre Leistung ist im Zeitpunkt $t = 0$ unendlich hoch. Die Brauchbarkeit dieses zweifellos idealisierten Verfahrens wird folgendermaßen gesichert: Wenn die Berechnung für einen kurzen Impuls mit einer Einheitsfläche durchgeführt wird, und wenn sich im Laufe der Lösung die Länge des Impulses Null nähert, dann stimmt das Ergebnis mit der zum Dirac-Impuls gehörenden Lösung überein, bei der die Länge des Impulses mit der Einheitsfläche im voraus unendlich klein angenommen wurde. Die Bedeutung dieser Methode wird auch dadurch unterstrichen, daß die sogenannte Gewichtsfunktion in der Regelungstechnik, bei der Prüfung linearer Systeme eine grundlegende Rolle spielt. Das ist die Zeitfunktion der gesuchten Größe in dem Falle, wenn die Erregung (das Eingangssignal) der Dirac-Impuls ist. Vorstellbar sind auch Aufgaben, bei denen die gegebene Erregunsfunktion aus mehreren aufeinanderfolgenden Dirac-Impulsen besteht, bzw. solche enthält, die also weitere Sprünge zustandebringen.

Derartige Aufgaben können auch mit der strengen Methode der Laplace-Transformation gelöst werden. Dazu muß aber der Sprung der gesuchten Größe im Zeitpunkt des Eintretens des Dirac-Impulses auf Grund physikalischer Erwägungen ermittelt werden. Bei der hier beschriebenen Methode erübrigt sich dies, da sich die Sprünge herausstellen, wie dies im nächsten Abschnitt illustriert werden soll.

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir nun die Regeln (6) und (27) für die Laplace-Transformierte des analytischen bzw. verallgemeinerten Differentialquotienten noch einmal auf. Wenn die Funktion der Einfachheit halber nur an der Stelle $t = 0$ unstetig und im Bereiche $t > 0$ kontinuierlich ist, dann hat man

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = pF(p) - f(+0), \tag{34}$$

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = pF(p) - f(-0), \tag{35}$$

wo (35) allgemeine Gültigkeit hat.

Es muß jedoch darauf aufmerksam gemacht werden, daß die beiden Verfahren nicht miteinander verwechselt werden dürfen, wie das die Verfasser mehrerer — sonst ausgezeichneter — Bücher tun. Wird der Dirac-Impuls als eine Funktion aufgefaßt, dann muß die hier beschriebene Methode angewendet werden, also z. B. Regel (35). Die Anwendung der allgemeinen (6) oder der speziellen Regel (34) würde zu unrichtigen Ergebnissen oder zu Widersprüchen führen. In den nachstehenden Beispielen wird auch das illustriert.

7. Beispiele

Als erstes Beispiel sollen die in Abb. 2 gezeigten einfachen Systeme geprüft werden. Die Erregung ist ein einziger kurzer Impuls im Zeitpunkt $t = 0$, der durch die Funktion $\delta(t)$ beschrieben ist. Die Differentialgleichung schreibt sich zu

$$y' + a\,y = k\,\delta(t), \quad t \geqq 0, \tag{36}$$

wo in den einzelnen Fällen

$$\begin{aligned} y &= \quad s, \quad\quad v, \quad\quad q, \quad\quad i; \\ a &= \frac{k}{r}, \quad \frac{r}{m}, \quad \frac{1}{RC}, \quad \frac{R}{L}; \\ k &= \frac{F_0 T}{r}, \quad \frac{F_0 T}{m}, \quad \frac{U_0 T}{R}, \quad \frac{U_0 T}{L}. \end{aligned} \tag{37}$$

Im Augenblicke vor dem Einsetzen der Wirkung des Impulses sei $y(-0) = c$ (vorgespannte Feder, bewegende Masse, geladener Kondensator, von Strom durchflossene Spule). Dieser Wert c ist durch den zuvor bestandenen Zustand des Systems bestimmt, er ist also als bekannt anzusehen.

Der strengen Mathematik gemäß ist $\delta(t)$ keine Funktion, die Lösung der Differentialgleichung kann also nur im Bereich $t > 0$ (und nicht im Bereich $t \geqq 0$) gesucht werden:

$$\dot{y} + ay = 0, \; t > 0. \tag{38}$$

Die mathematische Anfangsbedingung ist $y(+0) = b$. Für die Gleichung wird die Laplace-Transformation unter Berücksichtigung von (34) angewendet, so daß

$$pY - b + aY = 0, \tag{39}$$

$$Y(p) = \frac{b}{p + a}. \tag{40}$$

Die inverse Transformierte ist:

$$y(t) = b\,e^{-at}, \quad t > 0. \tag{41}$$

Der Mathematiker hat damit seine Aufgabe erfüllt, und es bleibt dem praktisch Anwendenden überlassen, den Zusammenhang zwischen c und b zu ermitteln. Da $y(t)$ an der Stelle $t = 0$ einen Sprung aufweist, wird

$$y'(t = 0) = [y(+0) - y(-0)]\ \delta(t) + \dot{y}(0) = [b - c]\ \delta(t) + \dot{y}(0). \tag{42}$$

Die Differentialgleichung (36) nimmt im Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$y'(0) + a\,y(0) = k\ \delta(t) \tag{43}$$

an. Mit (42) erhält man hieraus

$$(b - c)\ \delta(t) + \dot{y}(0) + a\,y(0) = k\ \delta(t). \tag{44}$$

Werden die beiden endlichen Glieder neben den unendlichen Gliedern $\delta(t)$ vernachlässigt, dann gilt

$$b = k + c, \tag{45}$$

und drückt man die Lösung der Differentialgleichung mit dem gegebenen Wert a aus, dann wird

$$y(t) = (k + c)\,e^{-at}, t \geqq 0. \tag{46}$$

Betrachtet man den Zusammenhang (45) als eine Regel, dann braucht man den zwischenliegenden Gedankengang nicht jedesmal durchzugehen.

Wenden wir uns nun der anderen Lösungsmethode zu! Auf Grund der Differentialgleichung (35) kann die Laplace-Transformation mit (16) unmittelbar durchgeführt werden, und man hat

$$pY - c + aY = k, \tag{47}$$

$$Y(p) = \frac{k + c}{p + a} . \tag{48}$$

Die inverse Transformierte lautet

$$y(t) = (k + c)\, e^{-at}, \quad t \geqq 0 . \tag{49}$$

Das Ergebnis stimmt natürlich mit dem unter (46) gegebenen überein, bloß war das Verfahren einfacher.

Verfährt man schließlich nach der »gemischten« Methode, dann hat man die Differentialgleichung (36) zu transformieren, aber die Regel (34) anzuwenden, woraus man

$$p\, Y(p) - b + a\, Y(p) = k \tag{50}$$

und mit (45)

$$Y(p) = \frac{2k + c}{p + a} \tag{51}$$

erhält. Wir stehen also vor dem unrichtigen Ergebnis

$$y(t) = (2k + c)\, e^{-at}, \quad t \geqq 0 . \tag{52}$$

Nach dieser Methode können wir nur dann ein richtiges Ergebnis erhalten, wenn die in der Mathematik sehr ungewöhnlichen »Ausnahmeregeln« angewendet werden [2].

Der praktische Unterschied zwischen den beiden richtigen Methoden wäre noch augenfälliger, wenn die Erregerfunktion mehrere Dirac-Impulse enthielte, wenn also die Erregung die Form

$$g(t) = h(t) + \sum_{i=0}^{n} k_i\, \delta(t - t_i), \qquad t \geqq 0 \tag{53}$$

hätte.

Nach dem strengen mathematischen Verfahren kann die Differentialgleichung immer nur in einem $t_k < t < t_{k+1}$ Intervall gelöst werden. Am Anfang jedes neuen Intervalles muß die Bedingung (45) über die rechnerische Ermittlung der Anfangsbedingung von neuem erfüllt werden. Mit Hilfe unserer Methode hingegen läßt sich die Laplace-Transformierte aus (53) unmittelbar ableiten, und die einzige unerläßliche Anfangsbedingung ist — unabhängig von der Zahl der Unstetigkeitsstellen — der Anfangswert $y(-0)$.

Nehmen wir nun ein anderes Beispiel, das zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung führt! Der Abb. 3 entsprechend wirke eine Feder und eine äußere Kraft auf eine sich bewegende Masse. In der Abbildung sind auch die elektrotechnischen Analoga dieses Problems eingetragen.

Die Differentialgleichung für alle drei Fälle schreibt sich zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y = g(t), \tag{54}$$

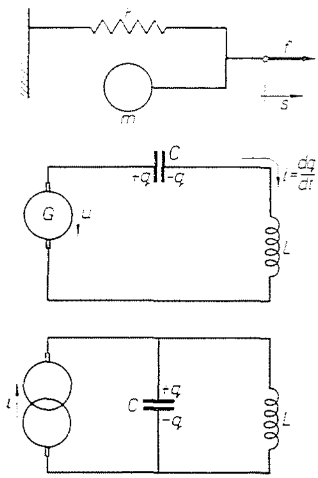


Abb. 3

wo in den einzelnen Fällen

$$\begin{array}{ccc} y & \omega_0^2 & g(t) \\ s & k/m & f(t)/m \\ q & 1/LC & u(t)/L \\ q & 1/LC & \mathrm{d}i/\mathrm{d}t\,. \end{array} \tag{55}$$

Es sei $g(t) = \delta(t)$, und die Anfangsbedingung der Einfachheit halber

$$y(-0) = 0,\; y'(-0) = 0. \tag{56}$$

Dem strengen mathematischen Verfahren gemäß ist die Laplace-Transformierte mit den Bezeichnungen $y(+0) = b$, $\dot{y}(+0) = c$:

$$p^2 Y - pb - c + \omega_0^2\, Y = 0, \tag{57}$$

$$Y(p) = \frac{p\,b + c}{p^2 + \omega_0^2}, \tag{58}$$

woraus

$$y(t) = b \cos \omega_0 t + \frac{c}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad t > 0. \tag{59}$$

Zu ermitteln sind dann noch die Konstanten b und c. Im Augenblick $t = +0$ kann $\dot{y}$ schon einen endlichen Wert annehmen, y selbst dagegen nicht, folglich ist $b = 0$, während anhand von (54) im Augenblicke $t = 0$

$$\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right)_{t=0} = [\dot{y}(+0) - \dot{y}(-0)]\,\delta(t) + \ddot{y}(0) \tag{60}$$

wird, womit man in der schon gezeigten Weise

$$c = \dot{y}(0) = 1 + \dot{y}\,(-0) = 1, \tag{61}$$

und schließlich die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \tag{62}$$

erhält. Nach der beschriebenen Methode schreibt sich die transformierte Gleichung unter Berücksichtigung der Null-Anfangsbedingungen zu

$$p^2 Y + \omega_0^2\, Y = 1 \tag{63}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 + \omega_0^2}, \tag{64}$$

woraus unmittelbar

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

geschrieben werden kann.

Betrachten wir nun eine andere Variation der »gemischten« Methode[1]! Das zitierte Werk wendet beim gegebenen Beispiel das folgende Verfahren an. Es wird angenommen, daß $y(+0) = 0$ und $(dy/dt)_{t=+0} = 0$. Daraus erhält man nach Transformation die Gleichung (63) bzw. die Lösung (64). Scheinbar ist also alles in Ordnung. Die Bedingung $y(+0) = 0$ wird erfüllt, doch ist

$$\frac{dy}{dt} = \cos \omega_0 t = 1, \quad \text{wenn } t = 0, \tag{66}$$

d. h. die Aufgabe erfüllt die angenommene Anfangsbedingung nicht, derzufolge der Anfangswert der Derivierten gleich Null ist.

Zusammenfassung

Bei der Lösung zahlreicher technischer und physikalischer Probleme kann die Methode der Laplace-Transformation mit Vorteil angewendet werden. Einen der wichtigsten Sätze der Methode bildet der Zusammenhang über die Laplace-Transformierte des Differentialquotienten. Der strengen mathematischen Behandlung gemäß müssen die Unstetigkeitsstellen der Funktion aus der Untersuchung ausgeschlossen werden, und $df/dt = \dot{f}(t)$ läßt sich nur an den endlichen Stellen definieren. In diesem Falle ist

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = pF(p) - f(-0) - \sum_{i=0}^{n} [f(t_i + 0) - f(t_i - 0)]e^{-p_i t_i},$$

worin mit t_i die Unstetigkeitsstellen der Funktion $f(t)$ bezeichnet werden. Ist die Funktion nur an der Stelle $t_0 = 0$ unstetig, dann erhält man

$$\mathscr{L}\dot{f}(t) = pF(p) - f(+0).$$

Da physikalisch die Größe $f(-0)$ als Anfangsbedingung angegeben ist, wird dieses Verfahren auch im Falle einer einzigen Unstetigskeitsstelle langwierig sein.

Wenn die Derivierte der unstetigen Funktion mit dem Dirac-Impuls $\delta(t)$ ergänzt und formell als eine kontinuierliche, beschränkte Funktion behandelt wird, dann erhält man für die Laplace-Transformierte dieser verallgemeinerten Derivierten $f'(t)$ unabhängig von den Unstetigkeitsstellen

$$\mathscr{L}_0 f'(t) = pF(p) - f(-0).$$

Dieses Verfahren liefert technisch wertvolle Informationen über die Derivierte und ist überdies auch bedeutend einfacher. Auch die Mischung der beiden Methoden ist in der Fachliteratur verbreitet, doch enthält sie innere Widersprüche und kann gegebenenfalls zu falschen Ergebnissen führen.

Es sei noch bemerkt, daß die gesuchte und die zu differenzierende Funktion in einem wirklichen System aus Energie-Gründen nur dann unstetig ist, wenn die Erregerfunktion (z. B. äußere Kraft, Generatorspannung) selbst unendlich wird wie der Dirac-Impuls. Diesem Fall aber kommt — besonders in der Regelungstechnik — größte Wichtigkeit zu.

Literaturverzeichnis

1. Churchill, R. V.: Operational Mathematics. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1958.
2. Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg, München. 1956.
3. Mikusiński, J.: Operatorenrechnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1957.
4. Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1956.
5. Fodor, Gy.: Elektrotechnika, **50**, 1—2 (1957).

Gy. Fodor; Budapest XI. Műegyetem rakpart 3. Ungarn.