

ÜBER DIE FELDSTÄRKE EINER FLÄCHENLADUNGSSCHICHT

Von

T. FREY

Lehrstuhl für Mathematik an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 2. Februar 1960)

1. Einleitung

Betrachten wir ein stückweise glattes, von *Jordan*-Kurven begrenztes, gerichtetes Flächenstück F , bedeckt mit der integrierbaren Flächenladungsdichte $\sigma(r)$. Bekanntlich wird das Potentialfeld dieser Ladungsschicht durch das Integral

$$U(\mathbf{r}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} df_{\varrho} \quad (\mathbf{r} \notin F) \quad (1.1)$$

angegeben. Bekannt ist ferner, daß dieses Integral einen eindeutig bestimmten Grenzwert besitzt, falls \mathbf{r} dem $\varrho \in F$ zustrebt. Für $\mathbf{r} \notin F$ kann man die Feldstärke — u. zw. durch Tausch der Reihenfolge des Differenzierens und Integrierens zu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} df_{\varrho} = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho) \cdot (\mathbf{r} - \varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|^3} df_{\varrho} \quad (1.2)$$

schreiben.

$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ besitzt im allgemeinen keinen Grenzwert für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F$. Auch zweiseitige Grenzwerte hat \mathbf{E} nur unter der Voraussetzung weiterer Bedingungen. Im weiteren soll ein kurzer Beweis dafür geliefert werden, daß das Integral (1.2) zweiseitige radiale Grenzwert* für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F^*$ besitzt, falls $\sigma(\varrho)$ und das normale Einheitsvektorfeld von F eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung im betrachteten Punkte von F erfüllt. Es soll ferner ein Gegenbeispiel dafür gegeben werden, daß für die stetige Ladungsdichte bzw. für das glatte Flächenstück vermutlich gleichfalls kein radialer Grenzwert existiert, d. h. daß hier die *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in gewisser Hinsicht ebenso unerläßlich ist.

* Den Grenzwert nennen wir radial, wenn \mathbf{r} einer glatten Kurve $K: \mathbf{r}(t)$ entlang dem $\varrho \in F^*$ zustrebt und

$$\mathbf{r}[t(\varrho)] \cdot \mathbf{n}(\varrho) \neq 0$$

gültig ist. $\mathbf{n}(\varrho)$ ist der normale Einheitsvektor von F in ϱ , F^* hingegen die Menge innerer Punkte von F .

2. Existenzbeweise

Betrachten wir vorerst einen von *Jordan-Kurven* begrenzten geschlossenen Ebenenbereich B und bedecken wir ihn mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{t})$. Es sei vorausgesetzt, daß σ *L*-integrierbar an B ist, daß ferner σ einer *Dini-Lipschitzschen* Bedingung im inneren Punkt $\mathbf{t}_0 \in B^*$ genügt, d. h., daß

$$|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)| \leq C_1 |\log |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||^{-(1+d)} \quad (d > 0) \quad (2.1)$$

für genügend kleine $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|$ Gültigkeit hat. Das Potential bzw. die Feldstärke ist dann in $\mathbf{x} \notin B$ durch

$$U(\mathbf{x}) = \int_{(B)} \frac{\sigma(\mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|} d\mathbf{f}_t \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{(B)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.2)$$

angegeben. Betrachten wir speziell den Punkt

$$\mathbf{x}_0(\mathbf{t}) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{n}t, \quad (2.3)$$

in welchem \mathbf{n} der normale Einheitsvektor der angegebenen Ebene ist.

Hilfssatz 2.1. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)$ besitzt neben den obigen Bedingungen Grenzwerte auch für $t \rightarrow 0 + 0$, auch für $t \rightarrow 0 - 0$ und es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \mathbf{E}[\mathbf{x}_0(t)] - \lim_{t \rightarrow 0-0} \mathbf{E}[\mathbf{x}_0(t)] = \mathbf{E}_+(\mathbf{t}_0) - \mathbf{E}_-(\mathbf{t}_0) = 4\pi\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Beweis: Es sei $|t|$ klein genug und $\varepsilon > 0$ sei so gewählt, daß die Kreisfläche K um \mathbf{t}_0 mit dem Radius ε ganz im Innern von B liege. Man betrachte weiters $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0)$ als Summe der Feldkräfte

$$\mathbf{E}_I(\mathbf{x}_0) = \int_{(B-K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.5)$$

bzw.

$$\mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.6)$$

\mathbf{E}_I besitzt natürlich einen Grenzwert für $t \rightarrow 0$, da \mathbf{t}_0 nicht in $B - K$ liegt. Es gilt ferner

$$|\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{E}_I(\mathbf{t}_0) \mp 2\pi\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}| = O(|\log |\varepsilon||^{-d}) + O(|\log |t||^{-d}), \quad (2.7)$$

wo ein $-$ bzw. $+$ Zeichen zu setzen ist, je nachdem, ob $t > 0$ bzw. $t < 0$ feststeht. [(2.7) enthielt natürlich auch (2.4).] Um dies zu erkennen, werden wir auch \mathbf{E}_{II} trennen, und zwar sei \mathbf{E}_{II} superponiert betrachtet als Summe der Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}^*(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t}_0) \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t \quad (2.8)$$

von der konstanten Ladungsdichte $\sigma(\mathbf{t}_0)$ zustande gebracht, bzw. als Summe der Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}^{**}(\mathbf{x}_0) = \int_{(K)} \frac{[\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.9)$$

Es seien schließlich auch \mathbf{E}_{II}^* und \mathbf{E}_{II}^{**} in zwei Komponenten, nämlich in eine dem Normalvektor der Ebene parallele und in eine der Ebene parallele Komponente zerlegt:

$$\mathbf{E}_{II}^* = \mathbf{E}_{II;n}^* + \mathbf{E}_{II;P}^*; \quad \mathbf{E}_{II}^{**} = \mathbf{E}_{II;n}^{**} + \mathbf{E}_{II;P}^{**}. \quad (2.10)$$

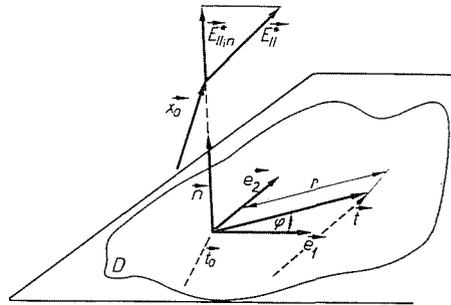


Abb. 1

Um diese Größen bestimmen zu können, führen wir die Polarkoordinaten r, φ d. h. $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 + r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2$ ein. Damit hat man (siehe Abb. 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \mathbf{E}_{II}^* &= \pm |\mathbf{E}_{II;n}^*| = \sigma(\mathbf{t}_0) \cdot \int_{(K)} \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t = \\ &= \pm \sigma(\mathbf{t}_0) \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{t}{(t^2 + \varrho^2)^{3/2}} \varrho d\varrho d\varphi = \mp 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) (t^2 + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^t = \\ &= \pm 2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) \mp \frac{2\pi \sigma(\mathbf{t}_0) \cdot t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} = \pm 3\pi \sigma(\mathbf{t}_0) + O_\varepsilon(|t|), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei obere bzw. untere Vorzeichen zu nehmen sind, je nachdem, ob $\mathbf{x}_0(t)$ in jenem Halbraum liegt, nach dem \mathbf{n} (von \mathbf{t}_0 ausgehend) zeigt, bzw. umgekehrt.

Der Symmetrie-Eigenschaften von K bzw. der integrierenden Funktion gemäß folgt ferner, daß auch

$$\mathbf{E}_{II;P}^*(\mathbf{x}_0) \equiv 0 \quad (2.12)$$

Gültigkeit hat.

Weiters gilt — man benützt hier auch (2.11) —

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{n} \mathbf{E}_{\text{II}}^{**}| &= |\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}; \mathbf{n}| \leq \int_{(K)} \frac{|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})| d\mathbf{f}_i \leq \\
 &\leq C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{|t| \varrho d\varrho}{|\log|\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} d\varphi \leq 2\pi C_1 \int_0^\varepsilon \frac{|t| \varrho d\varrho}{|\log|\varepsilon||^{1+d} (t^2 + \varrho^2)^{3/2}} = \\
 &= 2\pi C_1 \frac{1}{|\log|\varepsilon||^{1-d}} \{1 + O_\varepsilon(t)\} = O\left(\frac{1}{|\log|\varepsilon||^{1-d}}\right) \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}; P| &\leq \int_{(K)} \frac{|\sigma(\mathbf{t}) - \sigma(\mathbf{t}_0)|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}|^3} |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{t})_P| d\mathbf{f}_i \leq \\
 &\leq C_1 \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\varrho}{|\log|\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} \varrho d\varrho \leq 2\pi C_1 \int_0^t \frac{\varrho^2 d\varrho}{|\log|\varrho||^{1+d} (\varrho^2 + t^2)^{3/2}} \leq \\
 &\leq 2\pi C_1 \int_0^t \frac{|t| \cdot \varrho \cdot d\varrho}{|\log|t||^{1+d} (t^2 + \varrho^2)^{3/2}} + 2\pi C_1 \int_t^\varepsilon \frac{\varrho^2 d\varrho}{|\log|\varrho||^{1+d} \cdot \varrho^3} = \quad (2.14) \\
 &= O\left(\frac{1}{|\log|t||^{1+d}}\right) + 2\pi C_1 \left[\frac{1}{d|\log|\varrho||^d}\right]_t^\varepsilon = O\left(\frac{1}{|\log|t||^d}\right) - O\left(\frac{1}{|\log|\varepsilon||^d}\right).
 \end{aligned}$$

(2.10), (2.11), (2.12), (2.13) und (2.14) lassen die Richtigkeit von (2.7) erkennen, womit wir den Hilfssatz 2.1. bewiesen haben.

Es sei nun wieder (2.1) vorausgesetzt, und \mathbf{a} ein beliebiger Einheitsvektor, der aber nicht senkrecht zu \mathbf{n} steht, d. h. es sei $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} > 0$. Betrachten wir nun den Punkt

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{a} \cdot t \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} > 0). \quad (2.15)$$

Hilfssatz 2.2. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1)$ besitzt mit den obigen Bedingungen — d. h. mit (2.1) und (2.15) — auch Grenzwerte für $t \rightarrow 0 + 0$, und für $t \rightarrow 0 - 0$ und (2.4) ist auch jetzt gültig.

Beweis: Es sei wieder $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß die Kreisfläche K um \mathbf{t}_0 mit dem Radius ε ganz im Innern von B liege; weiters sei $|t| < \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \varepsilon}{3}$. Es sei ferner wieder $\mathbf{E}(\mathbf{x}_1)$ als Summe von \mathbf{E}_I unter (2.5) und \mathbf{E}_{II} unter (2.6) betrachtet. \mathbf{E}_I besitzt dann natürlich auch jetzt einen Grenzwert für $t \rightarrow 0$. Wir zeigen nun, daß (2.7) auch jetzt besteht, indem wir auch jetzt \mathbf{E}_{II} den Gleichungen (2.8) bzw. (2.9) gemäß in zwei Teile trennen. Es sei weiters die Orthogonalprojektion von \mathbf{x}_1 auf K mit \mathbf{t}_1 bezeichnet, und es sei L der Kreis um \mathbf{t}_1 mit dem

Um nun $\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}$ abschätzen zu können, betrachten wir die neue Ebene S durch \mathbf{t}_0 , mit dem Normalvektor \mathbf{a} und belegen sie mit einer Ladungsschicht $\zeta = \zeta(\mathbf{r})$, wo also \mathbf{r} einen laufenden Punkt auf S bezeichnet. Es sei hierbei eine eindeutige und schlichte Abbildung

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t}; \quad \mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 \quad (2.24)$$

angegeben, und zwar durch eine zu \mathbf{a} parallele Projektion; es gelte also die Identität

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{A}\mathbf{t}) \equiv [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{A})] \cdot \mathbf{t} \equiv 0.$$

Es sei weiters die Projektion von K auf S mit P bezeichnet. $\zeta(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{A}\mathbf{t})$ sei nun folgendermaßen definiert:

$$\zeta(\mathbf{r}) = \zeta(\mathbf{A}\mathbf{t}) = [\sigma(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot \frac{1}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}} \cdot \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{x}_1|^2}. \quad (2.25)$$

Wir werden nun zuerst abschätzen, wie groß die Abweichung der mittels $\zeta(\mathbf{r})$ zustande gebrachten Feldstärke

$$\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}) = \int_{(P)} \frac{\zeta(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (2.26)$$

und der Feldstärke $\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}(\mathbf{x})$ im Punkte $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t)$ ist: im zweiten Schritt werden wir $\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}_1(t)]$ selbst abschätzen.

Es sei also inerst das »Feldstärkenelement«

$$d\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i) = [\sigma(\tau_i) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \frac{(\mathbf{x}_1 - \tau_i)}{|\mathbf{x}_1 - \tau_i|^3} d\mathbf{f}_i^{(i)}, \quad (2.27)$$

zustande gebracht mittels des Flächenelementes $d\mathbf{f}_i^{(i)}$ mit dem repräsentierenden Punkt τ_i bzw. mittels des Ladungselementes

$$[\sigma(\tau_i) - \sigma(\mathbf{t}_0)] \cdot d\mathbf{f}_i^{(i)}$$

einerseits, mit dem »Feldstärkenelement«

$$d\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_1; \varrho_i) = \zeta(\varrho_i) \frac{(\mathbf{x}_1 - \varrho_i)}{|\mathbf{x}_1 - \varrho_i|^3} d\mathbf{f}_r^{(i)} \quad (2.28)$$

zustande gebracht mittels des Projektionselementes $d\mathbf{f}_r^{(i)}$ von $d\mathbf{f}_i^{(i)}$ bzw. mittels des Ladungselementes

$$\zeta(\varrho_i) d\mathbf{f}_r^{(i)}$$

andererseits verglichen, wo der repräsentierende Punkt $\varrho_i = \mathbf{A} \tau_i$ die Projektion von τ_i darstellt. Es ist leicht einzusehen, daß

$$|d\mathbf{E}_{\text{II}}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)| \equiv |d\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_1; \varrho_i)| \quad (2.29)$$

sein Maximum für $\varphi_0 = 0$ d. h. für $\overline{E^*D^*}/\overline{AD^*}$ an. In der anderen Hälfte sind für $\varphi^* = \varphi - \text{sign } \varphi\pi$ — aus Symmetriegründen — bei fixiertem r \overline{AE} und \overline{ED} ebenso groß, wie sie für φ waren, es gilt aber hier $\overline{AE} < \overline{AD}$ und darum ist $\overline{DE}/\min(\overline{AE}; \overline{AD})$ kleiner, als für φ : $\overline{DE}/\min(\overline{AE}; \overline{AD})$ nimmt also bei fixiertem r sein Maximum für $\varphi = 0$ an, mithin gilt gemäß Abb. 3.

$$|e_i - e_{ii}| \leq \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}}$$

mit $0 < \alpha = \arccos(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) < \frac{\pi}{2}$, $\sigma = t \sin \alpha$ und $\tau = \tau(t) = t \cos \alpha$.

Es wird mithin

$$|d\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_1; \varrho_i) - d\mathbf{E}_{ii}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)| \leq \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} |d\mathbf{E}_{ii}^{**}(\mathbf{x}_1; \tau_i)|$$

und gemäß (2.14)

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_1) - \mathbf{E}_{ii}^{**}(\mathbf{x}_1)| &\leq \int_{(K)} |d\mathbf{E}_i - d\mathbf{E}_{ii}^{**}| \leq \\ &\leq \iint_{(K)} \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{(r - \sigma)^2 + \tau^2}} \cdot \frac{|\sigma(r; \varphi) - \sigma(0)|}{[(r - \sigma)^2 + \tau^2]} r \, dr \, d\varphi \leq 2\pi \sin \alpha \int_0^\varepsilon \frac{r^2 \cdot \log |r|^{-(1+d)}}{[(r - \sigma)^2 + \tau^2]^{3/2}} \, dr \leq \\ &\leq 2\pi \sin \alpha \left\{ \int_0^{2\sigma_0} \frac{4\sigma^2 \, dr}{|\log 2\sigma|^{1+d} \cdot \tau^2} + \int_{2\sigma_0}^\varepsilon \frac{r^2 \, dr}{|\log r|^{1+d} \cdot \frac{1}{8} r^3} \right\} \leq 2\pi \sin \alpha \left\{ 8 \frac{\sigma^2}{\tau^2} |\log 2\sigma|^{1+d} + \right. \\ &\quad \left. + 8 \frac{1}{d} \frac{1}{|\log \varepsilon|^d} \right\} = O\left(\frac{1}{|\log |t||^{1+d}}\right) + O\left(\frac{1}{|\log \varepsilon|^d}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

falls σ , d. h. t genug klein, und zwar kleiner als ε ist.

Um nun $|\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_1)|$ selbst abzuschätzen, zeigen wir, daß der *Hilfssatz 2.1* anwendbar ist indem wir nachweisen, daß $\zeta(\mathbf{r})$ im Punkte $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathbf{t}_0$ eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung erfüllt. Da hier

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|$$

gültig ist, und der erste Faktor von ζ , nämlich $\sigma(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{t}_0)$ definitionsgemäß eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung erfüllt und eben deshalb in K beschränkt ist, da weiters

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t}_0)\beta(\mathbf{t}_0)| &= |a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}_0) + a(\mathbf{t})\beta(\mathbf{t}_0) - a(\mathbf{t}_0)\beta(\mathbf{t}_0)| \leq \\ &\leq \sup_i |a_i \cdot |\beta(\mathbf{t}) - \beta(\mathbf{t}_0)|| + \sup_i |\beta_i \cdot |a(\mathbf{t}) - a(\mathbf{t}_0)|| \end{aligned} \quad (2.31)$$

Gültigkeit hat, so brauchen wir nur zu beweisen daß der zweite Faktor von ζ ebenfalls eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in t_0 (um so mehr eine *Lipschitzsche* Bedingung) erfüllt und eben deswegen auch in a beschränkt ist. Der zweite Faktor von ζ , nämlich

$$f(\mathbf{x}_1; t) = \frac{|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2}$$

ist aber differenzierbar in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, und sein Gradientenvektor

$$\text{grad}_t f = \frac{2|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2 \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{A}^{-1} - 2|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^2 \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}_1|^4}$$

besitzt einen endlichen, und zwar als Funktion von $t = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{t}_0|$ einen gleichmäßig beschränkten (die obere Schranke hängt nur von $\|\mathbf{A}^{-1}\|$, d. h. $\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}$ ab).

Grenzwert für $t \rightarrow t_0$. Dem *Hilfssatz 2.1* gemäß folgt also, daß

$$|\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_0)| = O\left(\frac{1}{|\log |t||^d}\right) + O\left(\frac{1}{|\log |\varepsilon||^d}\right)$$

da

$$\zeta(\mathbf{r}_0) = \zeta(\mathbf{t}_0) = 0.$$

(2.19), (2.20), (2.23), (2.30), (2.31) und (2.32) zeigen nun, daß die Abschätzung (2.4), d. h. der *Hilfssatz 2.2* Gültigkeit hat.

Hilfssatz 2.3. $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ besitzt mit der Bedingung (2.1) einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}_0 \in B^*$.

Beweis: Es strebe \mathbf{x} längs einer in \mathbf{t}_0 glatten Kurve $K: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ gegen $\mathbf{t}_0 = \mathbf{x}(0) \in B^*$. Bezeichnen wir den Tangenteneinheitsvektor von K in \mathbf{t}_0 mit \mathbf{s} , dann stehen \mathbf{s} und \mathbf{n} den Voraussetzungen gemäß nicht senkrecht auf einander, d. h. es gilt

$$|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| > 0.$$

K kann man auch in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{a}(t) \cdot t \quad (|\mathbf{a}(t)| \equiv 1)$$

schreiben, und — da K in \mathbf{t}_0 glatt ist —, eine $\delta > 0$ so angeben, daß

$$|\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n}| \geq \frac{1}{2} |\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}| = \frac{1}{2} \vartheta_0 > 0 \quad \text{für } 0 \leq |t| \leq \delta \quad (2.33)$$

gelte (daß also $\mathbf{a}(t)$ zur Sehne von K parallel ist!).

Da nun der Gleichung (2.31) gemäß die obere Schranke von $|\text{grad}_t f|$ nur von $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|^{-1}$ abhängt, d. h. die Ordorelationen im *Hilfssatz 2.2* gleichmäßig in Hinsicht auf $t = |\mathbf{x} - \mathbf{t}_0|$ bestanden, und da aus (2.33) auch jetzt eine gleichmäßige obere Schranke von $|\text{grad}_t f|$ folgt, hat der *Hilfssatz 2.3* volle Gültigkeit.

Satz 2.4. Es sei F ein glattes, von Jordan-Kurven begrenztes, mit der L -integrierbaren Ladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ bedecktes Flächenstück, und es genüge das normale Einheitsvektorfeld $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ sowie $\sigma(\mathbf{r})$ einer Dini—Lipschitzschen Bedingung im inneren Punkte \mathbf{r}_0 von F , d. h. es sei $\mathbf{r}_0 \in F^*$ und

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}(\mathbf{r}_0)| \leq C_2 \frac{1}{|\log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||^{1+C_3}} \quad (C_3 > 0) \quad (2.34)$$

bzw.

$$|\sigma(\mathbf{r}) - \sigma(\mathbf{r}_0)| \leq C_4 \frac{1}{|\log |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||^{1+C_5}} \quad (C_5 > 0) \quad (2.35)$$

für $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq \mu_0$. Es besitzt dann die Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (\mathbf{x} \notin F) \quad (2.36)$$

einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}_0 \in F^*$: angenommen, daß $[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cong 0$, je nachdem, ob $t \cong 0$ ist, gilt

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}_0) - \mathbf{E}_-(\mathbf{r}_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)] - \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{E}[\mathbf{x}(t)] = 4\pi\sigma(\mathbf{r}_0) \mathbf{n}(\mathbf{r}_0). \quad (2.37)$$

Beweis: Wir bezeichnen die Schmiegeebene von F in \mathbf{r}_0 mit S , und es sei eine $0 < \varepsilon < \mu_0$ so gewählt, daß die zu $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$ parallele Projektion der Punkte \mathbf{r} des gemeinsamen Teiles von F und der Kugel R_ε mit dem Radius ε um \mathbf{r}_0 : F_ε im Punkt \mathbf{t} von S (pünktlicher: S_ε) ein-eindeutig sei.

Die Feldstärke

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) = \int_{(F-F_\varepsilon)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r \quad (2.38)$$

besitzt dann natürlich einen Grenzwert, und zwar: $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0)$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}_0$. Betrachten wir nun den anderen Teil der ursprünglichen Feldstärke

$$\mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}) = \int_{(F_\varepsilon)} \frac{\sigma(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{f}_r, \quad (2.39)$$

falls \mathbf{x} einer in \mathbf{r}_0 glatten Kurve $K: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ entlang in Richtung $\mathbf{r}_0 = \dot{\mathbf{x}}(0)$ strebt. Der Voraussetzungen gemäß kann man natürlich annehmen, daß

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) > 0, \quad (2.40)$$

daß ferner $\varepsilon > 0$ gleichfalls so gewählt ist, daß

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)] \geq \frac{1}{2} \mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(0) > 0 \quad (2.41)$$

auch für $|t| \leq \varepsilon$ zu Recht besteht. Es sei nun S_ε mit der Ladungsdichte

$$\zeta_t(\mathbf{t}) = \sigma[\mathbf{r}(\mathbf{t})] \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})|^2}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}(t)|^2} \cdot \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} \quad (2.42)$$

belegt. Sodann wollen wir die Feldstärke

$$\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}) = \int_{(S_\varepsilon)} \frac{\zeta_t(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_t. \quad (2.43)$$

betrachten, wozu vorerst bemerkt werden soll, daß $\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)]$ dem Hilfssatz 2.3 gemäß einen zweiseitigen Grenzwert für $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(0) = \mathbf{t}_0 = \mathbf{r}_0$ besitzt, und zwar gilt die Relation

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)] - \lim_{t \rightarrow 0-0} \mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)] = 4\pi \zeta(\mathbf{t}_0) \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) = 4\pi \sigma(\mathbf{r}_0) \mathbf{n}(\mathbf{r}_0). \quad (2.44)$$

Dazu braucht man nur zu bedenken, daß hier ζ_t auch selbst vom Parameter t abhängt, aber — wie schon beim Beweis des Hilfssatzes 2.2 bemerkt —

$$\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(t)|^2}{|\mathbf{t} - \mathbf{x}(t)|^2} \quad (2.45)$$

in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ einer *Lipschitzschen* Bedingung mit dem Exponenten 1 genügt, und zwar gleichmäßig für 2.13 $0 \leq |t| \leq \varepsilon$. Es ist weiters nachzuweisen, daß der Faktor $|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|^{-1}$ gleichfalls eine *Dini—Lipschitzsche* Bedingung in $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t}_0)]} \right| \equiv \left| \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - 1 \right| = \\ & = \frac{|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|}{|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|} \leq \frac{1}{|\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|} \cdot |\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) - \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]|. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nun haben wir $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß einerseits

$$|\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})| \geq \vartheta_0 > 0, \text{ d. h. } |\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]| \geq \vartheta_0 \quad (2.47)$$

für $\mathbf{r} \in F_\varepsilon$, d. h. $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ Gültigkeit habe, andererseits auch

$$C_6 |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| \leq |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq C_7 |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|, \quad (2.48)$$

für $\mathbf{r} \in F_\varepsilon$ bzw. $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ zu Recht bestehe (S_ε ist die Tangentialebene von F_ε in \mathbf{r}_0 , weshalb $|\mathbf{r} - \mathbf{t}| = o(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ gültig ist). Hieraus und aus der Voraussetzung (2.34) folgt nun direkt, daß auch

$$\left| \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}[\mathbf{r}(\mathbf{t})]} - \frac{1}{\mathbf{n}(\mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t})} \right| \leq \frac{C_8}{|\log |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0||^{1+C_8}} \quad (2.49)$$

richtig ist, d. h. daß der Hilfssatz 2.3 für $\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)]$ anwendbar ist. Wir haben nun noch nachzuweisen, daß

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t)] - \mathbf{E}_{II}[\mathbf{x}(t)]| = 0 \quad (2.50)$$

ist, denn (2.38), (2.44) und (2.50) gemäß ist dann auch unserer Satz bewiesen. Um nun (2.50) zu beweisen, werden wir — auf eine dem Beweis des Hilfssatzes 2.2 ähnliche Weise — wieder erst nur die Wirkung der einzelnen, einander entsprechenden »Ladungselemente« betrachten. Es sei also df_r ein Flächenelement der Fläche F , mit dem repräsentierenden Punkt ϱ_0 , ferner df_t das dem obigen entsprechende Element auf S , mit dem entsprechenden repräsentierenden Punkt τ_0 . Betrachten wir die »Feldstärkelemente«

$$d\mathbf{E}_{II}[\mathbf{x}; \varrho_0] = \frac{\sigma(\varrho_0) \cdot (\varrho_0 - \mathbf{x})}{|\varrho_0 - \mathbf{x}|^3} df_r,$$

bzw.

$$d\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}; \tau_0] = \frac{\zeta(\tau_0) \cdot (\tau_0 - \mathbf{x})}{|\tau_0 - \mathbf{x}|^3} df_t,$$

dann wird man auch jetzt direkt einsehen [s. auch (2.29)], daß

$$|d\mathbf{E}_{II}[\mathbf{x}(t); \varrho_0]| \equiv |d\mathbf{E}_\zeta[\mathbf{x}(t); \tau_0]|$$

gültig ist; wir brauchen also wieder nur die Abweichung der entsprechenden Einheitsvektoren, d. h.

$$|\mathbf{e}_\zeta - \mathbf{e}_{II}|$$

abzuschätzen. Zu diesem Zweck fixieren wir $t = t_0$; $|t_0| < \varepsilon$, und ferner sei

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{r}_0|} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{t}_0}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0|}.$$

Weiters führen wir in S Polarkoordinaten ein, und zwar wählen wir das Polzentrum in $\mathbf{t}_0 = \mathbf{r}_0$, die Polarachse aber durch die Projektion von $\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0$ auf S (s. Abb. 4). Es sei ferner $|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)|$ mit $\tau = \tau(\mathbf{t}_0)$, $\sqrt{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0)^2 - \tau^2}$ hingegen mit $\sigma = \sigma(\mathbf{t}_0)$ bezeichnet (s. Abb. 4). Da nun S die Tangentialebene von F , d. h. $|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| = o(|\mathbf{r} - \mathbf{t}|)$ für $\mathbf{r} - \mathbf{t} \parallel \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)$ gültig ist, da ferner die Kurve K die Fläche F nicht berührt, kann man annehmen, daß t_0 bzw. ε schon so klein sind, daß

$$\min\{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|; |\mathbf{x} - \mathbf{t}|\} \geq \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{t}| \text{ für } \mathbf{r} \in F_\varepsilon \text{ bzw. } \mathbf{t} \in S_\varepsilon$$

bei $|\mathbf{t}| \leq |t_0|$ stets Gültigkeit hat. $|\mathbf{e}_\zeta - \mathbf{e}_{II}|$ kann man nun nach demselben Gedankengang abschätzen, den wir schon beim Beweis Hilfssatzes 2.2 angegeben haben; es gilt somit (s. Abb. 4)

$$|\mathbf{e}_\zeta - \mathbf{e}_{II}| \leq \frac{\overline{BC}}{\min[\overline{AB}; \overline{AC}]} \leq 2 \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}^*} = 2 \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \sigma)^2 + \tau^2}} \cdot |\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}|.$$

Um nun $|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}|$, d. h. die Entfernung des Punktes auf der Fläche F und des entsprechenden Punktes auf der Tangentialebene S abschätzen zu können, wenden wir die Voraussetzung (2.34) an, woraus dem Mittelwertsatz gemäß folgt, daß

$$|\mathbf{r}(\mathbf{t}) - \mathbf{t}| \leq |\mathbf{t} - \mathbf{t}_0| \cdot \sup_{|\tau - \mathbf{t}_0| \leq t - t_0} [|\mathbf{n}(\tau) - \mathbf{n}(\mathbf{t}_0)|] \leq C_9 \frac{r}{|\log^{1+C_5} |r||}$$

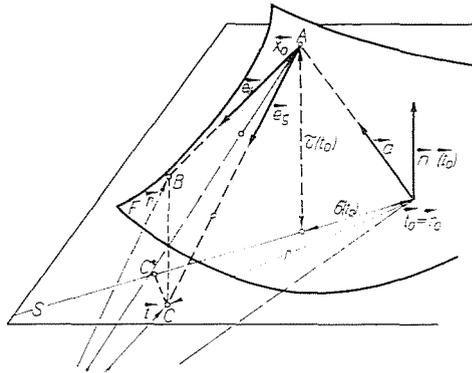


Abb. 4

für $\mathbf{t} \in S_\varepsilon$ gültig ist. Damit haben wir

$$|\mathbf{e}_\zeta - \mathbf{e}_{II}| \leq C_{10} \frac{r}{|(r - \sigma)^2 + \tau^2|} \cdot \frac{1}{|\log |r||^{1-C_5}}, \tag{2.51}$$

d. h.

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_\zeta(\mathbf{x}_0) - \mathbf{E}_{II}(\mathbf{x}_0)| &\leq \int_{S_\varepsilon} |d\mathbf{E}_\zeta - d\mathbf{E}_{II}| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon C_{10} \frac{r}{[|(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2|]^3} \cdot \frac{\sup_{t \in S_\varepsilon} |\sigma(t)|}{|\log |r||^{1-C_5}} r \, d\tau \, d\varphi \leq \\ &\leq C_{11} \cdot \sigma(\varepsilon) \int_0^\varepsilon \frac{r^2 \, dr}{[(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2]^{3/2} \cdot |\log |r||^{1-C_5}} = [\sigma(\varepsilon) = \sup_{t \in S_\varepsilon} |\sigma|] \tag{2.52} \\ &= C_{11} \cdot \sigma(\varepsilon) \left\{ \int_0^{2\sigma_0} + \int_{2\sigma_0}^\varepsilon \right\} \frac{r^2 \, dr}{[(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2]^{3/2} \cdot |\log |r||^{1-C_5}}. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung dieser Integrale werden wir davon ausgehen, daß K die Fläche F nicht berührt, um so mehr, als auch (2.41) feststeht, d. h. um so mehr, als

$$C_{12} \tau_0 \leq \sigma_0 \leq C_{13} \tau_0 \quad (2.53)$$

und eben deshalb

$$0 < \frac{\sigma_0^3}{\tau_0^3} \leq C_{14} \quad (2.53a)$$

für genügend kleine t_0 Gültigkeit hat. Es gilt ferner, daß

$$(r - \sigma_0)^2 + \tau_0^2 \geq \frac{r^2}{4}$$

für $r < 2 \sigma_0$ geschrieben werden kann, womit

$$\begin{aligned} |E_\zeta(x_0) - E_{II}(x_0)| &< C_{11} \sigma(\varepsilon) \int_0^{2\sigma_0} \frac{4\sigma_0^2 dr}{\|\log \|\sigma_0\|^{1+C_5} \tau_0^3} + \\ &+ C_{11} \sigma(\varepsilon) \int_{2\sigma_0}^\varepsilon \frac{r^2 dr}{\log \|r\|^{1+C_5} \frac{r^2}{8}} \leq \\ &\leq C_{11} \sigma(\varepsilon) \frac{8\sigma_0^3}{\|\log \|\sigma_0\|^{1+C_5}} \cdot \frac{1}{\tau_0^3} + C_{11} \sigma(\varepsilon) 8 \frac{1}{C_5} \frac{1}{\|\log \|\varepsilon\|^{C_5}}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

und weiter im Sinne von (2.53a)

$$|E_\zeta(x_0) - E_{II}(x_0)| \leq O\left(\frac{1}{\|\log \|\varepsilon\|^{C_5}}\right) + O\left(\frac{1}{\|\log \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{r}_0\|^{C_5}}\right),$$

womit wir auch den Satz 2.4 bewiesen haben.

Es sei hier noch bemerkt, daß die Voraussetzungen (2.34) bzw. (2.35) noch etwas geschwächt werden können, denn es genügt, für die Stetigkeitsmoduln von σ bzw. \mathbf{n} eine solche obere Schranke $s^{-1}(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ statt $\log^{-(1+C_5)}(|\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|)$ anzugeben, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r s(r)}$$

noch existiere.

3. Konstruktion eines einfachen Gegenbeispielles

Betrachten wir eine Kreisplatte K mit Zentrum O und Normalenvektor \mathbf{e}_3 und belegen wir sie mit der Ladungsdichte (r und φ — und weiter z — bedeuten Zylinderkoordinaten)

$$\sigma(\mathbf{t}) = \sigma(r; \varphi) = \cos \varphi \mu(r),$$

wo $\mu(r)$ mit $\mu(0) = 0$ eine stetige Funktion in $0 \leq r \leq R \leq \frac{1}{2}$ bildet. Betrachten wir die Feldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int_K \frac{\sigma(\mathbf{t})(\mathbf{x} - \mathbf{t})}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_i,$$

die von σ im Punkt $\mathbf{x} = z\mathbf{e}_3$ zustande gebracht ist, in welchem schon $|z| < \frac{R}{3}$ ist. Aus den Symmetrieeigenschaften folgt sogleich, daß $\mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ parallel zu $-\mathbf{e}_1$ ist.* Wir werden also

$$E(z) = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$$

berechnen und nachweisen, daß

$$\lim_{z \rightarrow 0} E(z)$$

gar nicht existiert, falls $\mu(r)$ nicht »genug stetig« in $r = 0$, z. B. $\mu(r) = |\log r|^{-1}$ ist. Wir haben dann für $z > 0$ z. B.

$$\begin{aligned} E(z) &= \int_{(K)} \frac{\sigma(\mathbf{t})[(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}_1]}{|\mathbf{x} - \mathbf{t}|^3} d\mathbf{f}_i = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\cos \varphi \cdot \mu(r) \cdot (-r \cos \varphi)}{(r^2 + z^2)^{3/2}} r dr \Big| d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

bzw.

$$|E(z)| = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{r^2 dr}{|\log r| (r^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_{-z}^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (r^2 + z^2)^{3/2}} >$$

* Der Leser kann aber ohne Mühe anhand von (3.1) erkennen, daß auch $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ und $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{E}(z\mathbf{e}_3)$ tatsächlich gleich 0 sind.

$$\begin{aligned}
 &> \frac{1}{2} \int_0^z \frac{r^2 dr}{|\log r| (2z^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \int_z^R \frac{r^2 dr}{|\log r| \cdot (2r^2)^{3/2}} > \frac{1}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \int_z^R \frac{dr}{r |\log r|} = \\
 &= 2^{-5/2} \{ -\log |\log R| + \log |\log z| \} = 2^{-5/2} \cdot \log \frac{\log z}{\log R},
 \end{aligned}$$

also $|E(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow 0 + 0$, was zu beweisen war.

Zusammenfassung

Das Potentialfeld bzw. die Feldstärke einer Flächenladungsschicht mit der integrierbaren Dichte σ an dem stückweise glatten, meßbaren Flächenstück F kann durch das Integral

$$U(\mathbf{r}) = \int_{(F)} \frac{\sigma(\varrho)}{|\mathbf{r} - \varrho|} df_{\varrho}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r})$$

ausgedrückt werden. Wir zeigen mit elementaren Methoden, daß \mathbf{E} einen zweiseitigen radialen Grenzwert für $\mathbf{r} \rightarrow \varrho \in F$ besitzt, falls die Flächenladungsdichte bzw. das normale Einheitsvektorfeld von F einer Dini—Lipschitzschen Bedingung in $\varrho \in F$ genügt. Mit Hilfe eines elementaren Gegenbeispiels zeigen wir auch, daß z. B. weder die Stetigkeit von σ , bzw. die des Einheitsvektorfeldes noch das logarithmische Stetigkeitsmodul dieser Funktionen keinen Grenzwert für \mathbf{E} an F sichern.

T. FREY, Budapest V. Szerb u. 23, Ungarn.