EINE NEUE METHODE ZUR LÖSUNG VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN NEBST ANWENDUNGEN

Von

I. Fenyő

Lehrstuhl für Höhere Mathematik an der Elektrotechnischen Fakultät
der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 10. Dezember, 1958)

Einleitung

Einer der vom Gesichtspunkt der Anwendung wichtigsten Zweige der Mathematik, der sich in den letzten Jahrzehnten stark entwickelte, ist die Theorie der Operatorenrechnung. Sie bietet zahlreiche Vorzüge gegenüber den klassischen Methoden der Lösung von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen. Eine Klasse von Funktionengleichungen, die eine große Analogie mit den Differentialgleichungen aufweist, ist diejenige der Differenzengleichungen. Differenzengleichungen spielen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik, in der Impuls- und Regelungstechnik eine große Rolle.

Vor kurzem ist ein kleines Buch von J. S. Zypkin erschienen, in dem er die Operatorenrechnung der Zahlenfolgen ausarbeitet und die so erhaltene Theorie zur Lösung von Differenzengleichungen anwendet. Das Wesen seiner Methode besteht darin, daß er eine Transformation definiert, die gewissen Zahlenfolgen (als Urfunktionen) Funktionen komplexer Veränderlicher zuordnet. Diese Transformation kann als das finite Analogon der Laplace-Transformation betrachtet werden. Eben deshalb weist sie dieselben Nachteile auf wie die Laplace-Transformation : Sie ist bloß auf Zahlenfolgen anwendbar, die nicht zu stark nach dem Unendlichen streben ; die Umkehrformel der Transformation ist etwas verwickelt und in vielen Fällen praktisch schwer anwendbar, usw.

Im vorliegenden Aufsatz wollen wir einen neuen Aufbau der Differenzenrechnung geben. Unsere Methode ist auf alle Zahlenfolgen anwendbar, es treten keine Konvergenzprobleme auf, und auch die praktische Behandlung ist viel einfacher als diejenige der Zypkinschen Methode. Die Grundidee ist dieselbe, von der J. Mikusinski in seinem berühmten Buche [2] zur Begründung der Operatorenrechnung ausgegangen ist.

I. Teil. Die Theorie der Differenzenrechnung

1.1 Der Ring $\mathfrak{R}$ der Zahlenfolgen

Bezeichnen wir mit $f(n)$ (oder kurz mit f) eine Funktion, die für alle nichtnegative ganze Zahlen n definiert ist. Das Symbol $f(n)$ bezeichnet also *eine Zahlenfolge als ein einziges Individuum.* Wollen wir den konkreten Wert des $(n+1)$-ten Gliedes der Folge bezeichnen, so werden wir das mit dem Zeichen f_n tun. Wird die Zahlenfolge durch eine explizite Formel definiert, so wollen wir zur Bezeichnung der *ganzen* Zahlenfolge das allgemeine Glied in Klammern der Form $\{\ \}$ legen. Betrachten wir aber bloß ein einziges Glied dieser Folge, so lassen wir die Klammer weg. So bedeutet z. B. $\{2^n\}$ diejenige geometrische Folge, deren Quotient 2 ist, wogegen 2^n ein konstanter Zahlenwert, das $(n+1)$-te Glied obiger Folge darstellt.

Nun betrachten wir den Ring aller Zahlenfolgen, den wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen wollen. Die Grundoperationen in $\mathfrak{R}$ sind die folgenden:

a) Die *Summe* zweier Zahlenfolgen $f(n)$ und $g(n)$ ist diejenige Zahlenfolge, deren $(n+1)$-tes Glied dem f_n+g_n gleich ist $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Die Summe sei mit $f(n)+g(n)$ bezeichnet.

b) Das *Produkt* $cf(n)$ einer Zahlenfolge $f(n)$ mit einer Zahl c ist diejenige Folge, deren $(n+1)$-tes Glied dem cf_n gleich ist.

c) Die *Faltung* $f(n) * g(n)$ von $f(n)$ und $g(n)$ ist folgendermaßen definiert:

$$f(n) * g(n) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j \right\}. \tag{1.1.1}$$

Die Operation der Faltung ist eine kommutative gemäß

$$f(n) * g(n) * = \left\{ \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}\, g_j \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} g_{n-k} f_k \right\} = g(n) * f(n).$$

Aus *a)* und *b)* folgt, daß zwei Zahlenfolgen $f(n)$ und $g(n)$ dann und nur dann gleich sind, wenn $f_n = g_n$, für *alle* $n \geqq 0$. Die Zahlenfolge $\{0, 0, 0, \ldots\}$ sei kurz mit 0 bezeichnet.

Grundlegend ist folgender Satz: *der Ring $\mathfrak{R}$ ist nullteilerfrei.*

Um das beweisen zu können, setzen wir voraus, daß

$$f(n) * g(n) = 0\,,$$

ferner, daß
$$f_0 = f_1 = \ldots = f_{p-1} = 0,$$

und $g_0 = g_1 = \ldots = g_{q-1} = 0$, jedoch f_p und g_q nicht verschwinden. Bilden wir das $(p+q)$-te Glied von $f+g$, dann gilt

$$[f * g]_{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} f_{p+q-k}\, g_k = f_{p+q-q}\, g_q = f_p\, g_q\,,$$

was aber nur in dem Falle gleich 0 ist, wenn entweder f_p oder g_q im Widerspruch zur Voraussetzung verschwindet.

Betrachten wir nun einige Beispiele.

1. Die Faltung einer Folge mit sich selbst gibt die zweite Iterierte oder Potenz der Zahlenfolge. Sie sei mit $f^2(n)$ bezeichnet. Es gilt also

$$f^2 = f^2(n) = f * f = \left\{ \sum_{k=0}^{n} f_{n-k} f_k \right\}.$$

Mit vollständiger Induktion kann man die höheren Potenzen (Iterierte) definieren als

$$f^n = f * f^{n-1}.$$

2. Bezeichnen wir mit δ die Zahlenfolge

$$\delta = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = 0, \\ 0, \quad ,, \quad n > 0. \end{cases}$$

Ist $f(n)$ eine beliebige Zahlenfolge, so ist

$$f * \delta = \delta * f = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \delta_{n-k} f_k \right\} = \{f_n\} = f(n), \tag{2.1.1}$$

woraus folgt, daß alle Potenzen von δ mit δ identisch sind.

3. Bestimmen wir die Potenzen der Folge

$$p = \{0, 1, 0, 0, \ldots\} = \begin{cases} 1, \text{ für } n = 1 \\ 0, \text{ für } n = 0, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Die zweite Potenz von p schreibt sich zu

$$p^2 = \left\{ \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} p_k \right\} = \begin{cases} 1, \text{ für } n = 2 \\ 0, \quad ,, \quad n \neq 2. \end{cases}$$

In gleicher Weise wird

$$p^k = \begin{cases} 0, \text{ für } n \neq k \\ 1, \quad ,, \quad n = k, \end{cases}$$

p^k ist also dem Kroneckerschen Symbol gleich.

4. Die Zahlenfolge $1(n)$ ist diejenige, deren Glieder für alle n gleich 1 sind. Ist f eine beliebige Zahlenfolge, so haben wir

$$1(n) * f(n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} f_k \right\} = \{f_0 + f_2 + \ldots + f_n\}. \tag{4,1,1}$$

So gilt beispielsweise

$$1(n)*\{u^n\}=\{1+u+\ldots+u^n\}=\left\{\frac{1-u^{n+1}}{1-u}\right\}.$$

($u \neq 1$ ist eine beliebige Zahl.)

Die Potenzen der Folge $1(n)$ sind die folgende:

$$1^2(n)=1(n)*1(n)=\{n+1\}$$

$$1^3(n)=1(n)*1^2(n)=\left\{\frac{n+2}{2}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1^k(n)=\left\{\binom{n+k-1}{k-1}\right\}\quad(k=1,2,3,\ldots) \tag{5.1.1}$$

1.2. *Der Körper der Operatoren*

Da der Ring $\mathfrak{R}$ nullteilerfrei ist, kann er eindeutig zu einem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$ erweitert werden. Bezeichnen wir die Elemente des Körpers mit

$$f(n)/g(n)\,. \qquad (f(n), g(n) \in \mathfrak{R})$$

Die Elemente des Körpers nennen wir *Operatoren*, die Zahlenfolgen sind also als spezielle Operatoren aufgefaßt.

Ein Operator f/g ist dann und nur dann eine Zahlenfolge, wenn die Gleichung

$$g*x=f$$

eindeutig im Ring $\mathfrak{R}$ lösbar ist.

Zwei Operatoren a/b und f/g sind dann als gleich zu betrachten wenn die Gleichung

$$a*g=b*f$$

gültig ist.

Die Summe zweier Operatoren ist folgendermaßen definiert:

$$a/b+f/g=(a*g+b*f)/b*g\,.$$

Das Produkt eines Operators mit einer Zahl ist wieder ein Operator, und zwar ist

$$\lambda\,(a/b)=(\lambda a)/b\,.$$

Die Faltung zweier Operatoren schreibt sich zu

$$(a/b)*(f/g)=a*f/b*g\,.$$

Schließlich deuten wir den »Quotienten« zweier Operatoren mit

$$(a/b)/(f/g) = a*g/b*f,$$

Er gehört wieder zum Körper $\mathfrak{K}$.

Das Einheitselement des Körpes $\mathfrak{K}$ ist δ, denn ist f eine beliebige Zahlenfolge, besteht $f * \delta = f$, was bedeuten will daß

$$f/f = \delta .$$

Eine wichtige Rolle spielt der Operator

$$f(n)/1(n) .$$

Wenn wir mit $\Delta f(n)$ die Differenzfolge der Folge $f(n)$ bezeichnen, d. h. wenn

$$\Delta f = \Delta f(n) = f(n+1) - f(n) ,$$

dann behaupten wir, daß

$$f(n+1)/1(n) = \Delta f(n) + f_0 \delta . \tag{1.1.2}$$

Da diese Formel mit

$$f(n+1) = 1(n) * \Delta f(n) + f_0 1(n)$$

gleichbedeutend ist, müssen wir diese letztere beweisen. Es ist aber wegen (4.1.1)

$$1(n) * \Delta f(n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \Delta f_k \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} (f_{k+1} - f_k) \right\} = f(n+1) - f_0 1(n).$$

Gleichung (1.1.2) kann auch in der Gestalt :

$$\Delta f(n) = f(n+1)/1(n) - f_0 \delta \tag{2.1.2}$$

geschrieben werden. Wenden wir diese Formel auf $\Delta^2 f(n) = \Delta(\Delta f(n))$ an, so erhalten wir

$$\Delta^2 f(n) = \Delta (\Delta f/n) = \Delta f(n+1)/1(n) - \Delta f_0 \delta .$$

Nach Betrachtung von (2.1.2) wird

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2)/1^2(n) - f_0 \delta/1(n) - \Delta f_0 \delta .$$

Mit vollständiger Induktion kann man leicht beweisen, daß

$$\Delta^k f(n) = f(n+k)/1^k(n) - f_0\,\delta/1^{k-1}(n) - \ldots - \Delta^{k-1} f_0\,\delta\,. \tag{3.1.2}$$

Dieser Zusammenhang ist für alle nicht negative ganze k gültig.

1.3. *Der Satz der Avancierung und Retardierung*

Es sei f eine beliebige Zahlenfolge, dann haben wir

$$p^\nu * f(n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} p^\nu_{n-k} f_k \right\} = \begin{cases} 0\,, & \text{für } n < k \\ f_{n-\nu}\,, & \text{für } n \geq k \end{cases}. \tag{1.1.3}$$

Diese Formel werden wir als »Satz der Avancierung« bezeichnen.

Auch die negativen Potenzen von p können mit

$$p^{-\nu} = \delta/p^\nu \qquad (\nu > 0) \tag{2.1.3}$$

definiert werden. Setzen wir $p^\circ = \delta$, so behaupten wir, daß

$$p^\nu * p^\mu = p^{\nu+\mu} \tag{3.1.3}$$

für alle ganze ν und μ gültig ist.

Sind ν und μ positive ganze Zahlen, so wenden wir die Formel (1.1.3) auf p^μ an, womit (3.1.3) für derartige Exponenten schon bewiesen ist.

Aus der definierenden Gleichung (2.1.3) folgt

$$p^\nu * p^{-\nu} = \delta = p^0\,.$$

Wenn $\nu > 0$, $\mu > 0$ und $\nu - \mu > 0$, so ist wegen

$$p^{\nu-\mu} * p^\mu = p^\nu$$

auch

$$p^{\nu-\mu} = p^\nu * p^{-\nu}$$

gültig. Falls aber $\nu - \mu < 0$, so haben wir

$$(\delta/p^{\mu-\nu}) * (\delta/p^\nu) = \delta/p^\mu,$$

d. h.

$$p^{\nu-\mu} = p^\nu * p^{-\mu},$$

womit die Relation (3.1.3) bewiesen ist.

Bilden wir die Faltung einer Folge $f(n)$ mit $p^{-\nu}$ $(\nu > 0)$ und stellen wir die Frage, wie die Folge $f(n)$ beschaffen sein muß, damit $p^{-\nu} * f$ mit einer Zahlenfolge $g(n)$ identisch sei.

Wenn $p^{-\nu} * f(n) = g(n)$ zutrifft, dann ist

$$f(n) = p^{\nu} * g(n) .$$

Setzen wir auf die rechte Seite dieser Gleichung (1.1.3) ein, so erhalten wir

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{für } n < \nu \\ g_{n-\nu}, & \text{,, } n \geqq \nu . \end{cases}$$

Die Faltung $p^{-\nu} * f(n)$ ist also dann und nur dann eine Folge, wenn

$$f_0 = f_1 = \ldots = f_{\nu-1} = 0 . \tag{4.1.3}$$

Genügt $f(n)$ dieser Bedingung, so ist

$$p^{-\nu} * f(n) = f(n + \nu) , \tag{5.1.3}$$

Es ist von praktischem Interesse, folgende Frage zu lösen : »Welchen Operator gewinnen wir durch Bildung von $p^{-\nu} * f(n)$, sofern $f(n)$ der Bedingung (4.1.3) nicht Genüge leistet«?

Es sei statt $f(n)$ die Zahlenfolge

$$\varphi(n) = f(n) - f_0 \delta - f_1 p - f_2 p^2 - \ldots - f_{\nu-1} p^{\nu-1}$$

betrachtet. Ihre ersten ν Glieder verschwinden

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\nu-1} = 0 .$$

Gemäß (5.1.3) ist also

$$p^{-\nu} * \varphi(n) = p^{-\nu} * [f(n) - f_0 \delta - f_1 p - \ldots - f_{\nu-1} p^{\nu-1}] = f(n + \nu) ,$$

oder in anderer Gestalt :

$$f(n + \nu) = p^{-\nu} * f(n) - f_0 p^{-\nu} - f_1 p^{-\nu+1} - \ldots - f^{\nu-1} p^{-1}. \tag{6.1.3}$$

Diese Formel werden wir als den »Satz der Retardierung« bezeichnen.

1.4. *Wichtige Spezialfälle*

Die bisherigen Betrachtungen sollen nun für die Zahlenfolge $f(n) = \{e^{an}\}$ angewendet werden (a ist eine beliebige reelle oder komplexe Zahl).

Mit $\nu = 1$ und $f(n) = \{e^{an}\}$ schreibt sich (6.1.3) zu

$$\{e^{a(n+1)}\} = \{e^{an}\} = p^{-1} * e^{an} - p^{-1},$$

d. h.

$$e^a p * \{e^{an}\} = \{e^{an}\} - \delta,$$

woraus folgt, daß

$$\{e^{an}\} = \delta/(\delta - e^a p). \tag{1.1.4}$$

Ist $a = 0$, erhalten wir die Formel

$$1(n) = \delta/(\delta - p). \tag{2,1,4}$$

Unter Berücksichtigung von (5.1.1) wird

$$1^2(n) = \{n+1\} = \delta/(p-\delta)^2; \qquad 1^\nu(n) = \left\{\binom{n+\nu-1}{\nu-1}\right\} = \delta/(\delta-p)^\nu.$$

Es folgt weiter aus (1.1.4)

$$\{e^{an}\}^k = \delta/(\delta - e^a p)^k,$$

was mit

$$\left\{\binom{n+k-1}{k-1} e^{an}\right\} = \delta/(\delta - e^a p)^k \tag{3.1.4}$$

gleichbedeutend ist.

Als wichtiges Beispiel erwähnen wir noch folgende Formeln:

$$\{\cos a n\} = (\delta - p\cos a)/(\delta - 2p\cos a + p^2); \quad \{\mathrm{ch}\, an\} =$$
$$= (\delta - p\mathrm{ch}a)/(\delta - 2p\mathrm{ch}a + p^2)$$
$$\{\sin an\} = ip\sin a \,|\, (\delta - 2p\cos a + p^2); \quad \{\mathrm{sh}an\} = (p\mathrm{sh}a \,|\, (\delta - 2p\mathrm{ch}a + p^2)$$

1.5. Erster Zerlegungssatz

Grundlegend für die Anwendungen ist die Behauptung:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k$$

sei ein beliebiges Polynom vom Grade $k \geqq 1$. Der mit seiner Hilfe gebildete Operator

$$\omega = \delta/P(p^{-1})$$

ist mit einer Zahlenfolge identisch.

Aus

$$P(p^{-1}) = c_0 \delta + c_1 p^{-1} + \ldots + c_k p^{-k} = (c_0 p^k + c_1 p^{k-1} + \ldots + c_k \delta)/p^k$$

folgt

$$\delta/P(p^{-1}) = p^k/(c_0 p^k + \ldots + c_k \delta).$$

Der Grad des reziproken Polynomes von P sei l $(\leqq k)$, und setzen wir

$$c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k = c_k \prod_{j=1}^{m} (1 - \zeta_j z)^{\nu_j} = c_k \prod_{j=1}^{m} (1 - e^{\alpha_j} z)^{\nu_j},$$

dann entspricht $\dfrac{1}{\zeta_j} = Z_j$ den verschiedenen Wurzeln von $C_0 Z^k + c_1 Z^{k-1} + \ldots + C_k = 0$ $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m = l)$. Gemäß dem Satz der Partialbruchzerlegung besteht folgende Identität:

$$\frac{z^{l-1}}{c_0 z^k + \ldots + c_k} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{\nu_r} \frac{A_{rs}}{(1 - e^{\alpha_r} z)^s}.$$

Die Rechenregeln des Körpers $\mathfrak{K}$ gestatten zu schreiben

$$\delta/P(p^{-1}) = p^{k-l+1} * \left(p^{l-1}/(c_0 p^k + \ldots + c_k \delta)\right) = p^{k-l+1} * \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{\nu_r} A_{rs}\, \delta/(\delta - e^{\alpha_r} p)^s.$$

Wenn wir (3.1.4) anwenden, so wird

$$\delta/P(p^{-1}) = p^{k-l+1} * \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{\nu_r} A_{rs} \{e^{\alpha_r n}\}^s.$$

Das aber ist tatsächlich eine Zahlenfolge.

Betrachten wir ein Zahlenbeispiel. Es sei

$$P(x) = x^2 - e^2(e+1)x + e^5. \qquad (e = 2{,}71\ldots)$$

Die Wurzeln von $P(x) = 0$ sind $x_1 = e^2$, $x_2 = e^3$, es sind mithin folgende Identitäten gültig:

$$e^5 x^2 - e^2(e+1)x + 1 = (1 - e^2 x)(1 - e^2 x);$$

$$\frac{1}{x^2 e^5 - e^2(e+1)x + 1} = \frac{e^3}{1-e}\left[\frac{1}{e^3}\,\frac{1}{1 - e^2 x} - \frac{1}{e^2}\,\frac{1}{1 - e^3 x}\right],$$

und man erhält

$$\delta/(p^{-2}-e^2(e+1)p^{-1}+e^5\delta)=\frac{e}{1-e}\left[\frac{1}{e}\delta/(\delta-e^2p)-\delta/(\delta-e^3p)\right]=$$

$$=p^2*\left\{e^{2n}\frac{1-e^{n+1}}{1-e}\right\}=\begin{cases}0,\text{ für } n\leqq 2\\ e^{2n}(1+e+e^2+\ldots+e^n),\text{ für } n\geqq 3.\end{cases}$$

1.6. *Über den Differenzenoperator*

Kehren wir zur Formel (2.1.2) zurück. Wenden wir für $f(n+1)$ die Formel (6.1.3) an, so erhalten wir

$$\Delta f(n)=[p^{-1}*f(n)-f_0p^{-1}]/1\,(n)-f_0\,\delta=[f(n)-f_0\,\delta]/1\,(n)*p-f_0\,\delta.$$

Führen wir die Bezeichnung $\delta/\,1(n)*p=q$, ein, dann gilt

$$\Delta f(n)=q*f(n)-f_0(q+\delta).$$

Durch vollständige Induktion ist leicht beweisbar, daß

$$\Delta^k f(n)=q^n*f(n)-(f_0\,q^{k-1}+\Delta f_0\,q^{k-2}+\ldots+\Delta^{k-1}f_0)*(q+\delta)\qquad(1.1.6)$$

für sämtliche $k\geqq 0$ gültig ist. Wenden wir diese Formel für $f(n)=\{e^{an}\}$ an ($k=1$), so erhalten wir

$$\{\Delta e^{an}\}=\{e^{a(n+1)}-e^{an}\}=(e^a-1)\{e^{an}\}-(q*\{e^{an}\}-q+\delta),$$

woraus

$$\{e^{an}\}=(q+\delta)/[q-(e^a-1)\,\delta],\qquad(2.1.6)$$

was mit der Formel

$$\{e^{an}\}^k=(q+\delta)^k/[q-(e^a-1)\,\delta]^k=\left\{\binom{n+k-1}{k-1}e^{an}\right\}\qquad(3.1.6)$$

gleichbedeutend ist. Wir erwähnen zwei wichtige Spezialfälle:

1.) $a=0$

$$1^k(n)=\left\{\binom{n+k-1}{k-1}\right\}=(q+\delta)^k/p^k;$$

2.) $a=ln2$

$$\{2^{an}\}^k=\left\{\binom{n+k-1}{k-1}2^{an}\right\}=(q+\delta)^k/(q-\delta)^k.$$

1.7. Zweiter Zerlegungssatz

Auch folgender Satz spielt in den Anwendungen eine grundlegende Rolle. Ist

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$$

ein nicht identisch verschwindendes Polynom, so ist der Operator

$$\delta/P(q) \qquad (P(q) = c_0 \delta + c_1 q + \ldots + c_k q^k)$$

mit einer Zahlenfolge identisch.

Zuerst soll diese Behauptung für ein Polynom ersten Grades bewiesen werden. Es sei also $P(x) = x - \lambda$, und wir werden nachweisen, daß

$$\delta/P(q) = \delta/(q - \lambda\delta)$$

eine Zahlenfolge bedeutet. Ein kurzes Rechnen zeigt, daß

$$\{(1+\lambda)^n\} - \lambda p * 1(n) * \{(1+\lambda)^n\} = 1(n),$$

woraus

$$p * [\{(1+\lambda)^n\} - \lambda p * 1(n) * \{(1+\lambda)^n\}] = p * 1(n),$$

was zu beweisen war.

Iterieren wir beide Seiten k-mal, so erhalten wir die Formel

$$\delta/(q - \lambda\delta)^k = p^k * \{(1+\lambda)^n\}^k. \tag{1.1.7}$$

Bezeichnen wir die verschiedenen Wurzeln des allgemeinen Polynoms

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_k x^k$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ ihre Multiplizitäten hingegen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Nach dem Satz der Partialbruchzerlegung ist dann

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\alpha_l} A_{jl} \frac{1}{(x - \lambda_l)^j},$$

und wegen der Rechenregeln im Körper $\mathfrak{K}$ können wir behaupten, daß

$$\delta/P(q) = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\alpha_l} A_{jl}\, \delta/(q - \lambda_l \delta)^j = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\alpha_l} A_{jl}\, p^j * \{(1+\lambda_l)^n\}^j. \tag{2.1.7}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält die Summe endlich vieler Zahlenfolgen, sie ist also ebenfalls eine Zahlenfolge, wie dies behauptet worden war.

II. Teil. Anwendungen

2.1. Lösung linearer Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die linearen Differenzengleichungen werden üblicherweise in folgenden Formen geschrieben:

$$a)\ c_k f(n+k) + c_{k-1} f(n+k-1) + \ldots + c_0 f(n) = g(n) \qquad (1.2.1)$$

oder

$$b)\ d_k \Delta^k f(n) + d_{k-1} \Delta^{k-1} f(n) + \ldots + d_0 f(n) = g(n). \qquad (2.2.1$$

$g(n)$ ist hier eine gegebene, beliebige Zahlenfolge, $f(n)$ hingegen die unbekannte Lösung der Gleichung. Wir werden voraussetzen, daß die Koeffizienten c_j bzw. d_j von n unabhängige Konstanten sind. Wenn die Koeffizienten c_k und d_k nicht verschwinden, so sagen wir, daß die Differenzengleichung von k-ter Ordnung ist. Bekanntlich sind die Formen *a)* und *b)* mit einander äquivalent.

Besteht das Problem darin, eine Differenzengleichung nebst gegebenen »Randwerten« $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ zu lösen, so geht man zweckmäßig von der Form *a)* aus. Ist dagegen eine Differenzengleichung bei gegebenen »Anfangswerten« $f_0, \Delta f_0, \ldots, \Delta^{k-l} f_0$ zu lösen, so wird zweckmäßig die Form *b)* betrachtet. Gewiß können die »Randwerte« in »Anfangswerte« überführt werden und umgekehrt, doch macht dies unsere Methode überflüssig. Eben darin besteht einer ihrer Vorzüge gegenüber den klassischen Lösungsarten.

A) Es ist eine Differenzengleichung k-ter Ordnung zu lösen, wenn die »Randwerte«: $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ gegeben sind. Wenden wir für die Glieder der linken Seite von (1.2.1) die Formel (6.1.3) an, so erhalten wir die Gleichung

$$(c_k p^{-k} + c_{k-1} p^{-k+1} + \ldots + c_0 \delta) * f(n) -$$
$$- c_k f_0 p^{-k} - (c_{k-1} f_0 + c_k f_1) p^{-k+1} - \ldots = g(n).$$

Bezeichnen wir mit $P(x)$ das charakteristische Polynom der zu lösenden Differenzengleichung in der Form

$$P(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots + c_0$$

und mit $Q(x)$ dasjenige Polynom, das die »Randwerte« als Koeffizienten enthält

$$Q(x) = c_k f_0 x^k + (c_{k-1} f_0 + c_1 f_2) x^{k-1} + \ldots,$$

dann ergibt sich die gesuchte partikulare Lösung der betrachteten Differenzengleichung in der Gestalt

$$f(n) = g(n)/P(p^{-1}) + Q(p^{-1})/P(p^{-1}). \qquad (3.2.1$$

Die rechte Seite von (3.2.1) ist kein Operator, sondern eine Zahlenfolge gemäß dem in 1.5 bewiesenen Satz.

Wenn wir $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$ als beliebige Parameter auffassen, so liefert (3.2.1) die allgemeine Lösung der Differenzengleichung.

Beispiele

1. Man löse die Differenzgleichung

$$f(n+2) - e^2(e+1)f(n+1) + e^5 f(n) = \delta.$$

Die gegebenen Randwerte sind: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

Gemäß (6.1.3) gilt

$$[p^{-2} - e^2(e+1)p^{-1} + e^5\delta] * f(n) - p^{-1} = \delta,$$

die Lösung unserer Gleichung (siehe das Zahlenbeispiel in 1.5) schreibt sich mithin zu

$$f(n) = \delta \,|\, (p^{-2} - e^2(e+1)p^{-1} + e^5\delta) + p^{-1} \,|\, (p^{-2} - e^2(e+1)p^{-1} + e^5\delta) =$$

$$= (p^2 + p) * \left\{ e^{2n}\frac{1-e^{n+1}}{1-e} \right\} = \left\{ 0; 1; 1 + e^2\frac{1-e^2}{1-e}; e^2\frac{1-e^2}{1-e} + \right.$$

$$\left. + e^4\frac{1-e^3}{1-e}, \ldots \right\}.$$

2. Es ist die allgemeine Formel der Fibonaccischen Zahlen zu bestimmen.

Bezeichnet $f(n)$ die Folge der Fibonaccischen Zahlen, dann gilt bekanntlich die Beziehung

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

Dies stellt aber eine (homogene) Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten dar. Wie bekannt, sind die beiden ersten Fibonaccischen Zahlen 0 und 1, die »Randwerte« mithin $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Gemäß Formel (6.1.3) erhalten wir

$$p^{-2} * f(n) - p^{-1} = p^{-1} * f(n) + f(n),$$

oder

$$(p^{-2} - p^{-1} -) * f(n) = p^{-1},$$

und daher

$$f(n) = p^{-1} / (p^{-2} - p^{-1} - \delta).$$

Dieser Ausdruck kann auch explizit ausgewertet werden, weshalb wir folgende Umwandlung vornehmen:

$$p^{-1}/(p^{-2}-p^{-1}-\delta)=p/(\delta-p-p^2)=-p/(p^2+p-\delta)\,.$$

Da aber

$$z^2+z-1=-\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{5}}z\right)\left(1-\frac{2}{1-\sqrt{5}}z\right)$$

schreibt sich das Resultat in Form:

$$f(n)=p\Big/\left[\left(\delta-\frac{2}{1+\sqrt{5}}p\right)*\left(\delta-\frac{2}{1-\sqrt{5}}p\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}p*\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\delta\Big/\left(\delta-\frac{2}{1+\sqrt{5}}p\right)-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\delta\Big/\left(\delta-\frac{2}{1-\sqrt{5}}p\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}p*\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{n\ln\frac{2}{1+\sqrt{5}}}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}e^{n\ln\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\right]=p*\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

B) Betrachten wir jetzt das Anfangswertproblem der Differenzengleichungen, wozu man zweckmäßig die Gleichung in der Gestalt von (2.2.1) betrachtet. Unter Anwendung von (1.1.6) nimmt sie folgende Form an:

$$(d_k q^k+d_{k-1}q^{k-1}+\ldots+d_0\delta)*f(n)-(f_0 q^{k-1}+\Delta f_0 q^{k-2}+\Delta f_0 q^{k-1}f_0)*$$
$$*(q+\delta)-(f_0 q^{k-2}+\Delta f_0 q^{k-3}+\ldots+\Delta^{k-2}f_0)*(q+\delta)-\ldots=g(n)\,.$$

Die Lösung schreibt sich also zu

$$f(n)=g(n)/P(q)+Q(q)/P(q)\,, \tag{4.2.1}$$

wobei $P(x)$ das charakteristische Polynom der zu lösenden Differenzengleichung bedeutet, d. h.

$$P(x)=d_k x^k+d_{k-1}x^{k-1}+\ldots+d_0$$

und

$$Q(x)=(f_0 x^{k-1}+\Delta f_0 x^{k-2}+\ldots+\Delta^{k-1}f_0)(x+1)+(f_0 x^{k-2}+$$
$$+\ldots+\Delta^{k-2}f_0)(x+1)+\ldots+f_0(x+1)\,.$$

Sind f_0, Δf_0, . . ., $\Delta_{k-1} f_0$ beliebige Parameter, so ist (4.2.1) die allgemeine Lösung der Gleichung (2.2.1). Wir müssen noch bemerken, daß (4.2.1) nach dem in 1.7 bewiesenen Satz eine Zahlenfolge ist. Die Formeln (3.1.6) und (2.1.7) ermöglichen die explizite Lösung der Gleichung.

Wir betonen, daß die gegebene Folge $g(n)$ eine beliebige ist, es werden keine wie immer gearteten Einschränkungen betrachtet und auch Konvergenzbetrachtungen sind überflüssig. Neben ihrer Einfachheit liegt eben darin der größte Vorzug der beschriebenen Methode.

Zwei Zahlenbeispiele seien betrachtet.

1. Bestimmen wir diejenige partikulare Lösung der Differenzengleichung

$$\Delta^3 f(n) = 0\,,$$

die den Anfangsbedingungen

$$f_0 = 0\,;\; \Delta f_0 = 0\,;\; \Delta^2 f_0 = 1$$

genügt.

Mit (1.1.6) erhalten wir

$$q^3 * f(n) - (q + \delta) = 0\,,$$

woraus

$$f(n) = (q + \delta) \,/\, q^3 = \delta \,/\, q^2 + \delta \,/\, q^3\,.$$

Wenden wir (1.1.7) an (mit $\lambda = 0$), so erhalten wir den expliziten Ausdruck der gesuchten Lösung

$$f(n) = p^2 * 1^2\,(n) + p^3 * 1^3\,(n) = p^2 * 1^3\,(n) = \begin{cases} 0, & \text{für } n < 2 \\ \binom{n}{2}, & \text{für } n \geqq 2. \end{cases}$$

2. Es ist die allgemeine Lösung von

$$\Delta f(n) = \{n\}$$

zu bestimmen.

Die Differenzengleichung nimmt mit Benützung des Operators q folgende Gestalt an:

$$q * f(n) - f_0 (q + \delta) = \{n\}\,;$$

woraus

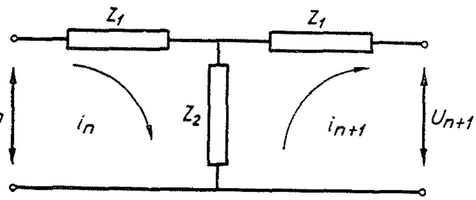
$$f(n) = \{n\} \,/\, q + f_0 (q + \delta) \,/\, q = p * 1\,(n) * \{n\} + f_0\, 1\,(n) =$$

$$= \begin{cases} fo\quad, & \text{für } n = 0 \\ \binom{n}{2} + fo, & \text{für } n \geqq 1. \end{cases}$$

2.2. Berechnung von Kettenleitern

Ein Kettenleiter soll aus N gleichartigen Maschen bestehen; jede Masche stelle einen Vierpol in T-Schaltung dar. z_1 soll den gesamten Längswiderstand der Masche, und z_2 ihren Querwiderstand bedeuten. $i(n)$ ist der Strom und $u(n)$ die Spannung. Es gilt dann bekanntlich [1. p. 15].

$$(z_1 + z_2)\, i(n) - z_2\, i(n+1) - u(n) = 0$$
$$z_2\, i(n) - (z, + z_2)\, i(n+1) - u(n+1) = 0\,.$$



Wenden wir die Formel (6.1.3) an, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$(z_1 + z_2)\, i(n) - z_2 p^{-1} * i(n) - u(n) = z_2 i_0 p^{-1}$$
$$z_2\, i(n) - (z_1 + z_2)\, p^{-1} * i(n) - p^{-1} u(n) = (z_1 + z_2)\, i_0 p^{-1} + u_0 p^{-1}\,.$$

In geordneter Form schreibt es sich folgendermaßen:

$$\left[(z_1 + z_2)\,\delta - z_2 p^{-1}\right] * i(n) - u(n) = z_2 i_0 p^{-1}$$
$$\left[z_2 \delta - (z_1 + z_2)\, p^{-1}\right] * i(n) - p^{-1} * u(n) = \left[(z_1 + z_2)\, i_0 + u_0\right] p^{-1}\,.$$

Bilden wir nun die Faltung der ersten Gleichung mit dem Operator p^{-1} und substrahieren wir die beiden Gleichungen voneinander, so erhalten wir, durch ein einfaches Rechnen

$$i(n) = \left[(z_1 + z_2)\, i_0 + u_0)\, p - z_2 i_0 \delta\right] / \left[z_2 p^2 - 2\,(z_1 + z_2)\, p + z_2 \delta\right] =$$
$$= i_0 \left\{\frac{e^{\tau n} + e^{-\tau n}}{2}\right\} - \frac{u_0}{z_2 (e^{\tau} - e^{-\tau})} \left\{e^{\tau n} - e^{-\tau n}\right\},$$

wenn wir die Bezeichnung $\mathrm{ch}\tau = \dfrac{z_1 + z_2}{z_2}$ benützen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch $u(n)$ berechnen.

Zusammenfassung

Durch Benützung der bekannten Ideen von J. MIKUSINSKI wird eine neue Begründung der Differenzenrechnung aufgebaut. Ihr Vorzug gegenüber den bisher bekannten Methoden besteht darin, daß sie leicht behandelbar und anschaulich ist. Ihre Anwendung auf ganz beliebige Zahlenfolgen ist auch von mathematischem Standpunkt aus stets einwandfrei, da Konvergenzprobleme überhaupt nicht auftreten. Die Methode wird zur Lösung von in der Technik auftretenden Differenzengleichungen und Differenzgleichungssystemen angewandt.

Literatur

1. ZYPKIN, I. S.: Differenzengleichungen der Impuls- und Regeltechnik. Verl. Technik. Berlin 1956.
2. MIKUSINSKI, J.: Rachunek operatorów. Warszawa. 1953.

Dr. I. FENYŐ, Budapest V., Szerb u. 23. Ungarn