ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR LÖSUNG GEWÖHNLICHER, LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGS-SYSTEME MIT VARIABLEN KOEFFIZIENTEN

Von

P. BAJCSAY

Lehrstuhl für Mathematik der Fakultät für Maschineningenieure (V.)
an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 20. Januar, 1959.)

I.

Es sei folgendes *System inhomogener linearer Differentialgleichungen* in der sogenannten Cauchyschen Normalform gegeben:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

Es seien ferner die Koeffizienten $a_{ik}(t)$ und die Funktionen $f_i(t)$ in dem abgeschlossenen Intervall $0 \leqq t \leqq b$ stetige Funktionen. Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

kann das Gleichungssystem (1) einfach in der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{2}$$

geschrieben werden. Zu suchen ist jene Lösung der Matrizen-Differentialgleichung (2), die die gegebene (beliebige) Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

erfüllt.

Im allgemeinen Falle ist diese Differentialgleichung in geschlossener Form nicht lösbar.

II.

Stellt aber *die Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A}(t)$ speziell *eine Diagonalmatrix dar,* d. h. ist $a_{ik}(t) \equiv 0$, wenn $i \neq k$ und ist mithin

$$\mathbf{A}(t) = \langle a_{11}(t), a_{22}(t), \ldots, a_{nn}(t) \rangle,$$

dann wird die zu (2) zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_h = \mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}_h \tag{3}$$

durch

$$\mathbf{x}_h = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau} \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

gelöst, wobei

$$\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0$$

den gegebenen Anfangswert und

$$e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau} = \langle e^{\int_0^t a_{11}(\tau)d\tau}, e^{\int_0^t a_{22}(\tau)d\tau}, \ldots, e^{\int_0^t a_{nn}(\tau)d\tau} \rangle$$

die lösende Diagonalmatrix bedeuten.

Anhand von (4) läßt sich auch die inhomogene Gleichung (2), mit dem vorgeschriebenen Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ lösen :[1]

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau)d\tau} \mathbf{f}(\tau_1)\, d\tau_1 \right\}. \tag{5}$$

III.

Im folgenden solle angenommen werden, daß *die Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A}(t)$ der Gleichung (2) *keine Diagonalmatrix ist, doch sei eine Ähnlichkeitstransformation* [mit der Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$] *bekannt, die* $\mathbf{A}(t)$ *in*

[1] Aus der Stetigkeit sämtlicher Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ folgt, daß

$$e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)d\tau}$$

regulär ist, also einen Kehrwert besitzt.

eine Diagonalmatrix zu überführen gestattet, d. h. es gelte

$$\mathbf{H}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{D}(t) = \langle d_{11}(t), d_{22}(t), \ldots, d_{nn}(t) \rangle,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß sowohl $\mathbf{A}(t)$ wie auch $\mathbf{D}(t)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ stetige Elemente besitzen.

In diesem Falle geht die Differentialgleichung (2) in die Form

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) = \{\mathbf{H}(t)\,\mathbf{A}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t)\}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) + \left\{\left(\frac{d}{dt}\mathbf{H}(t)\right)\mathbf{H}^{-1}(t)\right\}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) + (\mathbf{H}(t)\,\mathbf{f}(t)) \tag{6}$$

über.

Nach Einführung von

$$\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,; \quad \left(\frac{d}{dt}\mathbf{H}(t)\right)\mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{B}(t)\,; \quad \mathbf{H}(t)\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$$

lautet die Differentialgleichung (6) ;

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t). \tag{7}$$

Der der Gleichung (2) zugehörigen Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

entspricht somit die Bedingung

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0. \tag{8}$$

Zuerst soll die (der Gleichung (7) zugehörige) homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_h = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y}_h + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y}_h\,; \qquad \mathbf{y}_h(0) = \mathbf{y}_0 \tag{9}$$

gelöst werden.

Zu diesem Zweck bilden wir folgende Iterationsreihe von Differentialgleichungen :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbf{y}_{h1} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y}_{h1} \qquad\qquad\quad ; \quad \mathbf{y}_{h1}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\frac{d}{dt}\mathbf{y}_{h2} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y}_{h2} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y}_{h1}\,; \quad \mathbf{y}_{h2}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\frac{d}{dt}\mathbf{y}_{h3} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y}_{h3} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y}_{h2}\,; \quad \mathbf{y}_{h3}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{d}{dt}\mathbf{y}_{hm} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y}_{hm} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y}_{hm-1}\,; \quad \mathbf{y}_{hm}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Die Lösung der m-ten ($m \geqq 2$) Gleichung des Iterationssystems (10) kann nun unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) und (5) in der Form

$$
\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau} \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau} \mathbf{B}(\tau_1)\,\mathbf{y}_{hm-1}(\tau_1)\,d\tau_1 \right\},
\tag{11}
$$

dargestellt werden,[2] d. h. mit

$$
\mathbf{M}_m(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau} \mathbf{B}(\tau_1)\,\mathbf{M}_{m-1}(\tau_1)\,d\tau_1 \right\}
\tag{12^3}
$$

wird

$$
\mathbf{y}_{hm}(t) = \mathbf{M}_m(t)\,\mathbf{y}_0 .
\tag{13}
$$

Bei Verwendung der im m-ten Iterationsschritt erhaltenen Näherungslösung (13) für die homogene lineare Differentialgleichung (9) lautet die Näherungslösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (7):

$$
\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{M}_m(t)\left\{\mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{M}_m^{-1}(\tau)\,\mathbf{g}(\tau)\,d\tau\right\}.
\tag{14}
$$

[2] Aus der Voraussetzung, die Elemente der Matrix $\mathbf{D}(t)$ seien stetig, folgt, daß die Matrix

$$e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau}$$

einen Kehrwert besitzt.

[3] $\mathbf{E} = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ bedeutet die Einheitsmatrix n-ter Ordnung.

Voraussetzung war hierbei, daß bei hinreichend großem m für jedes Element der Matrix

$$(\mathbf{D}(t) + \mathbf{B}(t))\,\mathbf{M}_m(t) - \frac{d}{dt}\mathbf{M}_m(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & \varepsilon_{12}(t) & \dots & \varepsilon_{1n}(t) \\ \varepsilon_{21}(t) & \varepsilon_{22}(t) & \dots & \varepsilon_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varepsilon_{n1}(t) & \varepsilon_{n2}(t) & \dots & \varepsilon_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

die Beziehung

$$|\varepsilon_{ik}(t)| \leqq \varepsilon$$

Gültigkeit hat, wenn ε eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl ist.

Nun ist die Folge der Matrizen $\mathbf{M}_m(t)$ näher zu untersuchen:

$$\mathbf{M}_1(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau};$$

$$\mathbf{M}_2(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,\mathbf{B}(\tau_1)\,e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,d\tau_1\right\};$$

$$\mathbf{M}_3(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau)d\tau}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,\mathbf{B}(\tau_1)\,e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_2} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,\mathbf{B}(\tau_2)\,e^{\int_0^{\tau_2} \mathbf{D}(\tau)d\tau} \int_0^{\tau_2} e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,\mathbf{B}(\tau_1)\,e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,d\tau_1\,d\tau_2\right\};$$

. . . .

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{F}(\tau_k) = e^{-\int_0^{\tau_k} \mathbf{D}(\tau)d\tau}\,\mathbf{B}(\tau_k)\,e^{\int_0^{\tau_k} \mathbf{D}(\tau)d\tau}$$

und

$$\Delta(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau)\,d\tau,$$

lautet diese Folge

$$\mathbf{M}_1(t) = e^{\Delta(t)};$$

$$\mathbf{M}_2(t) = e^{\Delta(t)}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\right\};$$

$$\mathbf{M}_3(t) = e^{\Delta(t)}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\right\};$$

$$\mathbf{M}_4(t) = e^{\Delta(t)}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3)\int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3\right\};$$

. . . .

$$\mathbf{M}_m(t) = e^{\Delta(t)}\left\{\mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \right.$$
$$+ \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3)\int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 + \ldots +$$
$$\left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1})\int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \ldots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \ldots d\tau_{m-2}\,d\tau_{m-1}\right\};$$

. . . .

Es ist leicht einzusehen, daß die Matrizenfolge $\{\mathbf{M}_m(t)\}$ und damit auch die Vektorenfolgen $\{\mathbf{y}_{hm}(t)\}$ und $\{\mathbf{y}_m(t)\}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ konvergent sind.

Die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ sind — unserer Voraussetzung gemäß — im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ stetige Funktionen. Ferner nehmen wir an, daß auch die Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$, ihre Ableitung und ihr Kehrwert $\mathbf{H}^{-1}(t)$ stetige Elemente besitzen.[4] Hieraus folgt auch die Stetigkeit der Elemente der Matrizen $e^{\Delta(t)}$ und $\mathbf{B}(t)$. Demzufolge ist $e^{\Delta(t)}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ regulär, und ebenso sind die Elemente der Matrix

$$\mathbf{F}(t) = e^{-\Delta(t)}\,\mathbf{B}(t)\,e^{\Delta(t)}$$

stetig, woraus aber weiter folgt, daß die Elemente aller unserer Matrizen beschränkt sind.

Eine Matrix mit beschränkten Elementen besitzt eine obere Grenze, die zugleich eine obere Schranke aller Elemente darstellt. Im folgenden werden

[4] Wenn die Elemente der Matrix $\mathbf{H}(t)$ stetig sind und $\mathbf{H}^{-1}(t)$ vorhanden ist, besitzt auch diese stetige Elemente.

wir diese obere Grenze die »*G-Norm*« der Matrix nennen, die folgendermaßen definiert wird:

K ist die G-Norm der Matrix $\mathbf{K}$, wenn für einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{e}$ die Beziehung

$$|\mathbf{Ke}| \leqq G(\mathbf{K}) = K$$

gilt. Diese G-Norm ist nicht größer als die Quadratwurzel aus der Absolutquadratsumme aller Elemente der Matrix:[5]

$$G(\mathbf{K}) \leqq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |K_{ij}|^2}.$$

Für die oben definierte G-Norm gelten folgende Beziehungen:

$$G(\mathbf{KL}) \leqq G(\mathbf{K})\, G(\mathbf{L}),$$
$$G(\mathbf{K}+\mathbf{L}) \leqq G(\mathbf{K}) + G(\mathbf{L}).$$

Es sei im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq t \leqq b$

$$G(e^{\Delta(t)}) \leqq \alpha\,; \quad G(e^{-\Delta(t)}) \leqq \alpha\,; \quad G(\mathbf{B}(t)) \leqq \beta$$

und somit

$$G(\mathbf{F}(t)) \leqq G(e^{-\Delta(t)})\, G(\mathbf{B}(t))\, G(e^{\Delta(t)}) \leqq \alpha^2 \beta = \omega,$$

ferner

$$G\Big(\int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1}) \int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \ldots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{m-2}\, d\tau_{m-1}\Big) \leqq \frac{\omega^{m-1}\, b^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Dann ist

$$G(\mathbf{M}_m(t)) \leqq \alpha \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k\, b^k}{k!},$$

und dieselbe Abschätzung gilt auch für jedes Element der Matrix $\mathbf{M}_m(t)$.

Wenn wir noch voraussetzen, daß

$$|\mathbf{y}_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_{0i}|^2} \leqq \delta,$$

daß ferner im abgeschlossenen Intervall $0 \leqq t \leqq b$

$$|\mathbf{g}(t)| \leqq \gamma.$$

[5] Siehe z. B. [1], Seite 38.

so wird einerseits

$$|\mathbf{y}_{hm}(t)| \leq a\,\delta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k b^k}{k!} \tag{15}$$

und andererseits

$$|\mathbf{y}_m(t)| \leq a\,(\delta + \gamma\, b) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k b^k}{k!}. \tag{16}$$

Es sind daher die Matrizenfolge $\{\mathbf{M}_m(t)\}$ und somit auch die Vektorenfolgen $\{\tilde{\mathbf{y}}_{hm}(t)\}$ sowie $\{\mathbf{y}_m(t)\}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ gleichmäßig konvergent.

Es sei $\tilde{\mathbf{y}}_h$ der Grenzwert der Folge $\{\mathbf{y}_{hm}\}$. Dann gilt für eine hinreichend große Zahl m offenkundig

$$\mathbf{y}_{hm} \approx \mathbf{y}_{hm-1} \approx \tilde{\mathbf{y}}_h,$$

also

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{y}_h,$$

wobei $\mathbf{y}_h$ die genaue Lösung der Differentialgleichung (9) bedeutet. Nach analoger Schlußweise leuchtet ein, daß die genaue Lösung $\mathbf{y}$ der Differentialgleichung (7) mit dem Grenzwert der Folge $\{\mathbf{y}_m\}$ übereinstimmt.

Der Fehler zwischen der genauen Lösung $\mathbf{y}(t)$ und der in m-ten Iterationsschritt erhaltenen Näherung $\mathbf{y}_m(t)$ läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t)| &\leq a\,(\delta + \gamma\, b) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\omega^k b^k}{k!} < \\ &< a\,(\delta + \gamma\, b)\, \frac{\omega^m b^m}{m!}\, \frac{m}{m - \omega\, b},\end{aligned} \tag{17}$$

vorausgesetzt, daß m genügend groß ist, damit $\omega\, b < m$ sei.

Der durch die Formel (14) gewonnene Vektor $\mathbf{y}_m(t)$ kann als die Näherung $(m-1)$-ter Ordnung der genauen Lösung $\mathbf{y}(t)$ betrachtet werden, so daß man also *die Näherungslösung $(m-1)$-ter Ordnung* der ursprünglichen Differentialgleichung (2) in der Form

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{H}^{-1}(t)\,\mathbf{y}_m(t) \tag{18}$$

darstellen kann.

Wenn im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$

$$G(\mathbf{H}^{-1}(t)) \leq h,$$

gilt anhand der Beziehungen (17) und (18) *die Abschätzung*

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m(t)| < h\,a\,(\delta + \gamma\, b)\,\frac{\omega^m\, b^m}{m!}\;\frac{m}{m - \omega\, b}. \tag{19}$$

Zum Beweis der Richtigkeit der Näherungsformel (14) ist noch nachzuweisen, daß die Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ nicht singulär ist, d. h. daß sie einen Kehrwert besitzt. Wir schreiben zu diesem Zwecke die Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ in der Form

$$\mathbf{M}_m(t) = e^{\Delta(t)}\,\Phi_m\,|_0^t,$$

$$\Phi_m\,|_0^t = \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2}\mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3)\int_0^{\tau_3}\mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2}\mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2\,d\tau_3 +$$

$$+ \ldots + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1})\int_0^{\tau_{m-1}}\mathbf{F}(\tau_{m-2}) \ldots \int_0^{\tau_3}\mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2}\mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \ldots d\tau_{m-2}\,dt_{m-1}.$$

Da

$$\mathbf{M}_m^{-1}(t) = (\Phi_m\,|_0^t)^{-1}\,e^{-\Delta(t)},$$

und $e^{-\Delta(t)}$ nach unseren Voraussetzungen vorhanden ist, bleibt nur zu beweisen, daß $\Phi_m\,|_0^t$ nicht singulär ist, d. h. daß

$$\det\,(\Phi_m\,|_0^t) = \Phi_m \neq 0.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\,(\Phi_m\,|_0^t) = \mathbf{F}(t)\,\Phi_{m-1}\,|_0^t$$

und

$$\mathbf{M}_m(0) = \Phi_m\,|_0^0 = \mathbf{E}.$$

Setzen wir voraus, daß m genügend groß ist, daß also mit guter Annäherung geschrieben werden kann

$$\mathbf{y}_{hm} \approx \mathbf{y}_h \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_m \approx \mathbf{y},$$

so wird

$$\mathbf{M}_m(t) \approx \mathbf{M}(t) = e^{\Delta(t)}\,\Phi\,|_0^t =$$

$$= e^{\Delta(t)}\Big\{\mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2}\mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 + \ldots +$$

$$+ \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1})\int_0^{\tau_{m-1}}\mathbf{F}(\tau_{m-2}) \ldots \int_0^{\tau_3}\mathbf{F}(\tau_2)\int_0^{\tau_2}\mathbf{F}(\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 \ldots d\tau_{m-2}\,d\tau_{m-1} + \ldots\Big\},$$

mithin

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Phi}\,|_0^t) = \mathbf{F}(t)\,\boldsymbol{\Phi}\,|_0^t, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\Phi}\,|_0^0 = \mathbf{E}. \tag{21}$$

Es muß somit nur nachgewiesen werden. daß

$$\det(\boldsymbol{\Phi}_m|_0^t) \approx \det(\boldsymbol{\Phi}\,|_0^t) = \Phi \neq 0.$$

Es sei[6]

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \ldots & \Phi_{1n}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \ldots & \Phi_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Phi_{n1}(t) & \Phi_{n2}(t) & \ldots & \Phi_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

und durch Differentiation der Determinante

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \Phi_{12} \ldots \Phi_{1n} \\ \Phi'_{21} & \Phi_{22} \ldots \Phi_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \Phi'_{n1} & \Phi_{n2} \ldots \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi'_{12} \ldots \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi'_{22} \ldots \Phi_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \Phi_{n1} & \Phi'_{n2} \ldots \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \ldots \Phi'_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \ldots \Phi'_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} \ldots \Phi'_{nn} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Nach der Entwicklung der Gleichung (20) folgt :

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} \ldots \Phi'_{1n} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} \ldots \Phi'_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \Phi'_{n1} & \Phi'_{n2} \ldots \Phi'_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \ldots F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} \ldots F_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ F_{n1} & F_{n2} \ldots F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \ldots \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \ldots \Phi_{2n} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \cdot & \cdot \;\cdots\; \cdot \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} \ldots \Phi_{nn} \end{bmatrix},$$

folglich wird

$$\Phi'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} F_{ik}\,\Phi_{kj}. \tag{23}$$

[6] Siehe z. B. [2], Seite 139.

Setzen wir die in (23) enthaltenen Werte in die Gleichung (22) ein und fassen wir die das F_{ij} als Koeffizienten enthaltenden Glieder zusammen, so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dt} = (F_{11} + F_{22} + \ldots + F_{nn})\,\Phi,$$

und daraus

$$\Phi = C\, e^{\int_0^t (F_{11} + F_{22} + \ldots + F_{nn})\,d\tau},$$

wobei die Gleichung (21) die Integrationskonstante festsetzt, somit $C = 1$ wird.

Hieraus und aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Elemente der Matrix $\mathbf{F}(t)$ folgt, daß Φ im ganzen abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ von Null verschieden ist. Damit ist aber auch $\boldsymbol{\Phi}\big|_0^t \approx \boldsymbol{\Phi}_m\big|_0^t$ nicht singulär.

Zur Bestimmung der Näherungslösungen (13) und (14) ist die durch Gleichung (12) dargestellte Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ zu berechnen. *Zur praktischen Berechnung dieser Matrix* sei bemerkt, daß sich (13) auch in der Form[7]

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\Delta(t)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_0^t\,\mathbf{y}_{hm}(0) = e^{\Delta(t)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_n}^t\,\mathbf{y}_{hm}(t_n)$$

schreiben läßt. Ganz analog gilt

$$\mathbf{y}_{hm}(t_n) = e^{\Delta(t_n)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_{n-1}}^{t_n}\,\mathbf{y}_{hm}(t_{n-1})\,;\;\; \mathbf{y}_{hm}(t_{n-1}) = e^{\Delta(t_{n-1})}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\,\mathbf{y}_{hm}(t_{n-2})\,;\;\ldots$$
$$\ldots\,;\;\; \mathbf{y}_{hm}(t_1) = e^{\Delta(t_1)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_0^{t_1}\,\mathbf{y}_{hm}(0) = e^{\Delta(t_1)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_0^{t_1}\,\mathbf{y}_0.$$

Daraus folgt aber

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\Delta(t)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_n}^t\, e^{\Delta(t_n)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_{n-1}}^{t_n}\, e^{\Delta(t_{n-1})}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \ldots e^{\Delta(t_1)}\,\boldsymbol{\Phi}_m\big|_0^{t_1}\,\mathbf{y}_0. \tag{24}$$

Wählen wir nun eine Einteilung des Intervalls $[0, t]$

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n < t \leq b$$

dermaßen, daß die benachbarten (t_i, t_{i+1})-Werte genügend nahe zueinander zu liegen kommen, damit

$$\max |t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$$

sei (ε bedeutet dabei eine beliebig kleine positive Zahl).

[7] Siehe z. B. [2], Seite 141.

Hierfür gilt

$$G\left(\Phi_m \Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\right) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k \varepsilon^k}{k!}.$$

Wenn also ε hinreichend klein ist, ergibt sich mit guter Annäherung

$$\Phi_m \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \approx \mathbf{E} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau,$$

und

$$\mathbf{M}_m(t) \approx e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_{t_n}^{t} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau \right\} e^{\Delta(t_n)} \left\{ \mathbf{E} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau \right\} e^{\Delta(t_{n-1})} \left\{ \mathbf{E} + \right.$$
$$\left. + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau \right\} \ldots e^{\Delta(t_1)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^{t_1} \mathbf{F}(\tau)\, d\tau \right\}. \tag{25}$$

IV.

Setzen wir schließlich voraus, daß $\mathbf{A}(t)$ *keine Diagonalmatrix ist, und daß auch keine Ähnlichkeitstransformation bekannt sei, durch die* $\mathbf{A}(t)$ *in eine Diagonalmatrix transformiert werden kann.*

Es sei aber $\mathbf{G}(t)$ eine diagonalisierbare Matrix, die die Matrix $\mathbf{A}(t)$ in der G-Norm gut annähert, d. h. im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ sei $G(\mathbf{A}(t) - \mathbf{G}(t)) = G(\mathbf{K}(t))$ möglichst klein, und

$$\mathbf{H}(t)\, \mathbf{G}(t)\, \mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{D}(t)$$

stelle eine Diagonalmatrix dar.

Mit diesen Voraussetzungen kann die zu lösende Differentialgleichung (2) in der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{G}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{K}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{26}$$

oder nach Multiplikation von links mit der Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$ in der Form

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) = \left\{\mathbf{H}(t)\,\mathbf{G}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t)\right\}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) + \left\{\mathbf{H}(t)\,\mathbf{K}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t) + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{d}{dt}\mathbf{H}(t)\right]\mathbf{H}^{-1}(t)\right\}(\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x}) + (\mathbf{H}(t)\,\mathbf{f}(t)); \; \mathbf{H}(0)\,\mathbf{x}(0) = \mathbf{H}(0)\,\mathbf{x}_0 \tag{27}$$

geschrieben werden.

Mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{H}(t)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}; \qquad \mathbf{H}(t)\,\mathbf{G}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{D}(t); \quad \mathbf{H}(0)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0;$$

$$\mathbf{H}(t)\,\mathbf{K}(t)\,\mathbf{H}^{-1}(t) + \left(\frac{d}{dt}\mathbf{H}(t)\right)\mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{B}(t); \quad \mathbf{H}(t)\,\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t);$$

lautet die Differentialgleichung (27)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = \mathbf{D}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \tag{28}$$

Diese Differentialgleichung ist formell mit der Gleichung (7) völlig identisch, sie läßt sich mithin analog dem (im Teil III) angegebenen Verfahren lösen.

Betrachten wir nun einige Sonderfälle:

a) Die Berechnungen vereinfachen sich, wenn

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H} \tag{29}$$

von der Veränderlichen t unabhängig ist. (Dies ist z. B. der Fall, wenn $\mathbf{G}(t)$ eine zyklische Matrix ist.) Dann gilt nämlich

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H} \equiv 0$$

und dementsprechend

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{H}\,\mathbf{K}(t)\,\mathbf{H}^{-1}. \tag{30}$$

a_1) Stellen $\mathbf{H}$ und $\mathbf{K}(t)$ noch speziell vertauschbare Matrizen dar, wird

$$\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{K}(t). \tag{31}$$

b) Die Berechnung vereinfacht sich auch, wenn $e^{\Lambda(t)}$ und $\mathbf{B}(t)$ vertauschbare Matrizen sind, da in diesem Falle

$$\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{B}(t). \tag{32}$$

b_1) Eine noch wesentlichere Vereinfachung folgt aus der Voraussetzung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{B}(t) \tag{33}$$

u. zw. unabhängig von t, denn es gilt dann

$$\mathbf{y}_k(t) = e^{\Delta(t)} e^{\mathbf{F}t} \mathbf{y}_0 = e^{\Delta(t)+\mathbf{F}t} \mathbf{y}_0 \tag{34}$$

und die genaue Lösung schreibt sich zu

$$\mathbf{y}(t) = e^{\Delta(t)+\mathbf{F}t}\left\{ \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\Delta(\tau)-\mathbf{F}\tau} \mathbf{g}(\tau)\, d\tau \right\}. \tag{35}$$

c) Unsere (im Teil III) dargelegte Methode ist auch für den Sonderfall anwendbar, daß $\mathbf{G}(t) \equiv 0$, d. h. $\mathbf{H}(t) \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{K}(t)$. Unser Ergebnis ist dann identisch mit dem anhand des Picard—Lindelöfschen Iterationsverfahrens ermittelten.

d) Betrachten wir schließlich den (für die Anwendungen besonders wichtigen) Fall, bei dem — unabhängig von t —

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}$$

und in der Form

$$\mathbf{G} = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \mathbf{u}_\nu \mathbf{v}_\nu^* \tag{36}$$

darstellbar vorausgesetzt ist. γ_ν sind hierbei die Eigenwerte von $\mathbf{G}$, $\mathbf{u}_\nu$ bzw $\mathbf{v}_\nu^*$ bezeichnen die rechts- bzw. linksseitigen Eigenvektoren von $\mathbf{G}$; $\mathbf{v}_\mu^* \mathbf{u}_\nu = \delta_{\mu\nu}$ [3].

In diesem Fall kann der nach Formel (12) bestimmte Wert $\mathbf{M}_m(t)$ folgendermaßen ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_m(t) = \sum_{k_1=1}^{n} e^{\gamma_{k_1} t} \Big\{ &\mathbf{u}_{k_1}\mathbf{v}_{k_1}^* + \sum_{k_2=1}^{n} \int_0^t (\mathbf{v}_{k_1}^* \mathbf{K}(\tau_1)\mathbf{u}_{k_2})\, e^{(\gamma_{k_2}-\gamma_{k_1})\tau_1} d\tau_1 (\mathbf{u}_{k_1}\mathbf{v}_{k_2}^*) + \\ &+ \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n} \int_0^t (\mathbf{v}_{k_1}^* \mathbf{K}(\tau_2)\mathbf{u}_{k_2})\, e^{(\gamma_{k_2}-\gamma_{k_1})\tau_2} \int_0^{\tau_2} (\mathbf{v}_{k_2}^* \mathbf{K}(\tau_1)\mathbf{u}_{k_3})\, e^{(\gamma_{k_3}-\gamma_{k_2})\tau_1} d\tau_1\, d\tau_2 (\mathbf{u}_{k_1}\mathbf{v}_{k_3}^*) + \ldots + \\ &+ \sum_{k_2=1}^{n}\sum_{k_3=1}^{n}\ldots\sum_{k_m=1}^{n} \int_0^t (\mathbf{v}_{k_2}^* \mathbf{K}(\tau_{m-1})\mathbf{u}_{k_2})\, e^{(\gamma_{k_2}-\gamma_{k_1})\tau_{m-1}} \int_0^{\tau_{m-1}} (\mathbf{v}_{k_2}^* \mathbf{K}(\tau_{m-2})\mathbf{u}_{k_3})\, e^{(\gamma_{k_3}-\gamma_{k_2})\tau_{m-2}} \ldots \\ &\ldots \int_0^{\tau_2} (\mathbf{v}_{k_{m-1}}^* \mathbf{K}(\tau_1)\mathbf{u}_{k_m})\, e^{(\gamma_{k_m}-\gamma_{k_{m-1}})\tau_1} d\tau_1 \ldots d\tau_{m-2}\, d\tau_{m-1} (\mathbf{u}_{k_1}\mathbf{v}_{k_m}^*) \Big\}.\end{aligned} \tag{37}$$

d_1) Dieser letzte Fall schließt auch den Sonderfall in sich ein, bei dem $\mathbf{G}$ und $\mathbf{K}$ konstante Matrizen sind, also nicht von der Veränderlichen t abhängen [4].

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht mit Hilfe der Matrizenrechnung die Lösung von Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. Die Lösung ist für gewöhnlich nur dann in geschlossener Form darstellbar, wenn die Koeffizientenmatrix Diagonalform hat. Im allgemeinen Fall läßt sich die Lösung ausschließlich durch eine unendliche Matrizenreihe darstellen. Verfasser gibt ein Iterationsverfahren an, das als Verallgemeinerung der Picard—Lindelöfschen Methode angesehen werden kann. Die Näherungslösung $(m - 1)$-ter Ordnung wird in einer — auch für die praktische Rechnung zweckmäßiger Form — in Gestalt von Summen wiederholter Integrale skalarer Funktionen dargestellt. (Siehe Formel (37).)

Literatur

1. Bodewig, E.: Matrix Calculus, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.
2. Schmeidler, W.: Vorträge über Determinanten und Matrizen, Akademie-Verlag, Berlin, 1949.
3. Egerváry, E.: On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, Tom. **XV**, Fasc. 1, 1953.
4. Bajcsay, P.—Lovass-Nagy, V.: Ein Iterationsverfahren zur näherungsweisen Lösung von Matrizendifferentialgleichungen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. **39**, Heft 1—2, 1959.

P. Bajcsay, Budapest, XI., Sztoczek u. 2—4. Ungarn.