MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG DER STATIONÄREN UND TRANSIENTEN VORGÄNGE IN ELEKTRISCHEN DREIPHASENMASCHINEN MIT HILFE VON HYPERMATRIZEN

V. Lovass-Nagy und K. Szendy

(Eingegangen am. 4. Februar 1958)

1. Einleitung

Eine große Anzahl von wissenschaftlichen Arbeiten und Büchern der Fachliteratur befassen sich mit der mathematischen Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge in elektrischen Maschinen und Transformatoren [1]—[6]. Die neueren Arbeiten [7]—[17], welche derartige Berechnungen bringen, verwenden in zunehmendem Maße die sogenannte Matrizenrechnung. Diese Rechnungsart ermöglicht bekanntlich einerseits eine einfachere und übersichtlichere Schreibweise der mathematischen Darstellung dieser komplizierten Erscheinungen, andererseits ergibt sich hierbei die Ableitung weiterer Zusammenhänge, die sich ohne Verwendung der Matrizenrechnung kaum gewinnen ließen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, mit Hilfe der neuesten Resultate der Matrizentheorie — oder besser gesagt mit Hilfe einiger neuerdings bekannt gewordenen Eigenschaften der Hypermatrizen [19] — die stationären und transienten Vorgänge dreiphasiger elektrischer Maschinen zu untersuchen.

Wir wollen unsere Untersuchungen auf solche synchrone und asynchrone Maschinen ausdehnen, deren Statorwicklung dreiphasig ist, während ihre Rotorwicklung entweder zwei- oder dreiphasig ausgeführt ist. Wir nehmen dabei an, daß der Stator nur eine einzige Wicklung besitzt, während der Rotor zwei Wicklungen trägt, was bei Synchrongeneratoren und Asynchronmotoren normalerweise der Fall ist. Es besteht jedoch ohne weiteres die Möglichkeit, die so abgeleiteten Resultate auch für Maschinen mit mehreren Wicklungen auf Stator und Rotor zu übertragen.

Für unsere Untersuchungen haben wir bezüglich der hier behandelten Maschinen folgende Annahmen zugrunde gelegt:

a) Alle 3 Phasen des Stators bzw. eines dreiphasigen Rotors sind gleichartig gewickelt und gegeneinander elektrisch um $\frac{2\pi}{3}$ verdreht.

b) Die Eisensättigung wird nicht berücksichtigt, also die Permeabilität als gleichbleibend angenommen.

c) Die Eisenverluste — Hysterese und Wirbelstromverluste — werden nicht berücksichtigt.

d) Der Skineffekt wird nicht in Rechnung gezogen.

e) Leckströme (durch Ableitung) werden vernachlässigt.

f) Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors wird als konstant angenommen.

g) Die Feldverteilung ist im Luftspalt sinusförmig.

2. Bezeichnungen

Die gegenseitige Lage der Wicklungen von Synchron- oder Asynchronmaschinen mit zweiphasigem Rotor ist aus Abb. 1 zu ersehen, die von Maschinen mit dreiphasigem Rotor aus Abb. 2 (s. auch Fußnote [1]). Bei der mathematischen Erfassung des Problems haben wir als allgemeineren Fall einen zweiphasigen Rotor berücksichtigt. Wir werden nämlich später sehen, daß sämtliche auf zweiphasige Rotoren bezügliche Beziehungen — unter Beachtung gewisser vereinfachender Annahmen — in Gleichungen überführt werden können, die sowohl für dreiphasige wie auch für zweiphasige Rotoren gültig sind.

Den Phasenwicklungen des *Stators* (A) sind den Achsen a, b, c zugeordnet.

Im Falle eines *zweiphasigen Rotors* benutzen wir bei *Synchronmaschinen* die folgenden Bezeichnungen:

Erregerwicklung: F,

Dämpferwicklung: D,

Polachse in der Längsrichtung: d,

Polachse in der Querrichtung: q (rechtwinklig zur Längsrichtung).

Die Dämpferwicklung ist tatsächlich zweiphasig und die Achsen der einzelnen Phasen fallen mit den Achsen d und q zusammen. Die Erregerwicklung ist tatsächlich einphasig und ihre Achsenrichtung fällt mit der Längsachse d zusammen. Nichtsdestoweniger nehmen wir sie als zweiphasig an und bestimmen, daß die zweite, in die Querachse q fallend angenommene Phasenwicklung als dauernd offene Wicklung zu gelten hat. Unter dieser Bedingung sind nämlich die abgeleiteten Zusammenhänge symmetrisch und lassen sich ohne Schwierigkeit auch auf asynchrone Maschinen übertragen (s. Punkt 5).

Im Falle eines *zweiphasigen Rotors* sind bei *asynchronen Maschinen* beide Wicklungen des Rotors tatsächlich zweiphasig. Im Interesse der Einheitlichkeit der für Synchron- und für Asynchronmaschinen abgeleiteten Zusammenhänge bezeichnen wir bei den asynchronen Maschinen die eine Wicklung ebenfalls mit F, die andere mit D. Obwohl im Falle von Asynchronmaschinen

[1] Der Übersichtlichkeit halber haben wir nur *eine* Wicklung des Rotors, seine Erregerwicklung, zur Darstellung gebracht.

die Polachsen tatsächlich nicht existieren, bezeichnen wir doch im Interesse einer einheitlichen Behandlung auch hier die beiden Phasenwicklungen mit d bzw. mit q.

Bei *Asynchronmaschinen mit dreiphasigem Rotor* bezeichnen wir im Einklang mit den obigen Festsetzungen die eine Wicklung mit F, die andere mit D, innerhalb der Wicklungen jedoch die einzelnen Phasen mit a, b, c.

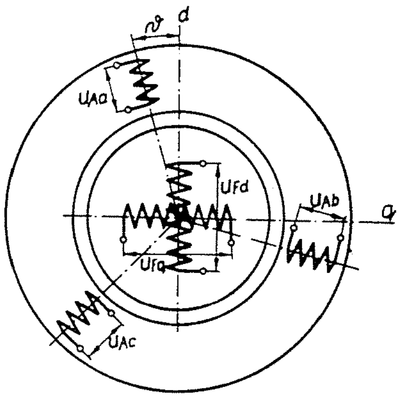

Abb. 1

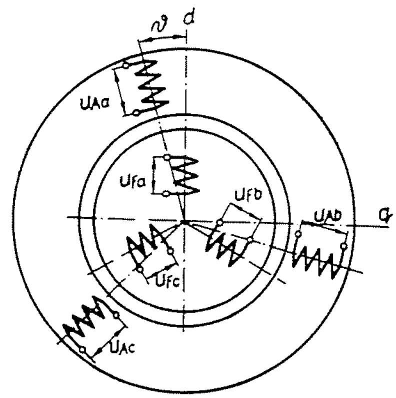

Abb. 2

Die Wicklungswiderstände bei Maschinen mit zweiphasigem Rotor bezeichnen wir wie folgt:

$r_{Aa} = r_{Ab} = r_{Ac} = r_A$ .... Widerstand einer Wicklung des Stators,
r_{Fd} .... Widerstand der Phase d der Rotorwicklung F,
r_{Fq} .... ,, ,, ,, q ,, ,, F, (2.1)
r_{Dd} .... ,, ,, ,, d ,, ,, D,
r_{Dq} .... ,, ,, ,, q ,, ,, D.

Selbstinduktivität und Gegeninduktivität der Wicklungen einer Maschine mit zweiphasigem Rotor:

a) Die Selbstinduktivität des Stators ist:

$$\left.\begin{aligned} l_{Aa} &= l_A + l'_A \cos 2\vartheta \\ l_{Ab} &= l_A + l'_A \cos\left(2\vartheta - \frac{4\pi}{3}\right) = l_A + l'_A \cos\left(2\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ l_{Ac} &= l_A + l'_A \cos\left(2\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) = l_A + l'_A \cos\left(2\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

b) Die Gegeninduktivität des Stators ist:

$$\left.\begin{aligned} l_{Aab} &= -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos\left(2\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)\right] = -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos\left(2\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ l_{Aac} &= -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos\left(2\vartheta + \frac{5\pi}{5}\right)\right] = -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos\left(2\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ l_{Abc} &= -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos\left(2\vartheta + \frac{3\pi}{3}\right)\right] = -\left[l_{Ag} + l'_{Ag}\cos 2\vartheta\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

c) Die Selbstinduktivitäten des Rotors sind:

l_{Fd} ... Selbstinduktivität der Phase d der Rotorwicklung F,
l_{Fq} ... ,, ,, ,, q ,, ,, F,
l_{Dd} ... ,, ,, ,, d ,, ,, D,
l_{Dq} ... ,, ,, ,, q ,, ,, D. (2.4)

d) Gegeninduktivitäten des Rotors sind:

l_{FDd} ... Gegeninduktivität zwischen den Phasen d der Rotorwicklung F und D, (2.5)
l_{FDq} ... Gegeninduktivität zwischen den Phasen q der Rotorwicklung F und D;

zwischen den Phasen d und q der Rotorwicklungen F und D gibt es infolge ihrer gegenseitigen Lage im Raum keine gegenseitige Induktions.

e) Die Gegeninduktivität zwischen Stator und Rotor ist wie folgt:

α) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase d der Rotorwicklung F:

$$\left.\begin{aligned} m_{AaFd} &= m_{Fd}\cos\vartheta \\ m_{AbFd} &= m_{Fd}\cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{AcFd} &= m_{Fd}\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.1}$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase q der Rotorwicklung F:

$$\left.\begin{aligned} m_{AaFq} &= -m_{Fq}\sin\vartheta \\ m_{AbFq} &= -m_{Fq}\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{AcFq} &= -m_{Fq}\sin\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.2}$$

γ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase d der Rotorwicklung D:

$$\left.\begin{aligned} m_{AaDd} &= m_{Dd}\cos\vartheta \\ m_{AbDd} &= m_{Dd}\cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{AcDd} &= m_{Dd}\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.3}$$

δ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und der Phase q der Rotorwicklung D:

$$\left.\begin{aligned} m_{AaDq} &= -m_{Dq}\sin\vartheta \\ m_{AbDq} &= -m_{Dq}\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{AcDq} &= -m_{Dq}\sin\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.6.4}$$

In den oben eingeführten Bezeichnungen bedeuten die Werte:

$$l_A, l'_A, l_{Ag}, l'_{Ag}, l_{Fd}, l_{Fq}, l_{Dd}, l_{Dq}, l_{FDd}, l_{FDq}, m_{Fd}, m_{Fq}, m_{Dd}, m_{Dq}$$

unveränderliche Größen.

Ströme und Spannungen bei Maschinen mit zweiphasigem Rotor sind die folgenden:

a) Ströme und Spannungen des Stators:

$$i_{Aa}, i_{Ab}, i_{Ac};\ u_{Aa}, u_{Ab}, u_{Ac}. \tag{2.7}$$

b) Ströme und Spannungen des Rotors:

i_{Fd}, u_{Fd} .... Strom und Spannung der Phase d der Rotorwicklung F;
i_{Fq}, u_{Fq} .... „ „ „ „ „ q „ „ F,
i_{Dd}, u_{Dd} .... „ „ „ „ „ d „ „ D,
i_{Dq}, u_{Dq} .... „ „ „ „ „ q „ „ D.

Die Wicklungswiderstände der Maschine mit dreiphasigem Rotor sind:

$$\left.\begin{array}{ll} r_{Aa} = r_{Ab} = r_{Ac} = r_A \;\ldots\ldots & \text{Widerstand der Statorwicklung,} \\ r_{Fa} = r_{Fb} = r_{Fc} = r_F \;\ldots\ldots & \text{Widerstand einer Phase der Rotorwick-} \\ & \text{lung } F, \\ r_{Da} = r_{Db} = r_{Dc} = r_D \;\ldots\ldots & \text{Widerstand einer Phase der Rotorwick-} \\ & \text{lung } D. \end{array}\right\} \quad (2.8)$$

Die Selbstinduktivität und die Gegeninduktivität der Wicklungen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor

Da ein dreipoliger Rotor immer Zylinderform hat (Kreiszylinder), vereinfachen sich die Selbstinduktivität und die Gegeninduktivität gegenüber den entsprechenden Beziehungen bei Maschinen mit zweiphasigem Rotor und ausgeprägten Polen bzw. elliptischem Querschnitt, wie folgt:

a) *Die Selbstinduktivität des Stators:* (2.9)

$$l_{Aa} = l_{Ab} = l_{Ac} = l_A\,.$$

b) *Die Gegeninduktivität des Stators:*

$$l_{Aab} = l_{Aac} = l_{Abc} = -l_{Ag}\,.$$

c) *Die Selbstinduktivität des Rotors:* (2.10)

α) Die Selbstinduktivität der Rotorwicklung F:

$$l_{Fa} = l_{Fb} = l_{Fc} = l_F\,.$$

β) Die Selbstinduktivität der Rotorwicklung D:

$$l_{Da} = l_{Db} = l_{Dc} = l_D\,.$$

d) *Die Gegeninduktivität des Rotors:*

α) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung F:

$$l_{Fab} = l_{Fac} = l_{Fbc} = -l_{Fg}\,. \tag{2.11.1}$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung D:

$$l_{Dab} = l_{Dac} = l_{Dbc} = -l_{Dg}\,. \tag{2.11.2}$$

γ) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasen der Rotorwicklung F und den Phasen der Rotorwicklung D:

$$\left.\begin{aligned} &l_{FaDa} = l_{FbDb} = l_{FcDc} = 2\,l_{FD}\,, \\ &l_{FaDb} = l_{FbDc} = l_{FcDa} = \\ &= l_{FaDc} = l_{FbDa} = l_{FcDb} \cong -l_{FD}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.11.3}$$

e) Die Gegeninduktivität zwischen Stator und Rotor:

α) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und den Phasenwicklungen der Rotorwicklung F:

$$\left.\begin{aligned} &m_{AaFa} = m_{AbFb} = m_{AcFc} = m_F \cos\vartheta \\ &m_{AaFb} = m_{AbFc} = m_{AcFa} = m_F \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ &m_{AaFc} = m_{AbFa} = m_{AcFb} = m_F \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.11.4}$$

β) Die Gegeninduktivität zwischen den Phasenwicklungen des Stators und den Phasenwicklungen der Rotorwicklung D:

$$\left.\begin{aligned} &m_{AaDa} = m_{AbDb} = m_{AcDc} = m_D \cos\vartheta \\ &m_{AaDb} = m_{AbDc} = m_{AcDa} = m_D \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ &m_{AaDc} = m_{AbDa} = m_{AcDb} = m_D \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.11.5}$$

Die Ströme und Spannungen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor sind:

a) Die Ströme und Spannungen des Stators:

$$i_{Aa}, i_{Ab}, i_{Ac}; \quad u_{Aa}, u_{Ab}, u_{Ac}\,.$$

b) Die Ströme und Spannungen des Rotors:

α) Die Ströme und Spannungen der Rotorwicklung F:

$$i_{Fa}, i_{Fb}, i_{Fc}; \quad u_{Fa}, u_{Fb}, u_{Fc}\,.$$

β) Ströme und Spannungen der Rotorwicklung D:

$$i_{Da}, i_{Db}, i_{Dc}; \quad u_{Da}, u_{Db}, u_{Dc}\,.$$

Die im Aufsatz angewandten Bezeichnungen der Matrizentheorie

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$ .... quadratische Matrix aus a_{ij} skalaren Elementen.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$ .... quadratische Hypermatrix aus $\mathbf{A}_{ij}$ Blöcken:

$\mathbf{A}^*$ .... Die konjugiert transponierte Matrix von $\mathbf{A}$

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ .... Spaltenmatrix aus a_i skalaren Elementen.

$\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ .... Zeilenmatrix aus a_i skalaren Elementen.

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ .... Hyperspaltenmatrix aus $\mathbf{a}_i$ Spaltenmatrixblöcken.

$\mathbf{C}(c_0, c_1, \dots, c_m) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m \\ c_m & c_0 & \dots & c_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$ ... Zyklische Matrix.

$\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1m}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2m}\mathbf{B} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix}$ ... Direktprodukt.

$|\mathbf{A}|$ .... Die Determinante von $\mathbf{A}$

$\mathbf{E}_m$ .... Einheitsmatrix m-ter Ordnung.

$\langle d_1 \, d_2, \dots, d_m \rangle = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_m \end{bmatrix}$ ... Diagonalmatrix m-ter Ordnung.

Koeffizientenmatrizen :

Die Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit zweiphasigem Rotor sind die folgenden:

Die Widerstandmatrix :

$$\mathbf{R} \quad = \langle \mathbf{R}_{A,3}, \mathbf{R}_{F,2}, \mathbf{R}_{D,2} \rangle;$$
$$\mathbf{R}_{A,3} = r_A \mathbf{E}_3;$$
$$\mathbf{R}_{F2} \quad = \langle r_{Fd}, r_{Fq} \rangle;$$
$$\mathbf{R}_{D,2} = \langle r_{Dd}, r_{Dq} \rangle.$$

Die Induktivitätsmatrix :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{A,3} & \underset{3,2}{\mathbf{M}_F} & \underset{3,2}{\mathbf{M}_D} \\ \underset{2,3}{\mathbf{M}_F^*} & \mathbf{L}_{F,2} & \mathbf{L}_{FD,2} \\ \underset{2,3}{\mathbf{M}_D^*} & \mathbf{L}_{FD,2}^* & \mathbf{L}_{D,2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{A,3} = \begin{bmatrix} l_{Aa} & l_{Aab} & l_{Aac} \\ l_{Aab} & l_{Ab} & l_{Abc} \\ l_{Aac} & l_{Abc} & l_{Ac} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{F,2} = \langle l_{Fd}, l_{Fq} \rangle;$$
$$\mathbf{L}_{D,2} = \langle l_{Dd}, l_{Dq} \rangle;$$
$$\mathbf{L}_{FD,2} = \langle l_{FDd}, l_{FDq} \rangle;$$

$$\underset{(3,2)}{\mathbf{M}_F} = \begin{bmatrix} m_{AaFd} & m_{AaFq} \\ m_{AbFd} & m_{AbFq} \\ m_{AcFd} & m_{AcFq} \end{bmatrix};$$

$$\underset{(3,2)}{\mathbf{M}_D} = \begin{bmatrix} m_{AaDd} & m_{AaDq} \\ m_{AbDd} & m_{AaDq} \\ m_{AcDd} & m_{AcDq} \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor sind die folgenden:

Die Widerstandsmatrix :

$$\mathbf{R} = \langle \mathbf{R}_{A,3}, \mathbf{R}_{F,3}, \mathbf{R}_{D,3} \rangle;$$
$$\mathbf{R}_{A,3} = r_A \mathbf{E}_3;$$
$$\mathbf{R}_{F,3} = r_F \mathbf{E}_3;$$
$$\mathbf{R}_{D,3} = r_D \mathbf{E}_3.$$

Die Induktivitätsmatrix :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{A,3} & \mathbf{M}_{F,3} & \mathbf{M}_{D,3} \\ \mathbf{M}^*_{F,3} & \mathbf{L}_{F,3} & \mathbf{L}_{FD,3} \\ \mathbf{M}^*_{D,3} & \mathbf{L}^*_{FD,3} & \mathbf{L}_{D,3} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{A,3} = \mathbf{C}(l_A, -l_{Ag}, -l_{Ag});$$
$$\mathbf{L}_{F,3} = \mathbf{C}(l_F, -l_{Fg}, -l_{Fg});$$
$$\mathbf{L}_{D,3} = \mathbf{C}(l_D, -l_{Dg}, -l_{Dg});$$

$$\mathbf{L}_{FD,3} = l_{FD} \cdot \mathbf{C}(2, -1, -1);$$

$$\mathbf{M}_{F,3} = m_F \cdot \mathbf{C}\left(\cos\vartheta, \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right);$$

$$\mathbf{M}_{D,3} = m_D \cdot \mathbf{C}\left(\cos\vartheta, \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Strom- und Spannungsmatrizen :

Die Strom- und Spannungsmatrizen einer Maschine mit zweiphasigem Rotor :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_A = \begin{bmatrix} i_{Aa} \\ i_{Ab} \\ i_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_F = \begin{bmatrix} i_{Fd} \\ i_{Fq} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_D = \begin{bmatrix} i_{Dd} \\ i_{Dq} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} u_{Aa} \\ u_{Ab} \\ u_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} u_{Fd} \\ u_{Fq} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} u_{Dd} \\ u_{Dq} \end{bmatrix}.$$

Die Strom- und Spannungsmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor :

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_A = \begin{bmatrix} i_{Aa} \\ i_{Ab} \\ i_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_F = \begin{bmatrix} i_{Fa} \\ i_{Fb} \\ i_{Fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_D = \begin{bmatrix} i_{Da} \\ i_{Db} \\ i_{Dc} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_A = \begin{bmatrix} u_{Aa} \\ u_{Ab} \\ u_{Ac} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_F = \begin{bmatrix} u_{Fa} \\ u_{Fb} \\ u_{Fc} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} u_{Da} \\ u_{Db} \\ u_{Dc} \end{bmatrix}.$$

3. Einige im Aufsatz benutzte matrizentheoretische Zusammenhänge

Nehmen wir an, daß sämtliche Blöcke der nur aus quadratischen Blöcken m-ter Ordnung bestehenden Hypermatrix $m \times n$-ter Ordnung

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

zyklische Matrizen sind. In diesem Fall kann ein beliebiger Block

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{0,ij} & a_{1,ij} & \dots & a_{m-1,ij} \\ a_{m-1,ij} & a_{0,ij} & \dots & a_{m-2,ij} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,ij} & a_{2,ij} & \dots & a_{0,ij} \end{bmatrix}$$

(siehe Literaturnachweis [18] Seite 452) in der kanonischen Form

$$\mathbf{A}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \lambda_{\nu,ij} \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_\nu, \dots, \overline{\omega}_\nu^{m-1}] \tag{3.1}$$

dargestellt werden, wo

$$\lambda_{\nu,ij} = a_{0,ij} + a_{1,ij}\,\omega_\nu + \dots + a_{m-1,ij}\,\omega_\nu^{m-1}, \tag{3.2}$$

$$\omega_\nu = e^{\frac{2\nu\pi j}{m}} .$$

Unter Anwendung der zyklischen Blöcke zur Aufstellung der obigen kanonischen Form kann die Hypermatrix $\mathbf{A}$ natürlich in der folgenden Weise, als eine Summe von Direktprodukten, aufgeschrieben werden:

$$A = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \dots & \lambda_{\nu,1n} \\ \lambda_{\nu,21} & \lambda_{\nu,22} & \dots & \lambda_{\nu,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \dots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \overline{\omega}_\nu, \dots, \overline{\omega}_\nu^{m-1}] \tag{3.3}$$

Da nun die Multiplikation zweier Direktprodukte in der Form

$$(\mathbf{U}_1 \times \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{U}_2 \times \cdot \mathbf{V}_2) = (\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2) \times \cdot (\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2)$$

ausgeführt werden kann (vorausgesetzt, daß $\mathbf{U}_1$ und $\mathbf{U}_2$ bzw. $\mathbf{V}_1$ und $\mathbf{V}_2$ in der vorliegenden Reihenfolge konformabel sind), und da ferner

$$[1, \omega_\nu, \dots, \omega_\nu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\mu \\ \vdots \\ \omega_\mu^{m-1} \end{bmatrix} = 0, \text{ wenn } \mu \neq \nu \text{ ist sowie}$$

$$[1, \bar{\omega}_\nu, \dots, \bar{\omega}_\nu^{m-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} = m \text{ ist, so wird ersichtlich,}$$

daß eine beliebige analytische Funktion der Hypermatrix $\mathbf{A}$ in der folgenden »semikanonischen« Form:

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f\left\{\begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \dots & \lambda_{\nu,1n} \\ \lambda_{\nu,21} & \lambda_{\nu,22} & \dots & \lambda_{\nu,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \dots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix}\right\} \times \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix} [1, \omega_\nu, \dots, \omega_\nu^{m-1}] \tag{3.4}$$

bzw. mit Einführung der Abkürzungen:

$$\Lambda_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_{\nu,11} & \lambda_{\nu,12} & \dots & \lambda_{\nu,1n} \\ \lambda_{\nu,21} & \lambda_{\nu,22} & \dots & \lambda_{\nu,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{\nu,n1} & \lambda_{\nu,n2} & \dots & \lambda_{\nu,nn} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{w}_\nu = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_\nu \\ \vdots \\ \omega_\nu^{m-1} \end{bmatrix}$$

in der Schreibweise:

$$(\mathbf{A}) \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\Lambda_\nu) \times \cdot \mathbf{w}_\nu \mathbf{w}_\nu^* \text{ dargestellt werden kann.}$$

4. Die Matrizengleichung elektrischer Wechselstrommaschinen

Wenn wir das Induktionsgesetz bzw. das »zweite« KIRCHHOFFsche Gesetz (siehe Literaturnachweis [20] S. 13 bzw. S. 140) unter Beachtung der in Punkt 2 eingeführten Bezeichnungen verwenden, so können wir die Differentialgleichungssysteme, welche die stationären und transienten Erscheinungen sowohl der synchronen als auch der asynchronen Maschinen beschreiben, in der folgenden »einen gemeinsamen« Matrizengleichung zusammenfassen:

$$\mathbf{Ri} + \frac{d}{dt}(\mathbf{Li}) = \mathbf{u}\,. \tag{4.1}$$

Da Elemente der Induktivitätsmatrix $\mathbf{L}$, welche vom Winkel ϑ abhängen, Funktionen der Zeit t sind ($\vartheta = \vartheta(t)$), erhalten wir aus (4.1) nach Vollziehen der Differentiation die folgende Gleichung:

$$\mathbf{Ri} + \left(\frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\right)\left(\frac{d}{dt}\vartheta\right)\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{d}{dt}i = \mathbf{u}\,. \tag{4.2}$$

Im weiteren werden wir bestrebt sein, die Matrizen-Differentialgleichung der veränderlichen Koeffizienten (4.2) in eine Matrizen-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu transformieren. Zu diesem Zweck suchen wir eine geeignete »Transformierungsmatrix« $\mathbf{T}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^* = \mathbf{E}\,;$$

$$\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{T},\ \mathbf{T}^*\cdot\left(\frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\right)\mathbf{T},\ \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T},\ \left(\frac{d}{d}\mathbf{T}^*\right)\mathbf{T} \tag{4.3}$$

sind alle Matrizen mit konstanten Elementen.

Wenn wir die Gleichung (4.2) von links mit $\mathbf{T}^*$ multiplizieren und die Identität $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}^* = \mathbf{E}$ ausnutzen, so erhalten wir die Gleichung

$$(\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{T})\,\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{i} + \left(\mathbf{T}^*\cdot\frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}\right)\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{i}\,\frac{d\vartheta}{dt} + (\mathbf{T}^*\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T})\,\mathbf{T}^*\cdot\frac{d}{dt}\,\mathbf{i} = \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{u}\,.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_t &= \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\,,\\
\mathbf{S} &= \frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}\,,\ \mathbf{S}_t = \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\,,\\
\mathbf{L}_t &= \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{T}\,,\\
\mathbf{i}_t &= \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{i}\,,\\
\mathbf{u}_t &= \mathbf{T}^*\cdot\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

ein, so wird

$$\mathbf{T}^* \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i} = \frac{d}{dt}\mathbf{i}_t - \frac{d}{d\vartheta}\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_t \cdot \frac{d}{dt}\vartheta,$$

also erhalten wir die Gleichung:

$$\mathbf{R}_t \cdot \mathbf{i}_t + \left\{\mathbf{S}_t - \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{d}t\, \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}\right\} \mathbf{i}_t \frac{d}{dt}\vartheta + \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_t = \mathbf{u}_t\,. \tag{4.5}$$

Diese Gleichung (4.5) können wir als die allgemeinste Form solcher Matrizen-Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ansehen, welche die Gleichungen der synchronen und asynchronen Maschinen gleichzeitig enthält. — Die Gleichung (4.5) gilt sowohl für Synchronmaschinen mit zweiphasigem als auch mit dreiphasigem Rotor.

Wenn wir die unter *f)* in Punkt 1 angeführten Annahmen als unveränderlich angenommene Winkelgeschwindigkeit $\frac{d}{dt}\vartheta$ mit Ω bezeichnen, so ergibt sich $\vartheta = \Omega\, t$ und damit

$$\left\{\mathbf{R}_t + \Omega\left\{\mathbf{S}_t - \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T}\right\}\right\} \mathbf{i}_t + \mathbf{L}_t \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_t = \mathbf{u}_t\,. \tag{4.5.1}$$

Falls (bei Maschinen mit dreiphasigem Rotor) **R** und **L** nur aus zyklischen Blöcken dritter Ordnung bestehende Hypermatrizen sind, ist es zweckmäßig, die Matrizen **R**, **L** und $\mathbf{S} = \frac{d}{d\vartheta}\mathbf{L}$ entsprechend (3.3) in »semikanonischer« Form aufzuschreiben sowie die »endliche Fouriersche Reihe« der Säulenmatrizen $\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_F, \mathbf{i}_D$ bzw. $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_F, \mathbf{u}_D$ nach den Eigenvektoren der zyklischen Matrizen $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ aufzustellen. In diesem Falle zerfällt bereits die Gleichung (4.2) in drei voneinander unabhängige Matrizengleichungen, die nur quadratische Matrizen dritter Ordnung bzw. Säulenmatrizen mit drei Elementen enthalten. Diese 3 Matrizen-Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten können für sich in je eine Matrizen-Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten transformiert werden; diese Methode benutzen wir in Punkt 6 bei Behandlung der Maschinen mit dreiphasigem Rotor.

5. Matrizengleichung der Maschine mit zweiphasigem symmetrischem Rotor

Im Falle einer elektrischen Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor können die Koeffizientenmatrizen der in Punkt 4 abgeleiteten Matrizen-Differentialgleichungen (4.2) und (4.5) in dreierlei Blocktypen gegliedert werden: die aus den Widerständen und Induktivitäten der Phasenwicklungen des Stators gebildeten Blöcke sind quadratische Matrizen dritter

Ordnung; die aus den Widerständen und Induktivitäten der beiden Rotorwicklungen gebildeten Blöcke sind quadratische Matrizen zweiter Ordnung; die aus den Gegeninduktivitäten von Stator und Rotor gebildeten Matrizen hingegen sind Rechtecksmatrizen (2 Reihen und 3 Säulen, bzw. 3 Reihen und 2 Säulen). Weiterhin können die Strom- und Spannungsvektoren (Säulenmatrizen) jeweils in eine Säule mit drei Elementen und in eine Säule mit zwei Elementen gegliedert werden.

Es ist zweckmäßig, eine geeignete Transformierungsmatrix aufzustellen, mit deren Hilfe es möglich wird, einerseits die Koeffizientenmatrizen in solche Hypermatrizen zu transformieren, die aus 3×3 quadratischen Blöcken bestehen, andererseits die Strom- und Spannungs-Säulenmatrizen in Säulenmatrizen aus 6 Elementen zu transformieren, die in 2 jeweils aus 3 Elementen bestehende Säulen gegliedert werden können.

Nach Einführung der Rechtecksmatrix

$$\underset{3,2}{\mathbf{T}_h} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

kann leicht bewiesen werden, daß

$$\mathbf{T}_h^* \cdot \mathbf{T}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2$$

ist. Weiterhin führen wir die Hypermatrix

$$\Theta_h = \langle \mathbf{E}_3 , \mathbf{T}_h , \mathbf{T}_h \rangle \tag{5.2}$$

ein, so daß

$$\Theta_h^* \cdot \Theta_h = \langle \mathbf{E}_3 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_2 \rangle$$

wird.

Mit Hilfe der in Gleichung (5.2) definierten Matrix kann die Gleichung einer Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor in eine derartige Matrizen-Differentialgleichung transformiert werden, wo sämtliche Koeffizientenmatrizen aus 3×3 quadratischen Blöcken von jeweils dritter Ordnung bestehen. Ihre Strom- und Spannungs-Säulenmatrizen hingegen enthalten 9 Elemente. Wenn nämlich die Gleichung einer Maschine mit dreiphasigem Stator und zweiphasigem Rotor

$$\mathbf{Ri} + \frac{d}{dt}(\mathbf{Li}) = \mathbf{u} \tag{5.3}$$

ist, so kann diese Gleichung mit Hilfe von $\boldsymbol{\Theta}_h$ in die folgende Gleichung transformiert werden:

$$\boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Theta}_h^* \cdot \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Theta}_h^* \cdot \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{i}) = \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{u} \tag{5.3.1}$$

bzw. können wir nach Einführung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h &= \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Theta}_h^* \\ \mathbf{L}_h &= \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\Theta}_h^* \\ \mathbf{i}_h &= \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{u}_h &= \boldsymbol{\Theta}_h \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

schreiben:

$$\mathbf{R}_h \cdot \mathbf{i}_h + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_h \cdot \mathbf{i}_h) = \mathbf{u}_h . \tag{5.3.2}$$

Diese Gleichung aber entspricht in ihrer Form bereits dem in Punkt 6 noch näher zu behandelnden Gleichungstyp, so daß sich aus der dort abgeleiteten Lösung $\mathbf{i}_h$ von selbst ergibt und daher

$$\mathbf{i} = \boldsymbol{\Theta}_h^* \cdot \mathbf{i}_h \tag{5.4}$$

wird.

6. Matrizengleichung der Maschine mit dreiphasigem Rotor

Wenn wir die Eigenschaft der Koeffizientenmatrizen einer Maschine mit dreiphasigem Rotor ausnutzen, wonach nämlich alle Koeffizientenmatrizen zyklisch-quadratische Matrizen dritter Ordnung sind, so können wir die Gleichung (4.2) für den Fall der Maschinen mit dreiphasigem Rotor n folgender Form anschreiben:

$$\sum_{k=0}^{2} \left\{ \left\{ \begin{bmatrix} r_A & \mu'_{Fk} & \mu'_{Dk} \\ \mu^{*\prime}_{Fk} & r_F & 0 \\ \mu^{*\prime}_{Dk} & 0 & r_D \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \right\} \mathbf{i} + \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{Ak} & \mu_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu^*_{Fk} & \lambda_{Fk} & \lambda_{FDk} \\ \mu^*_{Dk} & \lambda_{FDk} & \lambda_{Dk} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^* \right\} \frac{d}{dt} \mathbf{i} \right\} = \mathbf{u}, \tag{6.1}$$

wo wir die Bezeichnung der Eigenwerte der zyklischen Blöcke der Koeffizientenmatrizen folgender Tabelle entnehmen können:

Block:	$\mathbf{L}_A$	$\mathbf{L}_F$	$\mathbf{L}_D$	$\mathbf{L}_{FD}$	$\mathbf{L}_{FD}^*$	$\mathbf{M}_F$	$\mathbf{M}_D$	$\mathbf{M}_F^*$	$\mathbf{M}_D^*$
Der k-te Eingewert:	λ_{Ak}	λ_{Fk}	λ_{Dk}	λ_{FDk}	λ_{FDk}^*	μ_{Fk}	μ_{Dk}	μ_{Fk}^*	μ_{Dk}^*

Ferner verwenden wir zur Bezeichnung der Eigenwerte der Derivationen nach ϑ bei den von ϑ abhängigen Blöcken folgende schematische Bezeichnungen :

Block :	$\mathbf{M}_F$	$\mathbf{M}_D$	$\mathbf{M}_F^*$	$\mathbf{M}_D^*$
Das Ω-fache des nach ϑ derivierten k-ten Eigenwertes :	μ'_{Fk}	μ'_{Dk}	$\mu^{*\prime}_{Fk}$	$\mu^{*\prime}_{Dk}$

Die Eigenwerte der zyklischen Blöcke können nach (3.2) errechnet werden. Die so erhaltenen Eigenwerte fassen wir wie folgt zusammen :

$$\lambda_{A0} = l_A - 2\, l_{Ag}$$
$$\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = l_A + l_{Ag}$$
$$\lambda_{F0} = l_F - 2\, l_{Fg}$$
$$\lambda_{F1} = \lambda_{F2} = l_F + l_{Fg}$$
$$\lambda_{D0} = l_D - 2\, l_{Dg}$$
$$\lambda_{D1} = \lambda_{D2} = l_D + l_{Dg}$$
$$\lambda_{FD0} = \lambda^*_{FD0} \cong 0$$
$$\lambda_{FD1} = \lambda^*_{FD1} = \lambda_{FD2} = \lambda^*_{FD2} = 3\, l_{FD}$$

$$\mu_{F0} = \mu^*_{F0} = 0$$

$$\mu_{F1} = \mu^*_{F2} = m_F \left\{ \cos\vartheta + \varepsilon \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \varepsilon \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \frac{3}{2}\, e^{j\vartheta}\, m_F$$

$$\mu_{F2} = \mu^*_{F1} = m_F \left\{ \cos\vartheta + \bar{\varepsilon} \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) + \varepsilon \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} = \frac{3}{2}\, e^{-j\vartheta}\, m_F.$$

$$\mu_{D0} = \mu^*_{D0} = 0$$

$$\mu_{D1} = \mu^*_{D2} = \frac{3}{2}\, e^{j\vartheta}\, m_D$$

$$\mu_{D2} = \mu^*_{D1} = \frac{3}{2}\, e^{-j\vartheta}\, m_D$$

$$\varepsilon = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Die gesuchte Funktion $\mathbf{i}(t)$ bzw. die auf der rechten Seite von (6.1) stehende Funktion $\mathbf{u}(t)$ kann in der Form

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_F \\ \mathbf{i}_D \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} i_{Aj} \\ i_{Fj} \\ i_{Dj} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_j \tag{6.2a}$$

dargestellt werden bzw. in der Form

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_D \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{2} \begin{bmatrix} u_{Aj} \\ u_{Fj} \\ u_{Dj} \end{bmatrix} \times \cdot \mathbf{w}_j, \tag{6.2b}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} i_{Aj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_A \\ i_{Fj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_F \\ i_{Dj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{i}_D \end{aligned}\right\} \tag{6.3a}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} u_{Aj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_A \\ u_{Fj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_F \\ u_{Dj} &= \frac{1}{3} \mathbf{w}_j^* \cdot \mathbf{u}_D . \end{aligned}\right\} \tag{6.3b}$$

Wenn wir in der Gleichung (6.1) an Stelle von $\mathbf{i}$ bzw. von $\mathbf{u}$ ihre laut den Vektoren $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ entwickelten Darstellungen in der Form von (6.2*a*) bzw. (6.2*b*) einsetzen und die Gleichung (6.1) von links her zuerst mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \overset{*}{\mathbf{w}}_0$, sodann mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \overset{*}{\mathbf{w}}_1$ und schließlich mit $\mathbf{E}_3 \times \cdot \overset{*}{\mathbf{w}}_2$ multiplizieren, so zerfällt die Gleichung (6.1) in folgende 3 Matrizengleichungen:

$$\begin{bmatrix} r_A & \mu'_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu^{*\prime}_{Fk} & r_F & 0 \\ \mu^{*\prime}_{Dk} & 0 & r_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{Ak} & \mu_{Fk} & \mu_{Dk} \\ \mu^*_{Fk} & \lambda_{Fk} & \lambda_{FDk} \\ \mu^*_{Dk} & \lambda_{FDk} & \lambda_{Dk} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{Ak} \\ u_{Fk} \\ u_{Dk} \end{bmatrix}; \; k = 0, 1, 2 \tag{6.4}$$

oder, wenn wir die folgenden Abkürzungen einführen:

$$\mathbf{i}_{(k)} = \begin{bmatrix} i_{Ak} \\ i_{Fk} \\ i_{Dk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{(k)} = \begin{bmatrix} u_{Ak} \\ u_{Fk} \\ u_{Dk} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_0 = \begin{bmatrix} r_A & 0 & 0 \\ 0 & r_F & 0 \\ 0 & 0 & r_D \end{bmatrix}, \quad \Xi_1 = \begin{bmatrix} r_A & j\frac{3}{2}\omega e^{j\vartheta} m_F & j\frac{3}{2}\omega e^{j\vartheta} m_D \\ -j\frac{3}{2}\omega e^{-j\vartheta} m_F & r_F & 0 \\ -j\frac{3}{2}\omega e^{-j\vartheta} m_D & 0 & r_D \end{bmatrix},$$

$$\Xi_2 = \Xi_1^*,$$

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} l_A - 2\,l_{Ag} & 0 & 0 \\ 0 & l_F - 2\,l_{Fg} & 0 \\ 0 & 0 & l_D - 2\,l_{Dg} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_F & \frac{3}{2} e^{j\vartheta} m_D \\ \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_F & l_F + l_{Fg} & 3\,l_{FD} \\ \frac{3}{2} e^{-j\vartheta} m_D & 3\,l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \Lambda_1^*$$

so können wir schreiben:

$$\Xi_k \cdot \mathbf{i}_{(k)} + \Lambda_k \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(k)} = \mathbf{u}_{(k)}; \quad k = 0, 1, 2. \tag{6.4.1}$$

Es ist ersichtlich, daß die Matrizendifferentialgleichung mit Index $k = 0$ des Matrizen-Differentialgleichungssystems (6.4.1) konstante Koeffizienten aufweist und von selbst in die folgenden 3 skalaren Differentialgleichungen zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} r \cdot i_{Ao} + (l_A - 2\,l_{Ag}) \cdot \frac{d}{dt} i_{Ao} &= u_{Ao} \\ r \cdot i_{Fo} + (l_F - 2\,l_{Fg}) \cdot \frac{d}{dt} i_{Fo} &= u_{Fo} \\ r \cdot i_{Do} + (l_D - 2\,l_{Dg}) \cdot \frac{d}{dt} i_{Do} &= u_{Do}. \end{aligned}\right\} \tag{6.4.2.0}$$

Die Matrizen-Differentialgleichungen mit Index $k = 1$ und $k = 2$ haben veränderliche Koeffizienten. Im Einklang mit dem in Punkt 4 dargelegten allgemeinen Prinzip suchen wir jetzt geeignete Transformierungsmatrizen $\Theta_1 = \Theta$ und $\Theta_2 = \Theta^*$ dritter Ordnung, welche folgende Bedingungen erfüllen :

$$\left.\begin{array}{l} \Theta \cdot \Theta^* = \mathbf{E}_3 \,; \\ \Theta^* \cdot \Xi_1 \cdot \Theta, \quad \Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta \text{ und } \dfrac{d}{d\vartheta}\Theta^* \cdot \Theta \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

sind alle Matrizen dritter Ordnung mit konstanten Elementen.

Wenn wir eine, die in (6.5) aufgestellten Bedingungen erfüllende Transformierungsmatrix Θ einführen, können wir die Gleichung (6.4.1) im Falle von $k = 1$ und $k = 2$ folgendermaßen umändern :

$$(\Theta^* \cdot \Xi_1 \cdot \Theta)\, \Theta^* \cdot \mathbf{i}_{(1)} + (\Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta)\, \Theta^* \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)} = \Theta^* \cdot \mathbf{u}_{(1)}\,, \tag{6.4.2.1}$$

$$(\Theta \cdot \Xi_2 \cdot \Theta^*)\, \Theta \cdot \mathbf{i}_{(2)} + (\Theta \cdot \Lambda_2 \cdot \Theta^*)\, \Theta \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)} = \Theta \cdot \mathbf{u}_{(2)}\,. \tag{6.4.2.2}$$

und da

$$\frac{d}{dt}(\Theta^* \cdot i_{(1)}) = \frac{d}{d\vartheta}\Theta^* \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \cdot \mathbf{i}_{(1)} + \Theta^* \frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(1)} \tag{6.6.1}$$

bzw.

$$\left(\frac{d}{dt}\Theta \cdot \mathbf{i}_{(2)}\right) \frac{d}{d\vartheta}\Theta \cdot \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{i}_{(2)} + \Theta \frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(2)}\,, \tag{6.6.2}$$

so führen wir die Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{l} \Xi_{1t} = \Theta^* \cdot \Xi_1 \cdot \Theta \\ \Lambda_{1t} = \Theta^* \cdot \Lambda_1 \cdot \Theta \\ \mathbf{i}_{(1)t} = \Theta^* \cdot \mathbf{i}_{(1)} \\ \mathbf{u}_{(1)t} = \Theta^* \cdot \mathbf{u}_{(1)} \end{array}\right. \tag{6.7.1}$$

bzw.

$$\left.\begin{array}{l} \Xi_{2t} = \Theta \cdot \Xi_2 \cdot \Theta^* \\ \Lambda_{2t} = \Theta \cdot \Lambda_2 \cdot \Theta^* \\ \mathbf{i}_{(2)t} = \Theta \cdot i_{(2)} \\ \mathbf{u}_{(2)t} = \Theta \cdot \mathbf{u}_{(2)} \end{array}\right. \tag{6,7.2}$$

ein und können dann die Gleichungen (6.4.2.1) bzw. (6.4.2.2) wie folgt schreiben:

$$\left|\Xi_{1t} - \Omega\,\Lambda_{1t}\frac{d\Theta^*}{d\vartheta}\Theta\right|\mathbf{i}_{(1)t} + \Lambda_{1t}\frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t} \tag{6.4.3.1}$$

bzw.

$$\left|\Xi_{2t} - \Omega\,\Lambda_{2t}\frac{d\,\Theta}{d\,\vartheta}\Theta^*\right|\mathbf{i}_{(2)t} + \Lambda_{2t}\frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(2)t} = \mathbf{u}_{(2)t}\,. \tag{6.4.3.2}$$

Die Bedingungen (6.5) können wir mit einer Diagonalmatrix

$$\Theta = \langle e^{j\alpha\vartheta},\, e^{j\beta\vartheta},\, e^{j\gamma\vartheta}\rangle \tag{6.8}$$

erfüllen, wo α, β, γ reelle Konstanten bedeuten. Wie aus den Bedingungen (6.5) folgt, müssen die Konstanten α, β, γ folgende Forderungen erfüllen:

$$\beta = \gamma = \alpha - 1\,. \tag{6.9}$$

Wir können also eine der Konstanten α, β, γ beliebig wählen. Die elektrotechnische Bedeutung der verschiedenartigen Wahl der Konstanten α und $\beta = \gamma$ ergibt sich wie folgt:

a) Im Falle von $\alpha = 0$ und $\beta = \gamma = -1$ bleiben nach der Transformierung (6.7) die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« des Statorstromes und der Statorspannung unverändert, und die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« der Rotorströme und Rotorspannungen werden »auf den Stator transformiert«. Diese Transformation kann vorteilhaft verwendet werden, wenn auf den Stator ein elektrisches Netz geschaltet ist.

b) Im Falle von $\alpha = 1$ und $\beta = \gamma = 0$ bleiben nach der Transformierung (6.7) die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« der Rotorströme und der Rotorspannungen unverändert, und die symmetrischen »Mit- und Gegenkomponenten« des Statorstromes und der Statorspannung werden »auf den Rotor transformiert«. Diese Transformation enthält auch die sogenannte PARKsche Transformation [1].

Dem Vorhergehenden entsprechend wird

$$\Theta = \langle e^{j\alpha\vartheta},\, e^{j(\alpha-1)\vartheta},\, e^{j(\alpha-1)\vartheta}\rangle\,,$$

also

$$\Xi_{1t} = \begin{bmatrix} r_A & j\frac{3}{2}\Omega\,m_F & j\frac{3}{2}\Omega\,m_D \\ -j\frac{3}{2}\Omega\,m_F & r_F & 0 \\ -j\frac{3}{2}\Omega\,m_D & 0 & r_D \end{bmatrix}, \tag{6.8.1}$$

$$\Xi_{2t} = (\Xi_{1t})^{*}, \tag{6.8.2}$$

$$\Lambda_{1t} = \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} m_F & \frac{3}{2} m_D \\ \frac{3}{2} m_F & l_F + l_{Fg} & 3\, l_{FD} \\ \frac{3}{2} m_D & 3\, l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix} \tag{6.9.1}$$

$$\Lambda_{2t} = \Lambda_{1t} = \Lambda_t, \tag{6.9.2}$$

$$\Lambda_{1t} \frac{d\,\Theta^*}{d\,\vartheta} \Theta = -j \begin{bmatrix} a\,(l_A + l_{Ag}) & \frac{3}{2}(a-1)\, m_F & \frac{3}{2}(a-1)\, m_D \\ \frac{3}{2}\, a\, m_F & (a-1)\,(l_F + l_{Fg}) & 3\,(a-1)\, l_{FD} \\ \frac{3}{2}\, a\, m_D & 3\,(a-1)\, l_{FD} & (a-1)\,(l_D + l_{Dg}) \end{bmatrix}, \tag{6.10.1}$$

$$\Theta^* \frac{d\,\Theta}{d\,\vartheta} \Lambda_{2t} = \left(\Lambda_{1t} \frac{d\,\Theta^*}{d\,\vartheta} \Theta \right)^{*}. \tag{6.10.2}$$

Wenn wir diese Beziehungen in die Gleichung (6.4.3.1) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{bmatrix} r_A + j\,\Omega a\,(l_A + l_{Ag}) & \frac{3}{2} j\,\Omega a\, m_F & \frac{3}{2} j\,\Omega a\, m_D \\ \frac{3}{2} j\,\Omega\,(a-1)\, m_F & r_F + j\Omega(a-1)(l_F + l_{Fg}) & 3\, j\,\Omega\,(a-1)\, l_{FD} \\ \frac{3}{2} j\,\Omega\,(a-1)\, m_D & \frac{3}{2} j\,\Omega\,(a-1)\, l_{FD} & r_D + j\,\Omega\,(a-1)\,(l_D + l_{Dg}) \end{bmatrix} \mathbf{i}_{(1)t} +$$

$$+ \begin{bmatrix} l_A + l_{Ag} & \frac{3}{2} m_F & \frac{3}{2} m_D \\ \frac{3}{2} m_F & l_F + l_{Fg} & 3\, l_{FD} \\ \frac{3}{2} m_D & 3\, l_{FD} & l_D + l_{Dg} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t}. \tag{6.11.1}$$

Um das Obige durch ein einfaches Anwendungsbeispiel vorzuführen nehmen wir an, daß:

$$l_A + l_{Ag} = l_F + l_{Fg} = l_D + l_{Dg} = L; \tag{6.12.1}$$

$$\frac{3}{2} m_F = \frac{3}{2} m_D = 3\, l_{FD} = M. \tag{6.12.2}$$

So, können wir unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (6.12.1) und (6.12.2) enthaltenen Vernachlässigungen die Gleichung (6.11.1) in der folgenden vereinfachten Form schreiben:

$$\left\{\langle r_A, r_F, r_D \rangle + j\Omega \begin{bmatrix} L & M & M \\ (a-1)M & (a-1)L & (a-1)M \\ (a-1)M & (a-1)M & (a-1)L \end{bmatrix}\right\} \mathbf{i}_{(1)t} + \tag{6.13.1}$$

$$+ \mathbf{C}(L, M, M) \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{u}_{(1)t}.$$

Auf ähnliche Weise können wir aus der Gleichung (6.4.3.2) die folgende Beziehung erhalten:

$$\left\{\langle r_A, r_F, r_D \rangle - j\Omega \begin{bmatrix} L & M & M \\ (a-1)M & (a-1)L & (a-1)M \\ (a-1)M & (a-1)M & (a-1)L \end{bmatrix}\right\} \mathbf{i}_{(2)t} +$$

$$+ \mathbf{C}(L, M, M) \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(2)t} = \mathbf{u}_{(2)t}. \tag{6.13.2}$$

Zunächst wollen wir uns mit der Gleichung (6.13.1) beschäftigen. Wir führen die Transformierungsmatrix

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \bar{\varepsilon} \\ 1 & \bar{\varepsilon} & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{6.14.1}$$

ein (natürlich ist $\mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^* = \mathbf{E}$), mit deren Hilfe wir die Gleichung (6.13.1) folgendermaßen schreiben können:

$$\left\{\mathbf{W} \langle r_A, r_F, r_D \rangle \mathbf{W}^* + j\Omega\, \mathbf{W} \begin{bmatrix} L & M & M \\ (a-1)M & (a-1)L & (a-1)M \\ (a-1)M & (a-1)M & (a-1)L \end{bmatrix} \mathbf{W}^* \right\} \mathbf{W}\mathbf{i}_{(1)t} +$$

$$+ \mathbf{W} \cdot \mathbf{C}(L, M, M) \cdot \mathbf{W}^* \frac{d}{dt} \mathbf{W}\mathbf{i}_{(1)t} = \mathbf{W}\mathbf{u}_{(1)t}.$$

Nach Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{i}_{(1)s} = \mathbf{W}\mathbf{i}_{(1)t}$$
$$\mathbf{u}_{(1)s} = \mathbf{W}\mathbf{u}_{(1)t} \tag{6.14.2}$$

und

$$R_0 = r_A + r_F + r_D$$
$$R_1 = r_A + \bar{\varepsilon}\, r_F + \varepsilon\, r_D$$
$$R_2 = r_A + \varepsilon\, r_F + \bar{\varepsilon}\, r_D \tag{6.14.3}$$

erhalten wir aus der Gleichung (6.13.1) die Beziehung

$$\left\{\mathbf{C}(R_0, R_1, R_2) + \frac{j\Omega}{3}\begin{bmatrix}(3a-2)(L+2M) & L-M & L-M \\ L+2M & (3a-2)(L-M) & L-M \\ L+2M & L-M & (3a-2)(L-M)\end{bmatrix}\right\}\mathbf{i}_{(1)s} +$$

$$+ \langle L+2M, L-M, L-M\rangle \frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(1)s} = \mathbf{u}_{(1)s}.$$

Wenn wir die Gleichung mit der Diagonalmatrix

$$\left\langle \frac{1}{L+2M}, \frac{1}{L-M}, \frac{1}{L-M} \right\rangle$$

multiplizieren und die Bezeichnung

$$\mathbf{u}_{(1)c} = \left\langle \frac{1}{L+2M}, \frac{1}{L-M}, \frac{1}{L-M} \right\rangle \cdot \mathbf{u}_{(1)s} \tag{6.14.4}$$

einführen, so ergibt sich

$$\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{R_0}{L+2M} & \frac{R_1}{L+2M} & \frac{R_2}{L+2M} \\ \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M} & \frac{R_1}{L-M} \\ \frac{R_1}{L-M} & \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M}\end{bmatrix} + \frac{j\Omega}{3}\begin{bmatrix}3a-2 & \frac{L-M}{L+2M} & \frac{L-M}{L+2M} \\ \frac{L+2M}{L-M} & 3a-2 & 1 \\ \frac{L+2M}{L-M} & 1 & 3a-2\end{bmatrix}\right\}\mathbf{i}_{(1)s} +$$

$$+ \frac{d}{dt}\mathbf{i}_{(1)s} = \mathbf{u}_{(1)c}. \tag{6.15}$$

Führen wir nun noch die Transformierungsmatrix

$$\varDelta = \left\langle \frac{L+2M}{L-M}, \frac{L-M}{L+2M}, \frac{L-M}{L+2M} \right\rangle$$

ein und verwenden die folgenden kurzen Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \varDelta \cdot \mathbf{i}_{(1)s} &= \mathbf{i}_{(1)\sigma} \\ \varDelta \cdot \mathbf{u}_{(1)c} &= \mathbf{u}_{(1)\sigma}, \end{aligned} \tag{6.16}$$

so können wir mit ihrer Hilfe die Gleichung (6.15) folgendermaßen abändern:

$$\left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{R_0}{L+2M} & \frac{R_1}{L-M} & \frac{R_2}{L-M} \\ \frac{R_2}{L+2M} & \frac{R_0}{L-M} & \frac{R_1}{L-M} \\ \frac{R_1}{L+2M} & \frac{R_2}{L-M} & \frac{R_0}{L-M} \end{bmatrix} + \frac{j\Omega}{3} \mathbf{C}(3a-2, 1, 1) \right\} \mathbf{i}_{(1)\sigma} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\sigma} = \mathbf{u}_{(1)\sigma}. \tag{6.17}$$

Wenn wir jetzt die Gleichung (6.17) mit der Matrix $\mathbf{W}^*$ von links her multiplizieren und

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)\tau} &= \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{i}_{(1)\sigma} \\ \mathbf{u}_{(1)\tau} &= \mathbf{W}^* \cdot \mathbf{u}_{(1)\sigma} \end{aligned} \tag{6.18}$$

einführen, erhalten wir aus (6.17) die Gleichung:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_0}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + j\Omega \langle a, a-1, a-1 \rangle \right\} \mathbf{i}_{(1)\tau} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\tau} = \mathbf{u}_{(1)\tau}. \tag{6.19}$$

Führen wir noch die Transformierungsmatrix

$$\mathbf{H} = \langle \sqrt{r_F r_D}, \sqrt{r_A r_D}, \sqrt{r_A r_F} \rangle$$

und die Bezeichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{(1)\omega} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_{(1)\tau} \\ \mathbf{u}_{(1)\omega} &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_{(1)\tau} \end{aligned} \tag{6.20}$$

ein und multiplizieren die Gleichung (6.19) von links her mit $\mathbf{H}$, so gelangen wir unter Anwendung der Identität $\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{E}$ zur nachfolgenden Gleichung (in dieser ist das erste Glied des Koeffizienten $\mathbf{i}_{(1)\tau}$ *bereits eine symmetrische Matrix*, da wir ja das erste Glied des Koeffizienten $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ in der Gleichung (6.19) von links her mit $\mathbf{H}$ und von rechts her mit $\mathbf{H}^{-1}$ multipliziert haben):

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{r_A}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{\sqrt{r_A r_F}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{\sqrt{r_A r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{\sqrt{r_A r_F}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} & -\frac{\sqrt{r_F r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \\ -\frac{\sqrt{r_A r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & -\frac{\sqrt{r_F r_D}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} & \frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{L+M}{L+2M} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + j\Omega \langle a, a-1, a-1, \rangle \right\} \mathbf{i}_{(1)\omega} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\omega} = \mathbf{u}_{(1)\omega} \,. \tag{6.21}$$

Untersuchen wir jetzt den Fall $a = 1$, der die sogenannte PARKsche Transformation enthält [1]. In diesem Fall können wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{i}_{(1)}$ auf folgende Weise gewinnen:

Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix unter der Annahme, daß $r_A = 0$ und $r_F \neq r_D$ ist. Dabei bezeichnen wir die Eigenwerte mit $\nu_i^{(0)}$ und die Eigenvektoren mit $\mathbf{c}_i^{(0)}$, und erhalten:

$$\begin{aligned} \nu_1^{(0)} &= j\Omega \,; \\ \nu_2^{(0)} &= \left(\frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{1+\xi}{2} + \frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{1-\xi}{2} \right) \frac{L+M}{L+2M} \,; \\ \xi &= \sqrt{1 + \left(\frac{M}{L+M} \right)^2 \frac{4 r_F r_D}{(r_F - r_D)^2}} \\ \nu_3^{(0)} &= \left(\frac{r_D}{L-M} \cdot \frac{1+\xi}{2} + \frac{r_F}{L-M} \cdot \frac{1-\xi}{2} \right) \frac{L+M}{L+2M} \,; \end{aligned} \tag{6.22}$$

sowie

$$\mathbf{c}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \tag{6.23}$$

$$\mathbf{c}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi+1} \end{bmatrix} \varkappa; \quad \mathbf{c}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi+1} \\ 1 \end{bmatrix} \varkappa; \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\xi^2-1}{(\xi+1)^2}}}.$$

Im Falle wenn $r_A \neq 0$, $(r_F \neq r_D)$, aber r_A im Verhältnis zu r_F und r_D einen verhältnismäßig kleinen Wert darstellt, können die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix in der Form

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_1^{(0)} + \Delta \nu_1 \\ \nu_2 &= \nu_2^{(0)} + \Delta \nu_2 \\ \nu_3 &= \nu_3^{(0)} + \Delta \nu_3 \end{aligned}$$

gesucht werden. In diesem Falle können für $\Delta \nu_i$ die folgenden annähernd genauen Gleichungen gewonnen werden:

$$\Delta \nu_1 \cong \frac{r_A}{L-M} \, \frac{L+M}{L+2M} - j\Omega \, \frac{r_A (r_D - r_F)}{\Omega^2 (L-M)^2} \left(\frac{L+M}{L+2M} \right)^2 \xi$$

$$\Delta \nu_2 \cong j\Omega \, \frac{r_A}{\Omega^2 (L-M)^2} \left[\frac{(r_F + r_D)^2 \cdot L}{2(r_D - r_F)(L+2M)\xi} - \frac{r_F r_D (L-M)}{(r_D - r_F)(L+2M)\xi} - \frac{(r_F + r_D) L}{2(L+2M)} \right].$$

$$\Delta \nu_3 = -\Delta \nu_2$$

(Den Wert von ξ siehe weiter oben.)

Wenn wir die imaginären Glieder im Verhältnis zu den reellen Gliedern vernachlässigen, erzielen wir für die Eigenvektoren folgende Näherungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \nu_1 &\cong \nu_1^{(0)} + \frac{r_A (L+M)}{(L-M)(L+2M)} \\ \nu_2 &\cong \nu_2^{(0)} \\ \nu_3 &\cong \nu_3^{(0)}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

In diesem Falle erhalten wir (abgesehen von kleinen Größen zweiter bzw. höherer Ordnung) für die Eigenvektoren die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &\cong \mathbf{c}_1^{(0)} \\ \mathbf{c}_2 &\cong \mathbf{c}_2^{(0)} \\ \mathbf{c}_3 &\cong \mathbf{c}_3^{(0)}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Im Falle, wenn $r_A \neq 0$, aber $r_F = r_D = R$ ist, können wir die Eigenwerte der in der Gleichung (6.21) vorkommenden Koeffizientenmatrix $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ wie folgt erhalten (es ist zweckmäßig, den unmittelbar errechenbaren Eigenwert mit ν_3 zu bezeichnen) : $\nu_3 = \dfrac{R}{L - M}$; (6.26.1)

die Eigenwerte ν_1 und ν_2 sind hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$\nu^2 - \left(j\,\Omega + \frac{r_A (L + M)}{(L - M)(L + 2M)} + \frac{R \cdot L}{(L - M)(L + 2M)} \right) \nu +$$
$$+ j\,\Omega \frac{R \cdot L}{(L - M)(L + 2M)} + \frac{r_A R (L - M)}{(L - M)^2 (L + 2M)} = 0 \,. \tag{6.26.2}$$

Wie oben untersuchen wir zunächst den Fall $r_A = 0$. Dabei ergeben sich die Eigenwerte in derselben Reihenfolge wie vorhin :

$$\begin{aligned} \nu_1^{(0)} &= j\,\Omega \\ \nu_2^{(0)} &= \frac{R \cdot L}{(L - M)(L + 2M)} \,; \\ \nu_3^{(0)} &= \frac{R}{L - M} \end{aligned} \tag{6.27}$$

die Eigenvektoren jedoch erhalten wir wie folgt :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1^0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c}_3^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{6.28}$$

Wenn $r_A \neq 0$, aber der Wert von r_A gegenüber den Werten von $r_F = r_D = R$ ein verhältnismäßig kleiner Wert ist, verändert sich der Eigenwert ν_3 nicht, die Eigenwerte ν_1 und ν_2 jedoch können wir gleichfalls in folgender Form suchen :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_1^{(0)} + \Delta\,\nu_1 \\ \nu_2 &= \nu_2^{(0)} + \Delta\,\nu_2 \end{aligned} \tag{6.29.1}$$

und erzielen dadurch, daß

$$\Delta \nu_1 = \frac{\dfrac{r_A \cdot L}{(L-M)(L+2M)} - \dfrac{j\Omega r_A R(L-M)}{\Omega^2 (L-M)^2 (L+2M)}}{1 + j\Omega \dfrac{R \cdot L}{\Omega^2 (L-M)(L+2M)}} \tag{6.29.2}$$

$$\Delta \nu_2 = j\Omega \frac{r_A RM(L-M)}{\Omega^2 (L-M)(L+2M)^2 \left(1 + j\Omega \dfrac{RL}{\Omega^2 (L-M)(L+2M)}\right)}$$

wird bzw. wie oben unter Vernachlässigung der imaginären Glieder

$$\Delta \nu_1 = \frac{r_A (L+M)}{(L-M)(L+2M)}$$

$$\Delta \nu_2 = 0\,, \tag{6.29.3}$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\gamma^2}{2}}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\gamma}{2} \\ -\dfrac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2+\gamma^2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{6.30}$$

wo der Wert der Konstante γ als eine Wurzel der folgenden Gleichung zweiten Grades erscheint:

$$\frac{\sqrt{r_A R}}{L-M} \cdot \frac{M}{L+2M} \gamma^2 + \left(j\Omega + \frac{(r_A - R)(L+M)}{(L-M)(L+2M)} + \frac{RM}{(L-M)(L+2M)}\right)\gamma - \\ - \frac{2\sqrt{r_A R}}{L-M} \frac{M}{L+2M} = 0\,. \tag{6.31}$$

Sobald die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix der Gleichung (6.21) bekannt sind, kann die Gleichung (6.21) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3] \langle \nu_1, \nu_2, \nu_3 \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \mathbf{c}_3^* \end{bmatrix} \mathbf{i}_{(1)\omega} + \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{(1)\omega} = \mathbf{u}_{(1)\omega}$$

bzw. von links her mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \mathbf{c}_3^* \end{bmatrix} = \mathbf{S}^*$$

multipliziert:

$$\mathbf{S}^* \mathbf{i}_{(1)\omega} = \langle e^{-\nu_1 t}, e^{-\nu_2 t}, e^{-\nu_3 t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{i}_{(1)\omega, 0} +$$
$$+ \int_0^t \langle e^{-\nu_1 (t-\tau)}, e^{-\nu_2 (t-\tau)}, e^{-\nu_3 (t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{u}_{(1)\omega}(\tau)\, d(\tau). \tag{6.32}$$

Da wir aber $\mathbf{i}_{(1)\omega}$ aus der eigentlichen Unbekannten, nämlich aus $\mathbf{i}_{(i)}$, durch die Transformationen (6.7.1), (6.14.2), (6.18) und (6.20) gewonnen haben, können wir unter Einführung der Abkürzung

$$\sigma = \frac{L-M}{L+2M} \tag{6.33}$$

schreiben:

$$\mathbf{i}_{(1)} = \langle e^{j\Theta}, 1, 1 \rangle \mathbf{W}^* \left\langle \sqrt{\sigma}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\rangle \mathbf{W} \left\langle \frac{1}{\sqrt{r_F r_D}}, \frac{1}{\sqrt{r_A r_D}}, \frac{1}{\sqrt{r_A r_F}} \right\rangle \mathbf{i}_{(1)\omega} =$$
$$= \mathbf{D}\mathbf{i}_{(1)\omega} \tag{6.34.1}$$

und ferner, gleichfalls unter Berücksichtigung der Transformationen (6.7.1), (6.14.2), (6.18) und (6.20):

$$\mathbf{u}_{(1)\omega} = \langle \sqrt{r_F r_D}, \sqrt{r_A r_D}, \sqrt{r_A r_F} \rangle \mathbf{W} \left\langle \sqrt{\sigma}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right\rangle$$
$$\left\langle \frac{1}{L+2M}, \frac{1}{L-M}, \frac{1}{L-M} \right\rangle \mathbf{W}^* \langle e^{j\Theta}, 1, 1 \rangle \mathbf{u}_{(1)} = \mathbf{G}\mathbf{u}_{(1)}. \tag{6.34.2}$$

Unter Verwendung der Beziehungen (6.34.1) und (6.34.2) ergibt sich:

$$\mathbf{i}_{(1)} = \mathbf{D}\mathbf{S} \langle e^{-\nu_1 t}, e^{-\nu_2 t}, e^{-\nu_3 t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{i}_{(1),0} +$$
$$+ \int_0^t \mathbf{D}\mathbf{S} \langle e^{-\nu_1 (t-\tau)}, e^{-\nu_2 (t-\tau)}, e^{-\nu_3 (t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{G}\mathbf{u}_{(1)}(\tau)\, d(\tau).$$

Durch Einführung der Abkürzungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{DS} \langle e^{-\nu t}, e^{-\nu t}, e^{-\nu t} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{D}^{-1} \tag{6.34.1}$$

und

$$\mathbf{Y} = \mathbf{DS} \langle e^{-\nu (t-\tau)}, e^{-\nu (t-\tau)}, e^{-\nu (t-\tau)} \rangle \mathbf{S}^* \mathbf{G} \tag{6.34.2}$$

erhalten wir

$$\mathbf{i}_{(1)} = \mathbf{F}\mathbf{i}_{(1),0} + \int_0^t \mathbf{Y}\mathbf{u}_{(1)}(\tau)\, d(\tau) . \tag{6.35}$$

Auf Grund von (6.33) sowie von (6.34.1) und (6.34.2) finden wir:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3\sqrt{\sigma}} \begin{bmatrix} \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_F r_D}} e^{j\Theta} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_D}} e^{j\Theta} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_F}} e^{j\Theta} \\ \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_F r_D}} & \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_A r_D}} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_F}} \\ \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_F r_D}} & \frac{\sigma-1}{\sqrt{r_A r_D}} & \frac{2+\sigma}{\sqrt{r_A r_F}} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3\sqrt{\sigma}} \begin{bmatrix} (1+2\sigma) & \sqrt{r_F r_D}\, e^{-j\Theta} & (1-\sigma) & \sqrt{r_F r_D} & (1-\sigma)\sqrt{r_F r_D} \\ (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_D}\, e^{-j\Theta} & (1+2\sigma) & \sqrt{r_A r_D} & (1-\sigma)\sqrt{r_A r_D} \\ (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_F}\, e^{-j\Theta} & (1-\sigma) & \sqrt{r_A r_F} & (1+2\sigma)\sqrt{r_A r_F} \end{bmatrix}$$

sowie:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{(L+2M)(L-M)}} \langle e^{-j\Theta}, 1, 1 \rangle .$$

Im weiteren beschränken wir uns auf den Fall, daß $r_A \neq 0$, aber der Wert von r_A gegenüber den Werten von r_F und r_D verhältnismäßig klein ist. Dann ergibt sich auf Grund der Gleichungen (6.23) und (6.25):

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & \eta \\ 0 & -\eta & \xi \end{bmatrix}, \tag{6.25}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta+1)^2}}} \tag{6.36}$$

$$\eta = \frac{\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{(\zeta+1)}}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta+1)^2}}} .$$

Zusammenfassung

Zweck vorliegender Arbeit ist die Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge von elektrischen Dreiphasenmaschinen durch Anwendung einiger neuerer Ergebnisse der Matrizentheorie.

Die Differentialgleichungen der Stator- bzw. Rotorwicklungen der Wechselstrommaschinen sind im Falle konstanter Drehzahl in eine lineare Matrizendifferentialgleichung mit *variabler* Koeffizientenmatrix zusammenfaßbar [s. (4.2.)]. Die Matrizendifferentialgleichung ist durch Anwendung der in (4.3) definierten Transformationsmatrix **T** in eine Matrizendifferentialgleichung mit *konstanter* Koeffizientenmatrix transformierbar [s. (4.5) bzw. (4.5.1)]. Die Lösung dieser Matrizendifferentialgleichung ist in einer früheren Arbeit eines der Autoren gegeben. Im Falle einer räumlichen zyklischen Symmetrie der Wicklungen sind die Lösungsformeln zur numerischen Berechnung besonders geeignet.

Literatur

1. PARK, R. H.: »Two-Reaction Theory of Synchronous Machines«. Part I.: A. I. E. E. Trans **48**, 716 (1929); Part II.: A. I. E. E. Trans. 362 (1933) S. 2, Cl. (6) u. (7).
2. LAIBLE, TH.: Die Theorie der Synchronmaschine in nichtstationärem Betrieb. Berlin 1952.
3. CONCORDIA, CH.: Synchronous Machines Theory and Performance. New York 1956.
4. GORJEW, A. A.: Ausgleichsvorgänge in elektrischen Maschinen. 1951.
5. WENIKOW, W. A.—SCHUKOW, L. A.: Ausgleichsvorgänge in elektrischen Systemen. Berlin 1956.
6. KOVÁCS, K. P.—RÁCZ, I.: Váltakozóáramú gépek tranziens folyamatai (Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen). Budapest 1954.
7. KRON, G.: A short course in tensor analysis for electrical engineers. New York 1952.
8. FRAUENBERGER, L.: Beitrag zur Theorie von Dreiphasentransformatoren ohne Nulleiterstrom im stationären Betrieb und bei Einschwingsvorgängen. Elektrotechnik und Maschinenbau. **58**, 293 (1940).
9. SHEN, D. W. C.: Generalized coordinates in substitutive networks. Journal of Theor. Exp. and Appl. Physics, **39**, 870 (1948).
10. ЯАНКО-ТРИНИЦКИЙ: Уравнения периодных электромагнитных процессов асинхронного двигателя и их решения (Электричество, 1951, № 3).
11. KUCERA, J.: Les repères tournants dans l'analyse tensorielle des machines électriques. Revue Général de l'Électricité, Paris. **61**, No. 7, S. 1 (1952).
12. LOVASS-NAGY, V.—GYŐRY, T.: »Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálata a matrixszámítás segítségével« (»Die mathematische Untersuchung von gekoppelten Schwingungskreisen mit Hilfe der Matrizenrechnung«). Mitteilungen des Institutes für angewandte Mathematik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, **3**, 65 (1954).
13. KRON, G.: »Tearing and interconnecting as a form of transformation«. Quarterly of Applied Mathematics, New York. **13**, 147 (1955).
14. FORTET, R.: »Vecteurs, matrices et déterminants, tenseurs.« Bulletin de la Société Française des Électriciens, Paris. **5**, 710 (1955).
15. LOVASS-NAGY, V.: »On an Application of Egerváry's Hypermatrixalgorism to the Mathematical Investigation of Polyphase Transformers«. Acta Technica Acad. Sc. Hung. **15**, 261 (1956).
16. LOVASS-NAGY, V.: »A matrix-elmélet néhány újabb eredményének alkalmazása villamos transzformátorok matematikai vizsgálatára« (»Über die Anwendung einiger neuerer Ergebnisse der Matrizentheorie zur mathematischen Untersuchung elektrischer Transformatoren«). Wissenschaftliche Tagung der Techn. Universität für Bau- und Verkehrswesen, 11—12. Nov. 1955. Im Druck erschienen: 1957.
17. LOVASS-NAGY, V.—SZENDY, CH.: »Application of the Matrix Calculus to the Investigation of Transformers in Arbitrary Connection«. Acta Technica Acad. Sc. Hung. **16**, 311 (1957).
18. EGERVÁRY, J.: »Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról« (»Über die kanonische Darstellung von Matrixfunktionen«). A M. Tud. Akadémia III. Osztályának Közleményei (Mitteilungen der III. Klasse der Ung. Akad. d. Wiss.) **3**, 451 (1953).

19. EGERVÁRY, E. »On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics. Acta Scientiarum Mathematicarum Szeged, **15**, 211 (1954).
20. SOMMERFELD, A.: Elektrodynamik. S. 13. bzw. 140, Leipzig 1949.

V. LOVASS-NAGY
K. SZENDY
Budapest, XI., Budafoki út 4—6, Ungarn.