EINIGE BEMERKUNGEN ZU EINEM KAPITEL DER THEORIE DER GITTERGESTEUERTEN GLEICHRICHTER

Von

O. Benedikt und L. Vitályos

Lehrstuhl für elektrische Spezialmaschinen an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 15. August 1958)

Ein nicht unwichtiges Kapitel der Theorie der gittergesteuerten Gleichrichter befaßt sich mit der Frage, wie sich der zeitliche Verlauf des gleichgerichteten Stromes gestaltet, wenn der Gleichstromverbraucher nicht rein ohmisch ist, sondern auch Induktivität und eine eigene elektromotorische Kraft enthält. Kapazitive Lasten kommen im allgemeinen nicht vor, es darf also ein Verbraucher mit den geschilderten Eigenschaften als der allgemeinste Fall betrachtet werden.

Der gleichgerichtete Strom wird durch die Differentialgleichung

$$u - U_0 = Ri + L\frac{di}{dt} + U_i \qquad (1)$$

bestimmt, wo u die gleichgerichtete Spannung ist, d. h. jener Teil der Sekundärspannung des den Gleichrichter speisenden Transformators, der durch den Gleichrichter an die Klemmen der Last geschaltet wird. R ist der Ohmsche Widerstand, L die Induktivität, U_i die innere Spannung der Last, während U_0 die Bogenspannung bezeichnet, von der angenommen wird, daß sie von der Größe des Stromes i unabhängig konstant bleibt.

Im stationären Betriebszustand ist die Spannung u periodisch, die Dauer einer Periode entspricht dem elektrischen Winkel $\frac{2\pi}{m}$, wenn m die Phasenzahl des Gleichrichters bezeichnet. Bekanntlich kann der Gleichrichter in zweierlei Betriebszuständen arbeiten [1]:

A) Während der Gleichrichtungsperiode $\frac{2\pi}{m}$ wird die Phasenwicklung des Speisetransformators durch den Gleichrichter ununterbrochen an den Klemmen der Last gehalten. Da dies nur dann geschehen kann, wenn der Gleichrichter in dieser Zeitspanne auch Strom liefert, wird die geschilderte Betriebsart als der Zustand des kontinuierlichen (die aneinanderfolgenden $\frac{2\pi}{m\,\omega}$ Zeitspannen ununterbrochen ausfüllenden) Leitens bezeichnet.

B) Wird die Phasenwicklung des Speisetransformators durch den Gleichrichter nur während eines Teiles der Gleichrichtungsperiode $\frac{2\pi}{m\omega}$ an die Last angeschlossen, und erhält der Verbraucher während des übrigen Teiles dieser Zeitspanne keine Speisung vom Gleichrichter, so ist die Leitung lückend.

Ob der Gleichrichter in dem einen oder in dem anderen Betriebszustand arbeitet, bestimmen die Kenndaten der Last sowie der durch die Gittersteuerung festgesetzte Zündwinkel gemeinsam.

In Bild 1 ist als Beispiel der charakteristische Verlauf der gleichgerichteten Spannung u bei lückender und bei kontinuierlicher Leitung für den

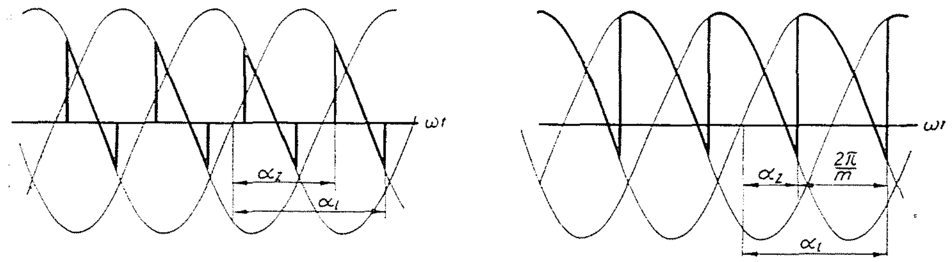

Bild 1. Verlauf der gleichgerichteten Spannung u bei aussetzender und bei nicht aussetzender Leitung

Fall einer dreiphasigen Gleichrichtung ($m = 3$) aufgetragen. Die Kurven zeigen den allgemeinen Fall, in welchem die Ausgangsspannung des Gleichrichters im Verlauf einer Gleichrichtungsperiode (infolge der Induktivität der Last) auch negative Werte annimmt. Im Bild wie auch in der folgenden Besprechung wurde die wegen der verzögerten Kommutierung entstehende Änderung der Spannungsform vernachlässigt, d. h. es wurde angenommen, daß die Kommutierung momentan erfolgt.

Auch aus Bild 1 ist ersichtlich, daß die Schwierigkeit der Lösung der Differentialgleichung (1), die auch in der Form

$$Ri + L\frac{di}{dt} = u - (U_i + U_0) \tag{2}$$

geschrieben werden kann, darin besteht, daß die aus sinusförmigen Teilen zusammengesetzte Spannung u bloß in je einem beschränkten Gebiet einer Dauer von höchstens $\frac{2\pi}{m\omega}$ in geschlossener Form aufgeschrieben werden kann. Dementsprechend hat auch der so erhaltene analytische Ausdruck des Stromes nur in diesen Gebieten Gültigkeit.

Setzt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Augenblick der Zündung der einen Anode (oder der einen Röhre), d. h. in den Anfangspunkt einer Gleichrichtungsperiode, und rechnet man den Zündwinkel bei beliebiger Phasenzahl vom Beginn der Speisespannungs-Halbperiode, läßt sich Gleichung (2) in folgender Form schreiben :

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_m \sin(\omega t + a_z) - (U_i + U_0)\,. \tag{3}$$

Nimmt man an, daß die Induktivität L vom Strom unabhängig ist, wird die Differentialgleichung eine lineare mit konstanten Koeffizienten. Es soll ferner die Annahme gelten, daß die innere Spannung des Verbrauchers U_i konstant ist.

Wie aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekannt, besteht die Lösung aus zwei Teilen, aus dem stationären Strom

$$i_s = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + a_z - \varphi) - \frac{U_i + U_0}{R} \tag{4}$$

und aus dem transienten Strom

$$i_t = ke^{-\frac{R}{L}t}\,. \tag{5}$$

Mit den neu eingeführten Bezeichnungen

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} \quad \text{und} \quad Z = \sqrt{R^2 + \omega L)^2}$$

schreibt sich also die vollständige Lösung in der Form

$$i = i_s + i_t = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + a_z - \varphi) - \frac{U_i + U_0}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}\,. \tag{6}$$

Die Gleichung wird folgendermaßen umgestaltet :

$$\text{statt } \frac{1}{Z} \text{ setzen wir } \frac{1}{R}\cos\varphi,$$

$$\frac{U_m}{R} \text{ wird ausgeklammert,}$$

die Bezeichnung $\frac{U_i + U_0}{U_m} = a$ eingeführt,

und statt des Exponenten $-\frac{R}{L} t$ des Exponentialgliedes setzt man $-\frac{\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}$, worauf man

$$i = \frac{U_m}{R} [\cos \varphi \sin (\omega t + a_z - \varphi) - a + K e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}}] \tag{7}$$

erhält.

Die für die lückende und für die nichtlückende Leitung gültigen Lösungen der Gleichung (7) unterscheiden sich in den Anfangsbedingungen. Bei lückender Leitung ist der Stromkreis im Moment der Zündung stromlos, es ist somit $i = 0$, wenn $\omega t = 0$. Wird dieser Wert in die Gleichung (7) eingesetzt, erhält man

$$0 = \cos \varphi \sin (a_z - \varphi) - a + K, \tag{8}$$

woraus

$$K = a - \cos \varphi \sin (a_z - \varphi). \tag{9}$$

Setzt man den so erhaltenen Wert von K wieder in die Gleichung (7) ein, dann wird

$$i = \frac{U_m}{R} \left\{ \cos \varphi \sin (\omega t + a_z - \varphi) - a + [a - \cos \varphi \sin (a_z - \varphi)] e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg} \varphi}} \right\}. \tag{10}$$

Die Gleichung beschreibt den Stromverlauf richtig, solange der daraus berechnete Strom $i > 0$. Da der Strom nur in einer Richtung fließen kann, wird er, nachdem er bei dem Phasenwinkel $\omega t = a_l$ verschwunden ist, bis zur Zündung der nächsten Anode (Röhre) den Wert Null beibehalten.

Bei nichtlückender Leitung muß die Lösung der Gleichung (7) die Bedingung befriedigen, daß der Strom im Zeitpunkt $\frac{2\pi}{m\omega}$ nach der Zündung denselben Wert annähme, wie im Zeitpunkt der Zündung, da in stationärem Zustand und bei symmetrischer Schaltung die in der Leitung an die Reihe kommende Anode (Röhre) von der vorangehenden Anode den gleichen Strom übernimmt, den sie der nachfolgenden übergibt. Bezeichnet man diesen Strom mit I_o, so nimmt diese Bedingung unter Anwendung der Gleichung (7) folgende Form an

$$I_0 = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \sin(\alpha_z - \varphi) - a + \mathrm{K}\right] = \frac{U_m}{R} \cos\varphi \sin\left(\frac{2\pi}{m} + \alpha_z - \varphi\right) -$$

$$- a + Ke^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}. \tag{11}$$

Nach Ordnen wird hieraus

$$K = \cos\varphi \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{m} + \alpha_z - \varphi\right) - \sin(\alpha_z - \varphi)}{1 - e^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}, \tag{12}$$

was mit Hilfe der aus der Trigonometrie bekannten Beziehungen auch in folgender einfacherer Form geschrieben werden kann :

$$K = \frac{2\cos\varphi}{1 - e^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}} \sin\frac{\pi}{m} \cos\left(\alpha_z - \varphi + \frac{\pi}{m}\right). \tag{13}$$

Setzt man den so erhaltenen Wert von K in die Gleichung (7) ein, bekommt man folgenden Ausdruck für den Strom :

$$i = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \sin(\omega t + \alpha_z - \varphi) - a + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cos\varphi}{1 - e^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}} \sin\frac{\pi}{m} \cos\left(\alpha_z - \varphi + \frac{\pi}{m}\right) e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}}\right], \tag{14}$$

der für den Fall der nichtlückenden Leitung gültig ist.

Es muß nun noch jene Grenze festgestellt werden, bis zu der die Gleichung (10), und ab welcher die Gleichung (14) gültig ist, bei der also nach dem Betriebszustand der lückenden Leitung der Betriebszustand der nichtlückenden Leitung beginnt. Diese Grenze liegt dort, wo bei der Zündung der in der Leitung an die Reihe kommenden Anode (Röhre) die vorangehende Anode (Röhre) eben nicht mehr stromlos ist, oder wo die Brenndauer der Anode (Röhre) genau $\frac{2\pi}{m\,\omega}$ beträgt, d. h. eine volle Gleichrichtungsperiode umfaßt.

Bei lückender Leitung ist die Dauer der Stromführung einer Anode (Röhre) in elektrischem Winkel gemessen $\alpha_l - \alpha_z$, und α_l kann aus der Gleichung (10) auf Grund der Bedingung berechnet werden, daß der Strom verschwindet :

$$0 = \frac{U_m}{R} \left\{ \cos\varphi \sin(\alpha_l - \alpha_z + \alpha_z - \varphi) - a + [a - \cos\varphi \sin(\alpha_z - \varphi)]\, e^{-\frac{\alpha_l - \alpha_z}{\operatorname{tg}\varphi}} \right\}. \tag{15}$$

Nach Ordnen läßt sich die Bedingung (15) auf folgende Form bringen:

$$[\cos\varphi \sin(\alpha_l - \varphi) - a]\, e^{\frac{\alpha_l}{\operatorname{tg}\varphi}} = [\cos\varphi \sin(\alpha_z - \varphi) - a]\, e^{\frac{\alpha_z}{\operatorname{tg}\varphi}}. \tag{16}$$

Die Lösungen $\alpha_l \neq \alpha_z$ der transzendenten Gleichung geben den Löschwinkel α_l als Funktion des Zündwinkels α_z und der Parameter φ und a an.

Ein Nomogramm, das die nach a und $\cos\varphi$ geordneten Lösungen der Gleichung (16) enthält, wurde 1945 von K. P. PUCHLOWSKI veröffentlicht [2].

Der Betriebszustand der lückenden Leitung besteht, solange der aus der Gleichung (10) berechnete oder der aus dem erwähnten Nomogramm abgelesene Wert α_l kleiner ist als $\alpha_z + \frac{2\pi}{m}$. Erhält man für α_l einen größeren Wert, besteht bereits der Betriebszustand der nichtlückenden Leitung, und dementsprechend wird α_l nicht mehr dem aus Gleichung (10) berechneten, sondern dem Wert $\alpha_z + \frac{2\pi}{m}$ gleich sein.

Die soeben geschilderte, im Schrifttum allgemein übliche Methode, die Gleichungen (10) und (14) abzuleiten, die den zeitlichen Verlauf des durch den gittergesteuerten Gleichrichter gelieferten Stromes in den beiden Betriebszuständen beschreiben, ist in gewissem Sinne unvollkommen, trotzdem sie sowohl vom physikalischen als auch vom mathematischen Gesichtspunkt aus als korrekt bezeichnet werden muß. Dieser gewisse Mangel besteht darin, daß zwischen den beiden der Form nach voneinander stark abweichenden Gleichungen im Laufe der Ableitung keine Korrelation zustande kommt, die klar zeigen würde, wie die beiden Gleichungen an der Grenze der nichtlückenden Leitung ineinander übergehen.

Von einem der Verfasser wurde eine Methode ausgearbeitet [3], die den erwähnten Mangel der beschriebenen Ableitung teilweise aufhebt, diese Methode wurde aber in erster Linie zur Berechnung der infolge Änderungen des Zündwinkels auftretenden transienten Ströme ausgearbeitet; sie bedient sich dementsprechend mathematischer Methoden, die bei der Behandlung transienter Erscheinungen zweckmäßig angewendet werden [4].

Der Gedankengang der Methode ist folgender: Die gleichgerichtete Spannung u kann in beiden Betriebszuständen in Spannungsimpulse zerlegt werden, die sich in Zeitspannen $\tau = \frac{2\pi}{m\omega}$ wiederholen. Jeder Impuls läßt sich in Koordinatensystemen, deren Nullpunkte der Reihe nach in den Zeitpunkt der Zündung verlegt werden, der Gleichung $u = U_m \sin(\omega t + \alpha_z)$ gemäß auftragen, u. zw. bei lückender Leitung im Bereich $0 < \omega t < \alpha_l - \alpha_z$, bei nichtlückender Leitung hingegen im Bereich $0 < \omega t < \frac{2\pi}{m}$. Hierauf hört der Spannungsimpuls auf und es folgt ein neuer.

Ist die Stromleitung lückend, entstehen die einzelnen Stromimpulse durch die Einwirkung der einzelnen Spannungsimpulse unabhängig von den vorangegangenen. Jene Spannungsimpulse, die sich an den Klemmen des Stromkreises schon abgespielt haben, wirken in der Erzeugung des Stromes nicht mehr mit, da der gespeiste Stromkreis infolge des Absinkens des Stromes auf Null nach jedem Impuls unterbrochen wird.

Ist die Stromleitung nichtlückend, nimmt der Strom der einzelnen Anoden (Röhren) nicht den Wert Null an, bevor noch die in der Reihenfolge nächste Röhre zündet. Man kann demzufolge die einzelnen Stromwellen nicht als in sich abgeschlossene transiente Vorgänge berechnen, in denen die vorangegangenen Spannungsimpulse auf die Form der Stromwelle keine Wirkung ausüben.

Während nämlich der Stromkreis, wie schon oben erwähnt, bei lückender Leitung infolge des Verlöschens der Anode (Röhre) nach jeder Stromwelle unterbrochen wird, bleibt der Gleichstromkreis bei nichtlückender Leitung ständig geschlossen.

Es bezeichne i^x den transienten Strom, der in einem Stromkreis mit dem Ohmischen Widerstand R, der Induktivität L und mit einer Stromquelle der inneren Spannung $U_i + U_0$ entsteht, sofern man an den stromlosen Kreis die Wechselspannung $u = U_m \sin(\omega t + a_z)$ bei einem Phasenwinkel $\omega t = 0$ anlegt. Diesen Strom beschreibt Gleichung (10), es ist somit

$$i^x = \frac{U_m}{R} \left\{ \cos\varphi \sin(\omega t + a_z - \varphi) - a + [a - \cos\varphi \sin(a_z - \varphi)] e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}} \right\}. \quad (17)$$

Ist die Stromleitung lückend und entsteht jede Stromwelle unabhängig von den vorangehenden, ist der Strom gleich i^x im Bereich $0 < \omega t < a_l - a_z$, wo a_l aus der Gleichung $i^x(a_l - a_z) = 0$ ermittelt werden kann. a_l ist selbstverständlich die Lösung der Gleichung (16).

Ist die Stromleitung nichtlückend, zerlegt der Rechnungsvorgang den analytischen Ausdruck einer $\frac{2\pi}{m\omega}$ langen Periode des gleichgerichteten Stromes in zwei Teile :

1. in den durch den soeben wirkenden Spannungsimpuls erzeugten Strom i_I und

2. in die Superposition der durch sämtliche vorangegangene (in dem untersuchten stationären Zustand unendlich viele) Spannungsimpulse erzeugten Ströme, die mit i_{II} bezeichnet werden sollen.

Der Strom i_I ist gleich i^x, i_{II} läßt sich dagegen durch folgende Überlegung ermitteln.

Die Stromkomponente, die der dem soeben sich abspielenden Spannungsimpuls vorangehende $n+1$-te Impuls erzeugt, ist:

$$i_{n+1} = i^{x}(\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}(t+n\tau)}, \tag{18}$$

woraus

$$i_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} i^{x}(\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}(t+n\tau)}. \tag{19}$$

Hebt man die von n unabhängigen Faktoren aus (19) heraus, erhält man

$$i_{II} = i^{x}(\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\tau\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}}. \tag{20}$$

Da $e^{-n\tau\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}} < 1$, läßt sich schreiben:

$$i_{II} = i^{x}(\tau)\, \frac{1}{1-e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\tau}}\, e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}t}. \tag{21}$$

Für den vollen Strom bei nichtlückender Leitung gilt somit

$$i = i_{I} + i_{II} = i^{x} + i^{x}(\tau)\, \frac{1}{1-e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\tau}}\, e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}t}. \tag{22}$$

Mit Verwendung des für i^{x} erhaltenen Ausdruckes (17) kann man sich davon überzeugen, daß Gleichung (22) mit Gleichung (14) identisch ist.

Wie man sieht, ist es dank der oben kurz geschilderten Methode gelungen, zwischen den Ausdrücken der lückenden und der nichtlückenden Leitung einen engen Zusammenhang herzustellen. (22) zeigt, daß bei nichtlückender Leitung der Ausdruck des durch den eben wirkenden Spannungsimpuls entstandenen Stromes derselbe ist wie bei lückender Leitung, daß ferner eine durch sämtliche frühere Spannungsimpulse hervorgerufene, exponentiell abklingende Komponente diesen Strom derart modifiziert, daß die Symmetriebedingung $i(0) = i(\tau)$ erfüllt wird. Aus der Gleichung (22) folgt

$$i(0) = i(\tau) = i^{x}(\tau) \frac{1}{1-e^{-\frac{\omega}{\operatorname{tg}\varphi}\tau}}, \tag{23}$$

da

$$i^{x}(0) = 0\,.$$

An der Grenze der lückenden und der nichtlückenden Leitung ist $i^x(\tau) = 0$ und daher $i = i^x$.

Das hier beschriebene Berechnungsverfahren schafft eine viel übersichtlichere mathematische Korrelation zwischen den beiden Betriebszuständen als die klassische Methode der Lösung der Differentialgleichung. Der Gedankengang der Ableitung leidet jedoch an dem Mangel, eine ziemlich komplizierte, auf dem Gebiete der Berechnung transienter Ströme übliche Zerlegung zur Berechnung eines im wesentlichen stationären Vorganges zu verwenden. Der Vorzug der angeführten Methode zeigt sich nur dann, wenn man nicht den stationären Strom zu berechnen wünscht, sondern voraussetzt, daß die Stromleitung um endliche Gleichrichtungsperioden früher begonnen, oder der Zündwinkel sich um ebenfalls endliche Gleichrichtungsperioden früher geändert hat.

Um diese Mängel der bisher bekanntgewordenen Methoden zu beseitigen, wird im folgenden ein neues Verfahren vorgeschlagen und erläutert. Gemäß der Meinung der Verfasser schafft es einen einfacheren und physikalisch anschaulicheren Zusammenhang zwischen den beiden Relationen (10) und (14). Diese Ableitungsmethode stimmt bis zur Ermittlung des Zusammenhanges (10) mit der klassischen Methode der Lösung der Differentialgleichung überein, um von da ab abzuweichen und sich nicht mehr auf die unmittelbare Bestimmung des Wertes K aus den Grenzbedingungen $\omega t = 0$, $i = I_0$; $\omega t = \frac{2\pi}{m}$, $i = I_0$ zu stützen. Die Ableitung verläuft wie folgt:

Es sei angenommen, daß die für die nichtlückende Leitung gültige Stromform durch den vorläufig noch unbekannten Zusammenhang $i = i(\omega t)$ beschrieben wird. Diese Gleichung muß — wie bekannt — die Bedingung erfüllen, daß der Strom am Anfang und am Ende der Leitungsperiode einer Anode (Röhre) den gleichen Wert I_0 annehmen soll.

Die von den Verfassern vorgeschlagene Ableitung geht davon aus, daß der Zustand der lückenden Leitung aus dem Zustand der nichtlückenden Leitung nicht nur in der bisherigen Weise erreicht werden kann, daß bei konstanter innerer Spannung U_i der Zündwinkel α_z vergrößert wird, sondern auch dadurch, daß bei konstantem Zündwinkel α_z die innere Spannung U_i des gespeisten Stromkreises zunimmt.

Vergrößert man den Wert U_i bei konstantem Zündwinkel α_z, wird der durchfließende Strom ständig kleiner, da die Richtung von U_i dem Stromfluß entgegenwirkt.

Der entstehende Strom kann auf Grund des Prinzipes der Superposition auch als die Differenz des durch die Spannung $u(\omega t)$ verursachten pulsierenden positiven Stromes und des durch $U_i + U_0$ verursachten negativen konstanten Gleichstromes aufgefaßt werden. Vergrößert man U_i, so nimmt die negative Gleichstromkomponente zu. Die Wechselkomponente des Stromes wird durch die Wechselkomponente der an den Stromkreis angeschlossenen Spannung $u(\omega t)$ bestimmt. Da die Spannung $u(\omega t)$ trotz der Änderung von U_i unverändert bleibt, solange die Stromleitung tatsächlich nichtlückend ist, bleibt auch die Wechselkomponente des Stromes unverändert. Erreicht U_i einen gewissen Wert U_i', ist der Absolutwert der negativen Stromkomponente gerade um I_0 größer geworden, der Strom am Beginn und am Ende der Leitungsperiode einer Anode (Röhre) ist somit gleich Null. Dies ist offenbar die Grenze der nichtlückenden Leitung bei dem gegebenen Zündwinkel a_z und dem gegebenen Phasenverschiebungswinkel φ. Für diesen Zustand erhält man statt des früher definierten allgemeinen Wertes a einen der Größe U_i' entsprechenden Wert

$$a' = \frac{U_i' + U_0}{U_m}. \tag{24}$$

Ist der Strom hier an der Grenze der nichtlückenden Leitung durch die Gleichung $i' = i'(\omega t)$ gekennzeichnet, ist der der ursprünglichen inneren Spannung U_i zugeordnete »nichtlückende« Strom

$$i = i' + I_0, \tag{25}$$

wo

$$I_0 = \frac{(U_i' + U_0) - (U_i + U_0)}{R} = (a' - a)\frac{U_m}{R}. \tag{26}$$

da der Gleichstromwiderstand des Stromkreises R ist. Der Strom i' kann, da es sich hier um einen Grenzwert handelt, noch aus dem Zusammenhang (10) berechnet werden, wenn man a' statt a setzt.

Somit ist zwischen der für die lückende Leitung gültigen Gleichung (10) *und der den nichtlückenden Strom beschreibenden Gleichung* (18) *ein enger und anschaulicher Zusammenhang geschaffen, ist es doch ersichtlich, daß der Grenzfall i' des durch die Gleichung* (10) *beschriebenen Stromes einen Teil des durch Gleichung* (14) *angegebenen Stromes darstellt.*

Zur tatsächlichen Berechnung von i' und I_0 benötigt man den Wert von a' dessen Ermittlung Gleichung (16) ermöglicht, wenn man berücksichtigt, daß an der Grenze der nichtlückenden Leitung $a_l = a_z + \frac{2\pi}{m}$, und somit

$$\left[\cos\varphi \sin\left(a_z + \frac{2\pi}{m} - \varphi\right) - a'\right] e^{\frac{a_z + \frac{2\pi}{m}}{\operatorname{tg}\varphi}} = [\cos\varphi \sin(a_g - \varphi) - a'] \, e^{\frac{a_z}{\operatorname{tg}\varphi}}. \tag{27}$$

Dividiert man beide Seiten durch $e^{\frac{a_z}{\operatorname{tg}\varphi}}$ und löst man die Gleichung auf a', erhält man:

$$a' = \cos\varphi \, \frac{\sin(a_z - \varphi) - \sin\left(a_z + \frac{2\pi}{m} - \varphi\right) e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}} . \tag{28}$$

Nunmehr läßt sich auf Grund der Zusammenhänge (10), (25), (26) und (28) der Stromverlauf für jeden beliebigen konkreten Fall aufschreiben. Dazu ist nur folgendes nötig: man berechnet a' aus (28), und daraus gemäß (26) den

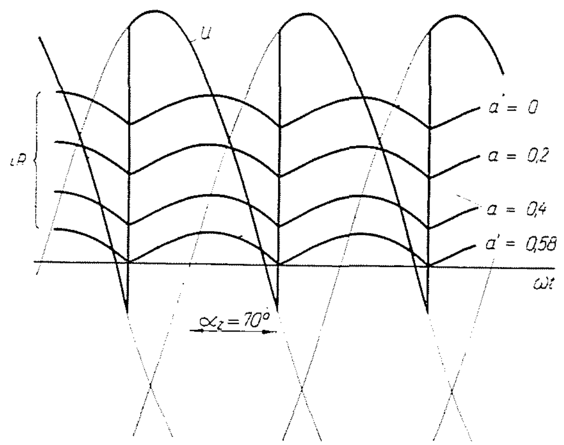

Bild 2. Verlauf des Stromes, der in einem Stromkreis mit einer Zeitkonstante $L/R = 0{,}01$ sec, bei $m = 3$, $a_z = 70°$ und bei verschiedenen Werten von a fließt

Wert I_0; außerdem setzt man in Gleichung (10) statt a den soeben erhaltenen Wert a' ein und bekommt derart den Ausdruck des Stromes i'. Addiert man gemäß Gleichung (25) i' und I_0, erhält man den vollständigen Ausdruck für den nichtlückenden Strom.

In Bild 2 ist beispielsweise der zeitliche Verlauf des Stromes dargestellt, der in einem Stromkreis mit der Zeitkonstante $L/R = 0{,}01$ sec, bei $m = 3$, $a_z = 70°$, und bei verschiedenen Werten von a fließt. Für a' ergibt sich aus Gleichung (28) für diesen Fall ein Wert von 0,58.

Anhang

Setzt man die Ausdrücke für i' und I_0 aus den Gleichungen (10) und (26) in Gleichung (25) ein, und verwendet man auch den Ausdruck (28) für a', muß man natürlich Gleichung (14) erhalten.

Zur Kontrolle soll diese Berechnung durchgeführt werden:

$$i = \frac{U_m}{R}\left\{\cos\varphi \sin(\omega t + a_z - \varphi) - a' + [a' - \cos\varphi \sin(a_z - \varphi)]\, e^{\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}}\right\} +$$

$$+ \frac{U_m}{R}(a' - a) =$$

$$= \frac{U_m}{R}\left\{\cos\varphi \sin(\omega t + a_z - \varphi) - a + [a' - \cos\varphi \sin(a_z - \varphi)]\, e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}}\right\}. \qquad (29)$$

Mit dem Ausdruck (28) für a' in Gleichung (29) wird der Koeffizient des exponentiellen Gliedes:

$$A_{ex} = \frac{U_m}{R}\cos\varphi \left[\frac{\sin(a_z - \varphi) - \sin\left(a_z + \frac{2\pi}{m} - \varphi\right) e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}} - \sin(a_z - \varphi)\right]. \qquad (30)$$

Wenn man auf gemeinsamen Nenner bringt und zusammenzieht, liest man

$$A_{ex} = \frac{U_m}{R}\cos\varphi \frac{\left[\sin(a_z - \varphi) - \sin\left(a_z + \frac{2\pi}{m} - \varphi\right)\right] e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}{1 - e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}. \qquad (31)$$

Dividiert man Zähler und Nenner durch $-e^{\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}$ und verwendet man den trigonometrischen Satz von der Umformung der Differenz der Sinusse zweier Winkel in ein Produkt, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$A_{ex} = \frac{U_m}{R}\,\frac{2\cos\varphi}{1 - e^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}\sin\frac{\pi}{m}\cos\left(a_z - \varphi + \frac{\pi}{m}\right). \qquad (32)$$

Nach Einsetzen dieses Ausdrucks (32) in (29) erhält man tatsächlich den Zusammenhang (14):

$$i = \frac{U_m}{R}\left[\cos\varphi \sin(\omega t + a_z - \varphi) - a + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cos\varphi}{1 - e^{-\frac{2\pi}{m \operatorname{tg}\varphi}}}\sin\frac{\pi}{m}\cos\left(a_z - \varphi + \frac{\pi}{m}\right) e^{-\frac{\omega t}{\operatorname{tg}\varphi}}\right]. \qquad (14)$$

Zusammenfassung

Es werden zunächst diejenigen Methoden zusammengefaßt, die man im allgemeinen zur Ableitung der mathematischen Ausdrücke für den von einem gittergesteuerten Gleichrichter gelieferten Strom verwendet, wenn der Verbraucher nicht rein Ohmisch ist, sondern auch Induktivität und eine eigene elektromotorische Kraft enthält. Est wird der Mangel dieser Berechnungsmethoden betont, die Betriebszustände der lückenden und der nichtlükkenden Leitung voneinander getrennt zu behandeln und zwischen den Gleichungen, die diese beiden ineinander übergehenden Betriebszustände kennzeichnen, keinen anschaulichen Zusammenhang zu schaffen, oder diesen nur durch ein ziemlich kompliziertes Verfahren mit beträchtlichem mathematischem Aufwand zustande zu bringen. Die Verfasser beschreiben ein einfaches Verfahren zur Herstellung einer engen und physikalisch sehr anschaulichen Korrelation zwischen den die beiden Betriebszustände kennzeichnenden mathematischen Ausdrücken.

Literatur

1. MÜLLER-LÜBECK, K.—UHLMANN, E.: Die Strom- und Spannungsverhältnisse der gittergesteuerten Gleichrichter. Archiv für Elektrotechnik Bd. XXVII. S. 347—373 (1933).
2. PUCHLOWSKI, K. P.: Voltage and Current Relations for Controlled Rectification with Inductive and Generative Loads, Transactions AIEE May, pp. 255—260 (1945).
3. VITÁLYOS, L.: Betriebseigenschaften von durch gittergesteuerte Gleichrichter gespeisten Gleichstrommotoren. Deutsche Elektrotechnik H. 6. S. 208—211 (1955).
4. VITÁLYOS, L.: Transiente Betriebszustände gesteuerter Gleichrichter, die die Erregerwicklungen elektrischer Maschinen speisen. Elektrotechnika H. 10—12. S. 409—418 (1957). In ungarischer Sprache.

Prof. Dr. O. BENEDIKT, Budapest, Műegyetem rakpart 3, Ungarn
L. VITÁLYOS, Budapest, Műegyetem rakpart 3, Ungarn