

STROMVERDRÄNGUNG VON IN KREISFÖRMIGEN NUTEN GEBETTETEN MASSIVEN LEITERN

Von

R. TUSCHÁK

Lehrstuhl für Betriebswesen elektrischer Maschinen der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 1. Januar 1957)

Im Aufsatz angewandte Bezeichnungen

Allgemeine Bemerkung:

Wenn kein besonderer Hinweis, sind sämtliche Größen im MKS Maßsystem zu verstehen.
Einzelne Bezeichnungen:

a_1, a_2	Abkürzung [Gleichungen (A. 3.2), (A. 3.6) und (A. 3.7)]	R_k	zusätzlicher Widerstand des unteren Käfigs auf Wirkung der im oberen Käfig entstehenden Wirbelstromverluste
A_n	Abkürzung [Gleichung (A. 2.1)]		
b	Breite der Nutenöffnung	r_0	Radius des Rundstabes
b_1, b_2	Abkürzung [Gleichungen (A. 3.3), (A. 3.8) und (A. 3.9)]		
D	Rundstab-Durchmesser	v	$\frac{ w_0 }{2}$
e_z	komplexer Momentanwert der Axialkomponente der elektrischen Feldstärke	w	Abkürzung [Gleichung (8a)]
$E_z(r, \varphi)$	Komplexamplitude von e_z in Funktion von r und φ	w_0	Wert von w an der Stelle $r = r_0$
f	Frequenz	X_b	Teil der Reaktanz des Rundstabes, der von den mit dem Leiter verketteten Nutenstreukraftlinien herrührt
G_r	Komplexamplitude der Radialkomponente des POYNTINGSchen Vektors	X_k	Teil der Reaktanz des unteren Käfigs, der von den mit den Stäben des oberen Käfigs verketteten Kraftlinien herrührt
h_r, h_φ	komplexer Momentanwert der Radial- und Tangential-Komponente der magnetischen Feldstärke	Z_b, Z_k	Impedanzen mit derselben Deutung wie X_b und X_k
$H_r(r, \varphi)$	Komplexamplituden von h_r bzw.	Z_{12}	gegenseitige Impedanz zwischen den Stäben des unteren und oberen Käfigs
$H_\varphi(r, \varphi)$	h_φ	Z'_{12}	Teil von Z_{12} , der von den mit dem oberen Rundstab verketteten Kraftlinien herrührt
$\hat{H}(r, \varphi)$	Konjugierte von $H(r, \varphi)$	Z_{22}	Eigenimpedanz des unteren Käfigs
i	komplexer Momentanwert des Stromes	Z'_{22}	dasselbe wie Z_k
I, \hat{I}	Komplexamplitude von i bzw. deren Konjugierte	α	b/D
$J_n(w)$	BESSELSche Funktion n -ten Grades mit Argument w	δ	Abkürzung [Gleichung (15a)]
$J'_n(w)$	Ableitung von $J_n(w)$ nach w	λ	Streuleitfähigkeit
k_r, k_{kr}	Widerstandserhöhungsfaktoren [Gleichungen (13a) und (23a)]	$\lambda_{\sim} = \lambda \sim$	Gleichstrom- bzw. Wechselstrom-Streuleitfähigkeit
k_x, k_{kx}	Reaktanzabnahmefaktoren [Gleichungen (18) und (26)]	λ_k	dem Reaktanzteil X_k entsprechende Streuleitfähigkeit
l	Axiallänge des Leiters	μ_0	Permeabilität der Luft
$N_n(w)$	Neumannfunktion n -ten Grades mit Argument w	ω	Kreisfrequenz des Wechselstromes
R_b	Widerstand des Rundstabes mit Berücksichtigung der Stromverdrängung	σ	spezifische Leitfähigkeit
R_0	Gleichstromwiderstand des Rundstabes	ρ	spezifischer Widerstand in Ohm/m/mm ²

I. Einleitung

Die Dämpferwicklung von Ein- und Dreiphasen-Synchronmaschinen sowie die Läuferwicklung von Doppelkäfigläufer-Asynchronmaschinen besteht in vielen Fällen aus Rundstäben. Die sich in den Stäben abspielenden Wirbelstromerscheinungen können einige wichtige Kennwerte der Maschinen (z. B. in selbst-anlaufenden Synchronmaschinen das Anlaßmoment, in Einphasen-Synchronmaschinen die Größe des gegenlaufenden Feldes usw.) in starkem Maße beeinflussen, weshalb es erwünscht ist, beim Entwurf der Maschine die infolge der Stromverdrängung der Stäbe entstehende Widerstandserhöhung bzw. Reaktanzabnahme zu kennen.

Die Stromverdrängungerscheinungen in rechteck- und trapezförmigen oder aus diesen zusammenstellbaren verwickelteren, z. B. L-förmigen Nuten sind in der Literatur ausführlich erörtert. Für diese Fälle stehen zur Berechnung der Leiterimpedanzen entsprechende Beziehungen und in den meisten Fällen auch Tabellen zur Verfügung [5, 7, 8, 9]. Für die in kreisförmige Nuten gebetteten Stäbe sind unseres Wissens in der Literatur keine ähnlichen genauen Berechnungen zu finden. Es sind zwar einige, durch sehr starke Vereinfachung des physikalischen Bildes abgeleitete oder auf empirischem Wege erhaltene Ergebnisse bekannt, deren Anwendungsgebiet und Annäherungsgüte jedoch nur dann befriedigend bestimmt werden könnten, wenn sie mit ins physikalische Bild besser passenden, genaueren Ergebnissen verglichen werden könnten.

Im nachfolgenden wird ein Verfahren beschrieben, das mit dem physikalischen Bild in sehr guter Übereinstimmung steht und mit welchem die infolge Stromverdrängung eintretende Widerstandserhöhung und Reaktanzabnahme der in kreisförmige Nuten gebetteten Stäbe bestimmt werden kann.

II. Grundgleichungen

Nehmen wir an, daß in einem Stab vom Durchmesser D laut Abb. 1a in Axialrichtung ein zeitlich sinusförmiger Wechselstrom von maximalem Wert I fließt. Der Stab füllt die Nut vollkommen aus, entweder gibt es keine Isolierung oder sie ist vernachlässigbar dünn. Nutenöffnung b ist im Verhältnis zum Stabdurchmesser nicht übermäßig groß. Die Permeabilität des Eisens wird — wie bei solchen Rechnungen allgemein üblich — für unendlich groß betrachtet, d. h. die auf das Eisen entfallende magnetische Spannung wird im Vergleich zur auf die Nutenöffnung entfallenden magnetischen Spannung vernachlässigt. Es wird angenommen, daß das axiale Maß des Stabes im Vergleich zum Durchmesser äußerst groß, also die Wirbelstrom- bzw. Magnetfeld-Verteilung in Axialrichtung homogen ist.

Unter obigen Bedingungen hat die elektrische Feldstärke am Stab nur axiale (e_z), die magnetische Feldstärke radiale (h_r) und tangential (h_φ) Komponenten.

Die Verteilung der elektrischen und magnetischen Feldstärke im Innern des Stabes und in der Nutenöffnung wird durch solche Funktionen ausgedrückt,

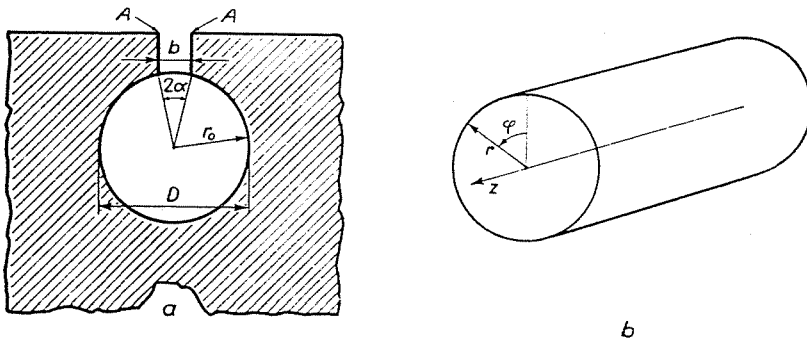


Abb. 1

die in den einzelnen Feldteilen sowohl die MAXWELLSchen Gleichungen befriedigen als auch den auf die Grenzflächen bezüglichen Brechungsgesetzen Genüge

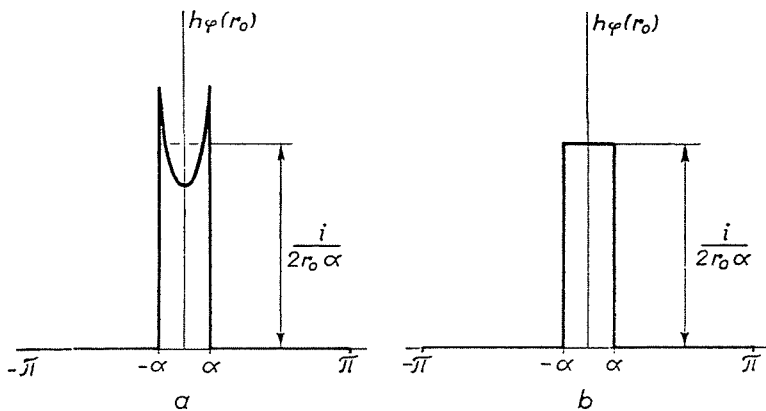


Abb. 2

leisten. Eine genaue Bestimmung solcher Lösung stößt auf große mathematische Schwierigkeiten. Zwecks Vermeidung dieser Hindernisse wird auch eine annähernde, aber mit dem physikalischen Bild gut übereinstimmende vereinfachende Annahme gemacht.

In der Nutenöffnung verteilt sich die Tangentialkomponente der Feldstärke am Radius $r = r_0$ in der Wirklichkeit qualitativ laut Abb. 2a. Die Punkte a bzw. $-a$ entsprechen den Punkten A in Abb. 1a. Innerhalb der Strecke zwi-

schen den beiden Punkten ändert sich der Wert der Feldstärke nicht stark, in den Punkten a und $-a$ sowie in ihrer unmittelbarer Umgebung kann er — vor allem von den Krümmungsverhältnissen der Punkte A abhängig — von den im Innern der Strecke erscheinenden Werten in größerem Maße abweichen.

Im folgenden wird die Ungleichmäßigkeit der Feldstärken-Verteilung außer acht gelassen und mit der durchschnittlichen tangentialen Feldstärke der gestrichelten Linie in Abb. 2a entsprechend gerechnet. Somit ist laut Abb. 2a auf der Strecke $-\pi < \varphi < -a$ und $a < \varphi < \pi$

$$\mathbf{h}_\varphi(r_0) = 0,$$

und auf der Strecke $-a < \varphi < a$

$$\mathbf{h}_\varphi(r_0) = \frac{\mathbf{i}}{b} = \frac{\mathbf{i}}{2r_0\alpha}, \quad (1)$$

wo

$$\mathbf{i} = \mathbf{I} e^{j\omega t} \quad (2)$$

der komplexe Momentanwert des Stromes ist.

Die in Abb. 2b dargestellte Feldstärkenverteilung kann als ein Abschnitt der periodischen Funktion nach 2π aufgefaßt werden, somit mit der FOURIERschen Reihe erzeugt werden. Nach Bestimmung der Koeffizienten der FOURIERschen Reihe erhalten wir :

$$\mathbf{h}_\varphi(r_0) = \frac{\mathbf{i}}{2r_0\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{i}}{r_0\pi} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \cos n\varphi. \quad (3)$$

Die Aufgabe ist nun, im Innern des Stabes eine, die MAXWELLSchen Gleichungen befriedigende Lösung zu finden, die am Radius $r = r_0$ auch der obigen Gleichung Genüge leistet.

Die auf den Stab bezüglichen MAXWELLSchen Gleichungen sind :

$$\text{rot } \mathbf{h} = \sigma \mathbf{e} \quad (4a)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}. \quad (4b)$$

Nehmen wir an, daß die Lösung folgende Form hat :

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{H}_r(r, \varphi) e^{j\omega t} \quad (5a)$$

$$\mathbf{h}_\varphi = \mathbf{H}_\varphi(r, \varphi) e^{j\omega t} \quad (5b)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{E}_z(r, \varphi) e^{j\omega t}. \quad (5c)$$

Werden diese Werte in die Gleichungen (4) eingesetzt und die Komponenten der Rotation nach Abb. 1b im Zylinderkoordinatensystem aufgeschrieben, so gelangen wir zum folgenden Differentialgleichungssystem :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_z(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}_z(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} - j\omega\mu_0 \sigma \mathbf{E}_z = 0 \quad (6a)$$

$$\mathbf{H}_r(r, \varphi) = - \frac{1}{j\omega\mu_0 r} \frac{\partial \mathbf{E}_z(r, \varphi)}{\partial \varphi} \quad (6b)$$

$$\mathbf{H}_\varphi(r, \varphi) = \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}_z(r, \varphi)}{\partial r} \quad (6c)$$

Die Lösung des Gleichungssystems mit Berücksichtigung der Gleichung (3) (s. Anhang 1) ergibt :

$$\mathbf{E}_z(r, \varphi) = \mathbf{I} \left[\frac{j\omega\mu_0}{2\pi w_0} \cdot \frac{J_0(w)}{J'_0(w_0)} + \frac{j\omega\mu_0}{w_0 \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(w)}{J'_n(w_0)} \cdot \frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \cos n \varphi \right] \quad (7a)$$

$$\mathbf{H}_r(r, \varphi) = \frac{\mathbf{I}}{\pi} \left[\frac{1}{w_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(w)}{J'_n(w_0)} \cdot \frac{\sin n \alpha}{\alpha} \sin n \varphi \right] \quad (7b)$$

$$\mathbf{H}_\varphi(r, \varphi) = \frac{\mathbf{I}}{\pi} \left[\frac{1}{2r_0} \frac{J'_0(w)}{J'_0(w_0)} + \frac{1}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J'_n(w)}{J'_n(w_0)} \frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \cos n \varphi \right], \quad (7c)$$

wo

$$w = \sqrt{-j\omega\mu_0 \sigma r} \quad (8a)$$

$$w_0 = \sqrt{-j\omega\mu_0 \sigma r_0} \quad (8b)$$

$J_n(w)$ — BESSELSche Funktion n -ten Grades mit Argument w ,

$J'_n(w)$ — Ableitung von $J_n(w)$ nach w ist.

Die Komplexleistung des Leiters kann einerseits mit dem Flächenintegral des komplexen Vektors der Energieströmung (POYNTINGScher Vektor), andererseits mit der Innenimpedanz Z_b und dem Strom \mathbf{I} des Stabes ausgedrückt werden. Aus dem Vergleich der beiden verschiedenartig gewonnenen Ergebnisse kann die Innenimpedanz Z_b bestimmt werden.

Die Radialkomponente des komplexen POYNTINGSchen Vektors am Radius $r = r_0$ ist

$$\mathbf{G}_r(r_0) = \mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_\varphi(r_0, \varphi). \quad (9)$$

wo $\hat{\mathbf{H}}$ die Konjugierte des Vektors $\hat{\mathbf{H}}$ ist.

Die komplexe Leistung ist

$$\mathbf{S} = \int_F \mathbf{G}_r dF = \int_F \mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_\varphi(r_0, \varphi) dF = \mathbf{I} \hat{\mathbf{I}} \mathbf{Z}_b = I^2 (R_b + jX_b), \quad (10)$$

wo

$$\mathbf{Z}_b = R_b + jX_b. \quad (11)$$

Nach Ermittlung des Integrals der Gleichung (10) mit Hilfe der Gleichung (7) (die Einzelheiten der Berechnung sind im Anhang 2 zu finden) erhalten wir für Z_b folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{Z}_b = R_0 \left\{ \frac{|w_0|^2}{2} \frac{j J_0(w_0)}{w_0 J_0'(w_0)} + |w_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j J_n(w_0)}{w_0 J_n'(w_0)} \left(\frac{\sin n a}{n a} \right)^2 \right\}, \quad (12)$$

wo R_0 der Gleichstromwiderstand des Stabes ist:

$$R_0 = \frac{l}{\sigma r_0^2 \pi}.$$

Nach Absonderung der realen und imaginären Teile erhalten wir

$$\begin{aligned} R_b &= R_0 \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{|w_0|^2}{2} \frac{j J_0(w_0)}{w_0 J_0'(w_0)} + |w_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j J_n(w_0)}{w_0 J_n'(w_0)} \left(\frac{\sin n a}{n a} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= R_0 (1 + k_r) \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\lambda = \frac{X_b}{\omega \mu_0 l} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{j J_0(w_0)}{2 w_0 J_0'(w_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j J_n(w_0)}{w_0 J_n'(w_0)} \left(\frac{\sin n a}{n a} \right)^2 \right\}. \quad (13b)$$

Zur Ermittlung von R_b und λ ist die Kenntnis des Wertes der BESSELschen Funktionen mit Argument $\sqrt{-j}$ notwendig. Diese Funktionen sind nur für die Werte $n = 0, 1, 2$ tabelliert [12]. In den Berechnungen mit den Gleichungen (13) sind bei den praktisch vorkommenden Leiterabmessungen mindestens 6–8 Glieder in Betracht zu ziehen, wenn wir annehmbare Genauigkeit zu erreichen wünschen. Glücklicherweise können die BESSELschen Funktionen im Falle der praktischen Werte von w_0 mit den ersten Gliedern ihrer Potenzreihe gut angenähert werden, so daß mit den Potenzreihen die Gleichungen (13) verhältnismäßig einfach berechnet werden können.

III. Wechselstromwiderstand des in kreisförmige Nuten gebetteten Stabes

Nach Gleichung (13a) ist

$$R_b = R_0(1 + k_r). \tag{13a}$$

Mit den vorerwähnten Potenzreihen wurden die Werte des Faktors k_r bestimmt. Die ausführlichen Berechnungen sind im Anhang 3 zu finden. Die Endergebnisse sind in Tab. I und im Diagramm der Abb. 3 enthalten.

Die in der Tabelle und im Diagramm benützten Bezeichnungen sind:

$$\delta = \sqrt{2} |w_0| = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} D; \tag{14}$$

δ ist eigentlich das Verhältnis zwischen Eindringtiefe und Durchmesser. Wird der Durchmesser, wie in der Praxis üblich, in mm gemessen und anstatt mit der Leitfähigkeit mit dem in Ohm/m/mm² ausgedrückten spezifischen Widerstand ϱ gerechnet, so wird:

$$\delta = \frac{2\pi}{10} \sqrt{\frac{10^{-5} f}{\varrho}} D_{[mm]}. \tag{15a}$$

Tabelle I
Werte des Faktors k_r

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$ w_0 $
0,282	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,2
0,424	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,3
0,565	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,4
0,705	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,5
0,850	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,6
0,990	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07	0,7
1,130	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,8
1,270	0,20	0,20	0,19	0,19	0,18	0,9
1,420	0,30	0,30	0,29	0,28	0,27	1,0
1,555	0,43	0,43	0,42	0,40	0,38	1,1
1,700	0,59	0,59	0,57	0,55	0,52	1,2
1,840	0,78	0,77	0,75	0,72	0,68	1,3
1,980	1,00	0,99	0,96	0,92	0,87	1,4
2,120	1,24	1,23	1,20	1,14	1,08	1,5
2,260	1,51	1,50	1,45	1,38	1,31	1,6

Für Kupferleiter ergibt sich bei $f = 50$ Hz, $\rho = 0,021$ Ohm/m/mm²

$$\delta = \frac{D^{[mm]}}{10,3} . \quad (15b)$$

Die Breite der Nutenöffnung ist durch Winkel α gekennzeichnet. Auf Grund der Abb. 1 ist

$$a = \frac{b}{D} . \quad (15c)$$

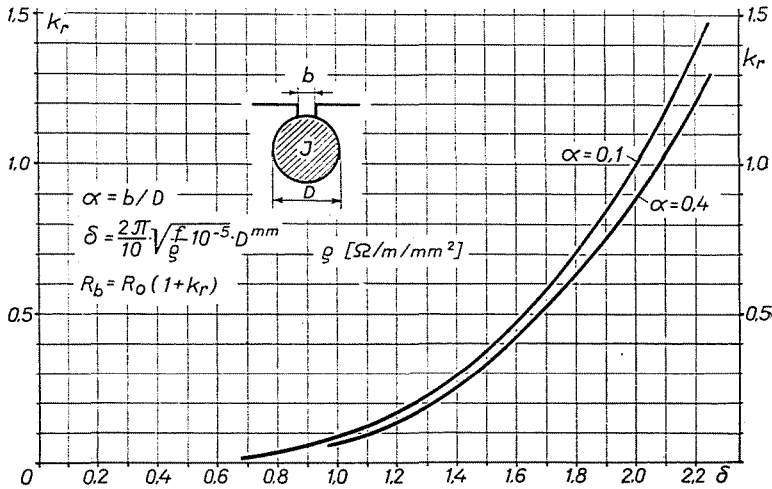


Abb. 3

Nachdem der Widerstandserhöhungsfaktor nur in geringem Maße von α abhängt, wurden im Diagramm im Interesse der Übersichtlichkeit nur die den Werten $\alpha = 0,1$ und $\alpha = 0,4$ entsprechenden Kurven gezeichnet. In Tab. I sind auch für andere α -Werte Angaben enthalten.

Auf Grund der Kurven kann festgestellt werden, daß der Widerstandserhöhungsfaktor etwa so groß ist wie der eines Quadratprofilleiters, dessen Seite dem Kreisdurchmesser gleicht.

Beispiel

Dämpferwicklungsstab aus Kreisprofilkupfer von 15 mm Durchmesser. Nutenöffnung $b = 3$ mm. Es werde die Widerstandserhöhung für $f = 50$ Hz und $f = 100$ Hz bestimmt.

$$a = \frac{b}{D} = 0,2$$

Für $f = 50$ Hz :

$$\delta = \frac{15}{10,3} = 1,45.$$

Aus dem Diagramm bzw. aus der Tabelle erhalten wir durch Interpolation

$$k_r = 0,33.$$

Für $f = 100$ Hz :

$$\delta = \frac{2,15}{10,3} = 2,06 \quad k_r = 1,08.$$

IV. Streuleitfähigkeit des in kreisförmigen Nuten gebetteten massiven Leiters

Auf Grund der Gleichung (13b) wird vor allem die sogenannte Gleichstrom-Streuleitfähigkeit ($\omega = 0$) bestimmt. Nachdem in der Gleichung der Grenzübergang $w_0 = 0$ gemacht wurde (s. Anhang 4), erhalten wir :

$$\lambda_s = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

Dieses Resultat könnte auch unmittelbar aus der Differentialgleichung der Feldverteilung gewonnen werden, falls angenommen würde, daß die Stromverteilung im Querschnitt gleichmäßig erfolgt.

Die Summe der unendlichen Reihe in Gleichung (16) ergibt sich für die untersuchten α -Werte folgendermaßen :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \right)^2 \cong \frac{3}{2} - \ln 2\alpha = 0,807 - \ln \alpha. \quad (17)$$

Durch Berechnung mit Hilfe dieser Gleichung der Gleichstrom-Streuleitfähigkeit für verschiedene α -Werte erhalten wir die Kurve der Abb. 4. Die berechneten Werte sind in Spalte $\delta = 0$ der Tab. IIa enthalten.

Diese Werte der Gleichstrom-Streuleitfähigkeit sind in der Literatur bereits bekannt. RHEA [1, 3] hat schon im Jahre 1927 die Differentialgleichung der Feldverteilung für kreisförmige Nuten mittels FOURIERScher Randbedingung und unter Voraussetzung einer gleichmäßigen Stromverteilung gelöst. Später hat ROTHERT [2] ähnliche Rechnungen durchgeführt und ein Kraftlinienbild gezeichnet, das er auf Grund des analytischen Ausdruckes für das Vektorpotential erhielt. Daraus hat er für einige Fälle die Streuleitfähigkeit bestimmt. Auf die hier beschriebene Weise können aber die Rechnungen bedeutend einfacher und schneller gemacht werden. Übrigens sind in Abb. 4 die von ROTHERT berechneten Werte mit Kreisen bezeichnet. Wie ersichtlich, fallen diese — den ersten Punkt ausgenommen — auf die von uns festgestellte Kurve. ROTHERT hat auch Messungen durchgeführt, deren Ergebnisse mit den Rechnungen praktisch gut übereinstimmen.

Jedenfalls ist aus den Kurven ersichtlich, daß die Streuleitfähigkeit beträchtlich vom Verhältnis der Nutenöffnung und des Durchmessers abhängt.

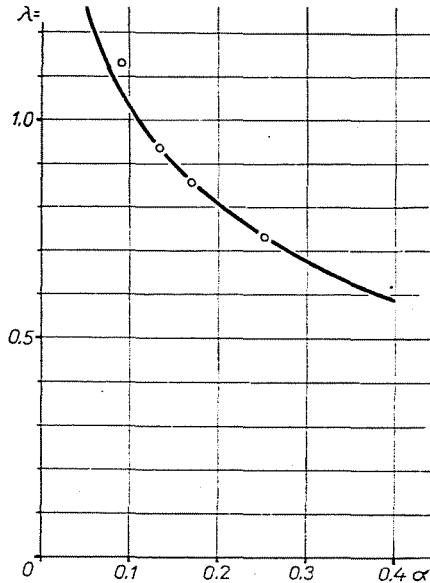


Abb. 4

Die in der Literatur oft vorkommende Feststellung, wonach die Gleichstromleitfähigkeit der Kreisprofilnute 0,66 ist, trifft nur unter bestimmten Bedingungen zu und kann in ungünstigem Falle beträchtliche Fehler verursachen.

Aus Gleichung (13b) kann auch die mit Berücksichtigung der Wirbelstromwirkungen berechnete Streuleitfähigkeit bestimmt werden. Die Ergebnisse der im Anhang 4 angegebenen Berechnungen sind in Tab. IIa und IIb sowie

Tabelle IIa

Werte der Streuleitfähigkeiten λ_{∞} und λ_{\sim}

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$ \epsilon_0 $
0	1,250	1,028	0,810	0,680	0,589	0
1,415	1,237	1,005	0,785	0,657	0,567	1,0
1,700	1,210	0,985	0,766	0,637	0,548	1,2
1,98	1,177	0,954	0,739	0,609	0,520	1,4
2,26	1,143	0,921	0,695	0,576	0,488	1,6

Tabelle IIb

Werte des Faktors $k_x = \frac{\lambda_{\sim}}{\lambda_{=}}$

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$ w_0 $
1,415	0,982	0,978	0,970	0,967	0,964	1,0
1,700	0,968	0,958	0,946	0,939	0,932	1,2
1,980	0,942	0,927	0,912	0,896	0,883	1,4
2,260	0,914	0,895	0,864	0,847	0,829	1,6

in Abb. 5 enthalten. In der Abbildung und in den Tabellen bedeutet k_x den Reaktanzabnahmefaktor :

$$k_x = \frac{\lambda_{\sim}}{\lambda_{=}} \quad (18)$$

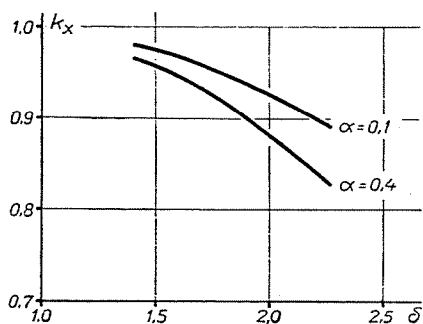


Abb. 5

Nachdem k_x bei den kleineren Werten von δ in der Nähe der Einheit liegt, wurden hier im Vergleich zum Widerstandserhöhungsfaktor wesentlich weniger Punkte berechnet.

V. Gegenseitige Impedanz in Doppelkäfig-Anordnung

Auf Grund des Vorhergehenden ist es möglich, auch verwickeltere Fälle zu untersuchen.

Abb. 6 zeigt eine Doppelkäfiganordnung. Der obere Käfig besteht aus Rundstäben, der Leiterquerschnitt des unteren Käfigs kann beliebig sein. Die obere und untere Nutenöffnung der Kreisprofilnute ist b . Die im oberen

und unteren Käfig fließenden Ströme sind :

$$i_1 = I_1 e^{j\omega t} \quad (19a)$$

$$i_2 = I_2 e^{j\omega t} . \quad (19b)$$

Bevor wir uns mit der Frage im allgemeinen beschäftigen, wollen wir untersuchen, welche Wirkung die Wirbelströme des oberen Käfigs auf die Impe-

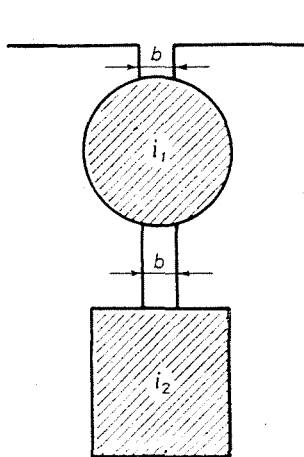


Abb. 6

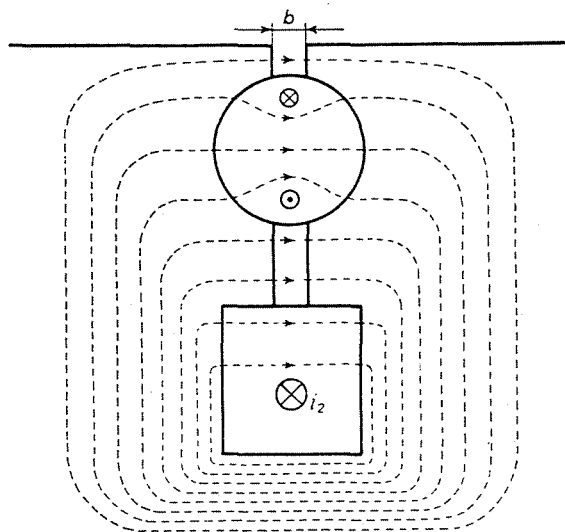


Abb. 7

danz des unteren Käfigs im Falle $i_1 = 0$ ausüben. Dieser Fall kommt nämlich bei den sogenannten Blindstabläufern vor, wo die oberen Stäbe nicht mit Ringen zum Käfig vereint sind und in diesen nur die Nutstreckkraftlinien der unteren Stäbe Wirbelströme induzieren, die sich innerhalb des Stabes schließen.

Die Verteilung der Streukraftlinien und der Wirbelströme des oberen Stabes ist in Abb. 7 schematisch dargestellt.

Die Impedanz des unteren Leiters ist, entsprechend den Kraftlinien, aus mehreren Teilen zusammengesetzt, die über die einzelnen Abschnitte durchgehen. Im weiteren wollen wir uns nur mit der Berechnung jenes Teiles beschäftigen, der den Streukraftlinien über den oberen Leiter von Durchmesser D entspricht, da die übrigen Teile der Impedanz von der Form des oberen Käfigs unabhängig sind und auf übliche Weise berechnet werden können. Wird der erwähnte Teil der Impedanz des unteren Leiters mit Z_k bezeichnet, ergibt sich die dementsprechende komplexe Leistung zu :

$$S = I_2 \hat{I}_2 Z_k = I_2 \hat{I}_2 (R_k + jX_k) . \quad (20)$$

Diese komplexe Leistung kann, ähnlich zum im Abschnitt II angewendeten Verfahren, auch mit Hilfe des auf die Oberfläche des Rundstabes berechneten POYNTINGSchen Vektors bestimmt werden. Die Änderung der tangentialen Feldstärke am Stabumfang bei den angedeuteten Bedingungen ist — gleichmäßige Feldstärkenverteilung bei der Nutenöffnung vorausgesetzt — in Abb. 8 dargestellt.

Die der Abb. 8 entsprechende FOURIERSche Reihe ist :

$$\mathbf{h}_\varphi(r_0) = \frac{2\mathbf{I}_2}{r_0 \pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \cos(2\nu-1)\varphi e^{j\omega t}. \quad (21)$$

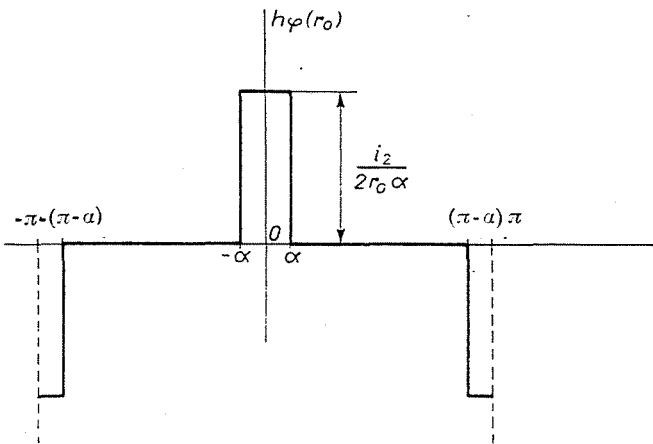


Abb. 8

Die die Randbedingung (21) befriedigende Lösung des Differentialgleichungssystems (6) weicht lediglich insofern von den Gleichungen (7) ab, daß $2i_2$ an Stelle von i einzusetzen ist und bei der Summierung nur die Glieder von ungerader Ordnungszahl zu berücksichtigen sind ($n = 2\nu - 1$). Somit wird :

$$\mathbf{E}_z(r, \varphi) = \frac{2j\omega\mu_0}{\pi w_0} \mathbf{I}_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{J_{(2\nu-1)}(w)}{J'_{(2\nu-1)}(w_0)} \cdot \frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \cos(2\nu-1)\varphi. \quad (22)$$

Werden der Vektor der Energieströmung und die komplexe Leistung auf die im Anhang 5 angegebene Weise berechnet und mit Gleichung (20) verglichen, so ergeben sich für die realen und imaginären Teile von \mathbf{Z}_k nachstehende Ausdrücke :

$$R_k = 4R_{01} |w_0|^2 \cdot \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{j J_{(2\nu-1)}(w_0)}{w_0 J'_{(2\nu-1)}(w_0)} \left[\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right]^2 \right\} = R_{01} k_{kr} \quad (23a)$$

$$\lambda_k = \frac{X_k}{\omega \mu_0 l} = \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{j J_{(2\nu-1)}(w_0)}{w_0 J'_{(2\nu-1)}(w_0)} \left[\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right]^2 \right\}. \quad (23b)$$

Die Werte von k_{kr} sind in Tab. III und im Diagramm der Abb. 9 in Funktion von δ und α angegeben. Wie ersichtlich, sind bei gleichen Abmessungen die zusätzlichen Verluste wesentlich größer, als wenn Strom i_2 durch einen Rundstab fließen würde.

Die Streuleitfähigkeit beträgt bei der Frequenz $f = 0$:

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu-1} \left[\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right]^2. \quad (24)$$

Im Falle der untersuchten Abmessungen ergibt sich die Summe der unendlichen Reihe zu:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu-1} \left[\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right]^2 \cong \frac{3}{4} - \frac{\ln \alpha}{2}. \quad (25)$$

Tabelle III

Werte des Faktors k_{kr}

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	$ w_0 $
0,282	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,2
0,424	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,3
0,565	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,4
0,705	0,07	0,07	0,07	0,06	0,06	0,5
0,850	0,14	0,14	0,14	0,13	0,13	0,6
0,990	0,25	0,25	0,24	0,24	0,23	0,7
1,130	0,42	0,42	0,41	0,40	0,39	0,8
1,270	0,67	0,66	0,65	0,63	0,61	0,9
1,415	0,99	0,98	0,97	0,94	0,91	1,0
1,555	1,41	1,40	1,37	1,33	1,29	1,1
1,700	1,91	1,90	1,86	1,81	1,74	1,2
1,840	2,50	2,49	2,44	2,36	2,28	1,3
1,980	3,17	3,15	3,08	2,99	2,88	1,4
2,120	3,89	3,87	3,79	3,67	3,53	1,5
2,260	4,67	4,64	4,54	4,39	4,22	1,6

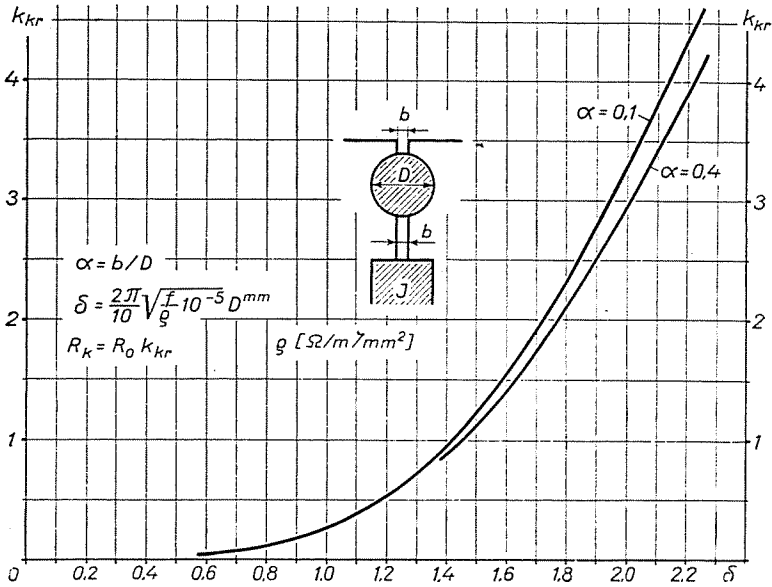


Abb. 9

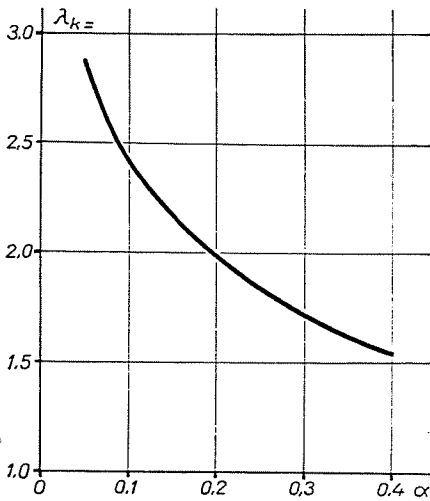


Abb. 10

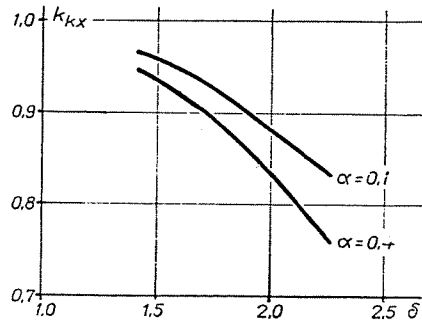


Abb. 11

Die Werte von $\lambda_{k_{\infty}}$ sind in Reihe $\delta = 0$ der Tab. IV und in Abb. 10 in Funktion von α zu finden.

$\lambda_{k_{\sim}}$ kann auf Grund der Gleichung (23b) berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Tab. IVa (auf zwei Zehntel aufgerundet) angeführt. Der Reaktanz-

abnahmefaktor k_{kx} ist in Tab. IVb und in Abb. 11 zu finden :

$$k_{kx} = \frac{\lambda_k \sim}{\lambda_k =} . \quad (26)$$

In dem allgemeinen Fall, wo in beiden Stäben Strom fließt ($i_1 \neq 0$; $i_2 \neq 0$) können für die beiden Stäbe folgende Spannungsgleichungen aufgeschrieben werden :

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (27a)$$

$$U_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (27b)$$

Z_{11} ist die Eigenimpedanz des oberen, Z_{22} die des unteren Stabes, Z_{12} die gegenseitige Impedanz zwischen den beiden Stäben, U_1 und U_2 bedeuten die an den unteren bzw. oberen Stab gelegten Spannungen, die im gegebenen Fall — z. B. in kurzgeschlossenem Käfig — auch die vom Primärfeld induzierten Spannungen sein können.

Z_{11} und Z_{12} enthalten die Impedanz des Hauptfeldes, die Streureaktanzen und den Widerstand der Stäbe. Ihre Berechnung erfolgt in der üblichen Weise.

Tabelle IVa

Werte der Streuleitfähigkeiten $\lambda_{k=}$ und $\lambda_{k\sim}$

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	w_0
0	2,86	2,42	1,98	1,72	1,54	0
1,415	2,78	2,33	1,90	1,64	1,46	1,0
1,700	2,70	2,26	1,83	1,56	1,38	1,2
1,980	2,59	2,14	1,73	1,46	1,28	1,4
2,260	2,47	2,02	1,60	1,34	1,17	1,6

Tabelle IVb

Werte des Faktors $k_{kx} = \frac{\lambda_{k\sim}}{\lambda_{k=}}$

δ	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$	$\alpha = 0,4$	w_1
1,415	0,970	0,965	0,957	0,952	0,947	1,0
1,700	0,942	0,936	0,925	0,907	0,900	1,2
1,980	0,904	0,885	0,872	0,846	0,835	1,4
2,260	0,860	0,835	0,805	0,780	0,760	1,6

Bei der Berechnung der den Streukraftlinien entsprechenden Reaktanzen und der Stabwiderstände ist auf Grund des vorhergehenden die Wirkung der im Rundstab induzierten Wirbelströme im Falle Z_{11} nach Gleichung (13) und im Falle Z_{22} nach Gleichung (23) in Betracht zu ziehen.

Die gegenseitige Impedanz Z_{12} besteht aus zwei Teilen. Ein Teil entspricht denjenigen Kraftlinien, die mit beiden Stäben verkettet sind, jedoch über den oberen Stab nicht durchgehen (über die obere Nutenöffnung sich schließende Kraftlinien, Zahnkopfstreuung, Luftspaltfeld usw.); der andere Teil ist die Impedanz von Kraftlinien, die über den oberen Stab durchgehen. Die Form des oberen Stabes beeinflusst nur den letzten Teil. Wie im Anhang 6 gezeigt wird, gleicht dieser Teil (Z'_{12}) der Impedanz Z_{12} der Hälfte der vorher bereits bestimmten Impedanz Z_k (23a, 23b) :

$$Z'_{12} = \frac{Z_k}{2} \quad (28)$$

Hiermit wurden sämtliche Kennwerte (Eigen- und gegenseitige Impedanz) der kreisförmigen Nut bestimmt, und so können die Wirbelstromwirkungen in beliebiger Schaltung berücksichtigt werden.

Beispiel

Die Nutenanordnung eines Doppelkäfigläufers ist in Abb. 12 dargestellt. Die oberen Stäbe sind aus Aluminiumbronze ($\rho_1 = 0,115 \text{ Ohm/m/mm}^2$), die unteren aus Bronze mit spezifischem Widerstand $\rho_2 = 0,05 \text{ Ohm/m/mm}^2$. Es soll das Ersatzschaltbild der Käfige — lediglich unter Berücksichtigung der in der Nut befindlichen Teile — für die Frequenz von $f = 50 \text{ Hz}$ bestimmt werden. Das Ersatzschaltbild des Motors ist in Abb. 13 gezeigt. X_s ist die Streureaktanz des Ständers, R_s der Ständerwiderstand, X_0 die Reaktanz des Hauptfeldes, X jener Teil der Läuferreaktanz, der von den oberhalb des oberen Stabes sich schließenden Streukraftlinien herrührt (obere Nutenschlitzstreuung, Luftspaltstreuung usw.). Die Berechnung dieser Teile ist für uns von keiner Bedeutung, weshalb wir uns im folgenden nur mit den von den Klemmen $a-b$ rechts befindlichen Elementen des Schaltbildes befassen werden. Der Einfachheit halber sind sämtliche Widerstände und Reaktanzen auf die Axiallänge $l = 1 \text{ cm}$ und auf einen Stab bezogen.

Die zur Berechnung der Impedanz nötigen Kennwerte bezüglich der oberen Nut sind

$$a_1 = \frac{2,5}{25} = 0,1$$

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{10} \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-5}}{0,115}} \cdot 25 = 1,035$$

$$R_{01} = 0,115 \frac{0,01}{12,5^2 \pi} = 2,34 \cdot 10^{-6} \Omega.$$

Auf Grund der Abb. 4 und 5 ist

$$k_{r1} = 0,1 \quad k_x \cong 1 \quad \lambda_m = 1,028.$$

Mit diesen Werten erhalten wir für die Eigenimpedanz des oberen Leiters :

$$Z'_{11} = R'_{11} + j X'_{11} = (1 + k_{r1}) R_{01} + j \omega \mu_0 l \lambda = (2,58 + j 4,05) 10^{-6} \Omega.$$

Die Kennwerte für den unteren Käfig sind :

$$\alpha_2 = \frac{2,5}{20} = 0,125$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{10} \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-5}}{0,05}} \cdot 20 = 1,256$$

$$k_{r2} = 0,2 \quad \lambda_{=} = 0,95 \quad k_{x2} \approx 1 \quad R_{02} = 1,59 \cdot 10^{-6} \Omega.$$

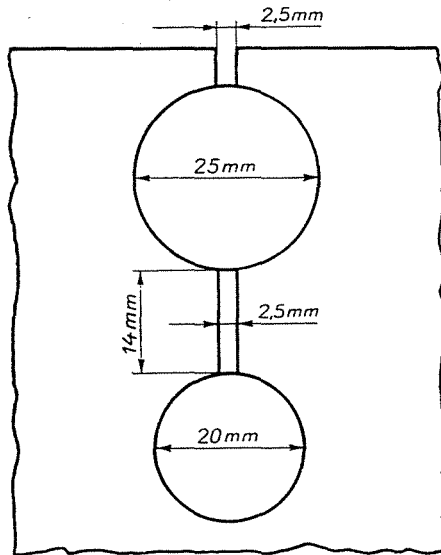


Abb. 12

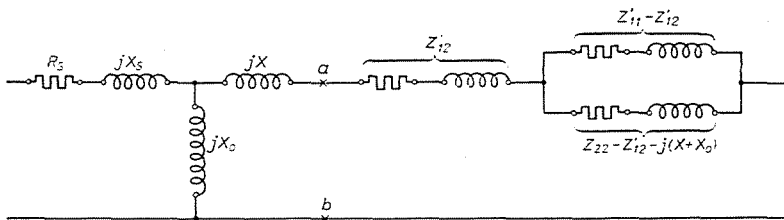


Abb. 13

Aus Abb. 9 und 10 erhalten wir mit den Werten des oberen Käfigs folgende Werte :

$$k_{kr} = 0,25 \quad \lambda_{k=} = 2,42 \quad k_{xk} \sim 1.$$

Die magnetische Leitfähigkeit im Halsteil zwischen den beiden Käfigen ist:

$$\lambda_{n} = \frac{14}{2,5} = 5,6.$$

Mit diesen Werten ergibt sich für die Eigenimpedanz des unteren Stabes :

$$\begin{aligned} Z'_{22} &= R'_{22} + j X'_{22} = [R_{02} (1 + k_{r2}) + R_{01} k_{kr}] + j \omega \mu_0 l [k_{xk} \lambda_2 + k_{kx} \lambda_k + \lambda_n] = \\ &= (2,49 + j 35,6) 10^{-6} \Omega. \end{aligned}$$

Schließlich beträgt die gegenseitige Impedanz zwischen den beiden Käfigen auf Grund der Gleichung (28) :

$$Z'_{12} = R'_{12} + j X'_{12} = \frac{1}{2} (k_{kr} R_{01} + j \omega \mu_0 l \lambda_k) = (0,293 + j 4,76) 10^{-6} \Omega.$$

Die Elemente des Ersatzschaltbildes sind :

$$\begin{aligned} Z'_{11} - Z'_{12} &= (2,287 - j 0,71) 10^{-6} \Omega \\ Z'_{22} - Z'_{12} &= (2,197 + j 30,84) 10^{-6} \Omega. \end{aligned}$$

Die Vernachlässigung der Wirkung der Wirbelströme hätte in den Widerständen eine Abweichung verursacht. In diesem Falle hätte sich nämlich das Ergebnis folgendermaßen gestaltet :

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{01} = 2,34 \cdot 10^{-6} \Omega \\ R_{22} &= R_{02} = 1,59 \cdot 10^{-6} \Omega \\ R_{12} &= 0. \end{aligned}$$

VI. Übersicht

Mit den im vorhergehenden beschriebenen Berechnungen ist es gelungen, den Widerstand und die Nutzenstreureaktanz der in Kreisprofilnuten gebetteten massiven Leiter bei Berücksichtigung der Stromverdrängung zu bestimmen. Aus den angeführten Tabellen und Diagrammen geht hervor, daß bei den in der Praxis meist vorkommenden geometrischen Abmessungen und Frequenzen in erster Reihe der Widerstandserhöhungsfaktor eine Rolle spielt und der Reaktanzabnahmefaktor in der Nähe der Einheit liegt. Es kann auch festgestellt werden, daß die Erscheinung der Stromverdrängung besonders den Widerstand der aus Kupfer hergestellten Dämpferwicklungen von Einphasen-Synchronmaschinen bzw. der unter Umständen ebenfalls aus Kupfer erzeugten Anlaßkäfige von selbstanlaufenden mehrphasigen Synchronmaschinen wesentlich abändern kann, da infolge des geringen spezifischen Widerstandes des Kupfers bei einer Frequenz von 100 Hz bzw. 50 Hz die Eindringtiefe verhältnismäßig klein ist, so daß der Widerstandserhöhungsfaktor über einem Stabdurchmesser von 8—10 mm bedeutend ist.

Die Läuferimpedanz von Asynchronmotoren mit Doppelkäfigläufer kann — wenn einer oder beide Käfige aus Rundstäben hergestellt werden — mit Hilfe der mitgeteilten Diagramme und Tabellen ebenfalls bestimmt werden.

Die Wirkung der Wirbelströme ist in diesem Falle im allgemeinen nicht stark, weil die Käfige normalerweise aus Messing, Bronze, Aluminiumbronze usw. hergestellt werden, welche Materialien viel größeren spezifischen Widerstand besitzen als Kupfer. Wegen der verhältnismäßig beträchtlichen Eindringtiefe ist sogar bei größeren Durchmessern und 50 Hz Frequenz die durch Stromverdrängung verursachte Widerstandserhöhung nicht bedeutend. In diesem Falle ist der Mehrverlust der im oberen Käfig durch den Strom des unteren Käfigs induzierten Wirbelströme bzw. der dementsprechende zusätzliche Widerstand beachtenswert.

Bei der Ableitung der Ergebnisse wurde in solchen Rechnungen außer den allgemein benutzten vereinfachenden Annahmen nur eine einzige Annäherung angewendet, und zwar die längs der Nutenöffnung gleichmäßige tangentielle Feldstärkenverteilung. Die tatsächliche Feldstärkenverteilung ist, wie im Abschnitt II erwähnt, hiervon abweichend. Die Abweichung ist am größten, wenn Gleichstrom im Stab fließt. Bei höheren Frequenzen nähert sich die Feldstärkenverteilung dem angenommenen idealen Zustand und stimmt damit bei unendlicher Frequenz überein, da in diesem Falle der im Stab fließende Strom sich an der Oberfläche des Stabes in der Nähe der Nutenöffnung in unendlich dünner Schicht gleichmäßig verteilt. Weiterhin kann — auf Grund hier nicht auseinandergesetzter Betrachtungen — gezeigt werden, daß die Abweichung der Feldstärkenverteilung vom angenommenen idealen Fall im untersuchten Bereich nur einen unwesentlichen Fehler im Widerstandserhöhungsfaktor verursacht, im ungünstigsten Falle einige Prozente. Ihr Einfluß auf die Streureaktanz ist größer, aber die Abweichung von den im vorhergehenden bestimmten Werten ist auch in diesem Falle unbeträchtlich.

*

An dieser Stelle möchte ich Fr. Hedwig Sas, Mathematikerin in der Elektrotechnischen Fabrik Ganz meinen Dank aussprechen, die den größten Teil der numerischen Rechnung machte, sowie Herrn Stephan Rác, Dozent des Lehrstuhls für Betriebswesen elektrischer Maschinen, der mit seinen nützlichen Ratschlägen meine Arbeit förderte.

Anhang 1

Die Lösung der Gleichung (6a) wird als die Summe der Glieder folgender Form gesucht

$$\mathbf{E}_z(r_1, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_{zn}(r) \cos n \varphi. \quad (\text{A. 1.1})$$

Wird dies in Gleichung (6a) eingesetzt und nur das Glied mit Ordnungszahl n untersucht, erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{zn}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}_{zn}(r)}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + j \omega \mu_0 \sigma \right) \mathbf{E}_{zn}(r) = 0. \quad (\text{A. 1.2})$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $w = \sqrt{-j \omega \mu_0 \sigma} r$ kann obige Beziehung zu einer BESSELSchen Differentialgleichung umgeändert werden, deren Lösung

$$\mathbf{E}_{zn}(r, \varphi) = C_{1n} J_n(w) + C_{2n} N_n(w) \quad (\text{A. 1.3})$$

ist. Nachdem $\mathbf{E}_{zn}(r; \varphi)$ an der Stelle von $r = 0$ endlichen Wert haben muß, wird $C_{2n} = 0$. Wird Gleichung (A. 1.3) in Gleichung (6c) eingesetzt, erhalten wir:

$$\mathbf{H}_{\varphi n}(r, \varphi) = \frac{1}{j \omega \mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{zn}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial r} = C_{1n} \frac{\sqrt{-j \omega \mu_0 \sigma}}{j \omega \mu_0} J_n'(w) \cos n \varphi. \quad (\text{A. 1.4})$$

Vergleichen wir obige Gleichung mit der auf Radius $r = r_0$ durch Gleichung (3) vorgeschriebenen Randbedingung, erhalten wir:

$$C_{1n} = \frac{\mathbf{I}}{r_0 \pi} \cdot \frac{j \omega \mu_0}{\sqrt{-j \omega \mu_0 \sigma} J_n'(w_0)} \frac{\sin n \alpha}{n \alpha}. \quad (\text{A. 1.5})$$

Dies wieder in Gleichung (A. 1.3) eingesetzt und die Summierung auf jedes n von ganzer Zahl durchgeführt, ergibt das den Gleichungen (7) entsprechende Ergebnis.

Anhang 2

Es soll folgende Bezeichnung eingeführt werden:

$$A_n = \frac{j J_n(w_0)}{w_0 J_n'(w_0)}; \quad (\text{A. 2.1})$$

hiermit wird Gleichung (9) auf der Strecke $-\alpha < \varphi < \alpha$:

$$\mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_{\varphi}(r_0, \varphi) = \frac{\mathbf{I} \omega \mu_0}{\pi} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \cos n \varphi \right] \frac{\mathbf{I}}{2 r_0 \alpha}. \quad (\text{A. 2.2})$$

Die an der Oberfläche durchströmende komplexe Leistung wird:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= l \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_{\varphi}(r_0, \varphi) r_0 d\varphi = \mathbf{I} \hat{\mathbf{I}} \frac{\omega \mu_0 l}{r_0 \pi} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \right)^2 \right] = \\ &= \mathbf{I} \hat{\mathbf{I}} \frac{|w_0|^2 l}{r_0^2 \pi \sigma} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{\sin n \alpha}{n \alpha} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 2.3})$$

Durch Vergleich der Gleichung (A. 2.3) mit der rechten Seite der Gleichung (10), ergeben sich für R_b und X_b die Gleichungen (13a—b).

Anhang 3

Es soll folgende Bezeichnung eingeführt werden:

$$\sqrt{-j} v = \frac{w_0}{2} = \frac{\sqrt{-j} |w_0|}{2}. \quad (\text{A. 3.1})$$

Hiermit erhalten wir auf Grund der Potenzreihe der Besselfunktionen:

$$J_n(w_0) = \frac{(\sqrt{-j}v)^n}{n!} \left[1 + \frac{jv^2}{n+1} - \frac{v^4}{2(n+1)(n+2)} - \frac{v^6}{2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] =$$

$$= \frac{(\sqrt{-j}v)^n}{n!} (a_1 + j a_2) \quad (\text{A. 3.2})$$

$$w_0 J'_n(w_0) = \frac{(\sqrt{-j}v)^n}{n!} \left[n + \frac{jv^2(n+2)}{n+1} - \frac{v^4(n+4)}{2(n+1)(n+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{jv^6(n+6)}{2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right] = \frac{(\sqrt{-j}v)^n}{n!} (b_1 + j b_2). \quad (\text{A. 3.3})$$

Diese Werte in Gleichung (A. 2.1) eingesetzt, ergibt sich:

$$A_n = \frac{j(a_1 + j a_2)}{b_1 + j b_2} - \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) + j(a_1 b_1 + a_2 b_2)}{b_1^2 + b_2^2}, \quad (\text{A. 3.4})$$

somit

$$\operatorname{Re} \left[\frac{j J_n(w_0)}{w_0 J'_n(w_0)} \right] = \operatorname{Re} [A_n] = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2}. \quad (\text{A. 3.5})$$

Aus den Gleichungen (A. 3.2) und (A. 3.3) erhalten wir durch Absonderung die Werte a_1 , a_2 , b_1 und b_2 :

$$a_1 = 1 - \frac{v^4}{2(n+1)(n+2)} + \frac{v^8}{2 \cdot 3 \cdot 4(n+1) \dots (n+4)} - \dots \quad (\text{A. 3.6})$$

$$a_2 = \frac{v^2}{n+1} - \frac{v^6}{2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{v^{10}}{2 \cdot \dots \cdot 5(n+1) \dots (n+5)} - \dots \quad (\text{A. 3.7})$$

$$b_1 = n - \frac{v^4(n+4)}{2(n+1)(n+2)} + \frac{v^8(n+8)}{2 \cdot 3 \cdot 4(n+1) \dots (n+4)} \quad (\text{A. 3.8})$$

$$b_2 = v^2 \frac{n+2}{n+1} - \frac{v^6(n+6)}{2 \cdot 3(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{v^{10}(n+10)}{2 \cdot \dots \cdot 5(n+1) \dots (n+5)} \quad (\text{A. 3.9})$$

Werden diese Werte in Gleichung (A. 3.5) eingesetzt und aus der Potenzreihe des Zählers und des Nenners nur die ersten drei Glieder berücksichtigt, erhalten wir:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \frac{2}{n+1} \left[v^2 + \frac{v^6}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \right.$$

$$\left. + \frac{v^{10}}{2(n+1)(n+2)^2(n+3)(n+4)(n+5)} + \dots \right] \quad (\text{A. 3.10})$$

$$b_1^2 + b_2^2 = n^2 + v^4 \frac{n^2 + 8(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} + v^8 \frac{n^2 + 16(n+2)}{2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)(n+4)} + \dots \quad (\text{A. 3.11})$$

Bei einem gegebenen Wert v kann die Beziehung (A. 3.5) mit Hilfe obiger Ausdrücke für verschiedene Werte von n berechnet werden woraus die Rechnungen in Gleichung (13a) durchgeführt werden können. Bei der Bestimmung der in der Tabelle angeführten Werte wurden zu jedem Wert v acht Glieder der Summierung nach n in Betracht gezogen, was im Falle $v \leq 1$ genügende Genauigkeit sichert.

Anhang 4

Der imaginäre Teil der Gleichung (A. 3.4) ist :

$$\text{Im} [A_n] = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} . \tag{A. 4.1}$$

Der Nenner wurde bereits vorher berechnet (A. 3.11). Der Zähler ergibt sich, durch Anwendung der Beziehungen (A. 3.6) ... (A. 3.9) und mit Berücksichtigung der ersten drei Glieder, zu :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = n + \frac{v^4}{(n+1)^2} + \frac{v^8}{2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)} + \dots \tag{A. 4.2}$$

Durch Auswerten der Gleichung (A. 4.1) für verschiedene Werte n und durch Einsetzen der erhaltenen Ergebnisse in Gleichung (13b) kann die Streuleitfähigkeit bestimmt werden.

Die Gleichstrom-Streuleitfähigkeit erhalten wir mit dem Grenzübergang $v \rightarrow 0$. Wird in Gleichungen (A. 4.2) und (A. 3.10) die Substituierung $v = 0$ gemacht, erhalten wir für den Ausdruck (A. 4.1) den Wert :

$$\text{Im} [A_n] = \frac{1}{n} . \tag{A. 4.3}$$

Ferner im Falle $n = 0$ mit der Bedingung $v \rightarrow 0$ ebenfalls aus den Gleichungen (A. 4.2) und (A. 3.10) :

$$\frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{j J_0(w_0)}{w_0 J_0'(w_0)} \right] = \frac{1}{8} . \tag{A. 4.4}$$

Werden die Gleichungen (A. 4.3) und (A. 4.4) in Gleichung (13b) eingesetzt, ergibt sich für die Gleichstrom-Streuleitfähigkeit die Gleichung (16).

Anhang 5

Auf Grund der Abb. 8 und der Gleichungen (21) und (22), unter Berücksichtigung der in Gleichungen (A. 2.1) angewendeten Bezeichnung, ist :

$$\begin{aligned} S_1 &= l \int_{-\alpha}^{\alpha} \mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_{\varphi}(r_0, \varphi) r_0 d\varphi = \\ &= \mathbf{I}_2 \hat{\mathbf{I}}_2 \frac{2 \omega \mu_0 l}{\pi r_0} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{(2\nu-1)} \left(\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right)^2 \right] = \\ &= \mathbf{I}_2 \hat{\mathbf{I}}_2 \frac{2l(w_0)^2}{\sigma r_0^2 \pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{(2\nu-1)} \left(\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right)^2 \right] . \end{aligned} \tag{A. 5.1}$$

Desgleichen :

$$\begin{aligned} S_2 &= l \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \mathbf{E}_z(r_0, \varphi) \hat{\mathbf{H}}_{\varphi}(r_0, \varphi) r_0 d\varphi = \\ &= \mathbf{I}_2 \hat{\mathbf{I}}_2 \frac{2l|w_0|^2}{\sigma r_0^2 \pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{(2\nu-1)} \left(\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right)^2 \right] . \end{aligned} \tag{A. 5.2}$$

Wird die Summe der Gleichungen (A. 5.1) und (A. 5.2) mit der Gleichung (20) verglichen) ergeben sich für Z_k die Gleichungen (23).

Anhang 6

Wird Gleichung (27a) mit $\hat{\mathbf{I}}_1$ und Gleichung (27b) mit $\hat{\mathbf{I}}_2$ multipliziert und die beiden Ausdrücke addiert, erhalten wir:

$$U_1 \hat{\mathbf{I}}_1 + U_2 \hat{\mathbf{I}}_2 = I_1 \hat{\mathbf{I}}_1 Z'_{11} + I_2 \hat{\mathbf{I}}_1 Z'_{12} + I_1 \hat{\mathbf{I}}_2 Z'_{12} + I_2 \hat{\mathbf{I}}_2 Z'_{22} \quad (\text{A. 6.1})$$

Die gestrichelten Werte bedeuten denjenigen Teil der betreffenden Impedanz, der von den mit dem oberen Leiter verketteten Kraftlinien herrührt; nach dem vorhergesagten ist nämlich nur dieser Teil der Untersuchung wert. Laut Bezeichnungen im Abschnitt V ist $Z'_{22} = Z_k$. Somit ist Gleichung (A. 6.1) die komplexe Form der Leistung des oberen Leiters. Dasselbe kann auch mit den elektrischen und magnetischen Feldstärken ausgedrückt werden.

Auf Grund des Prinzips der Superposition setzen sich die Feldstärken aus zwei Teilen zusammen:

$$\mathbf{E}_z(r_0, \varphi) = \mathbf{E}_{1z} + \mathbf{E}_{2z} \quad (\text{A. 6.2})$$

\mathbf{E}_{1z} ist die vom Strom \mathbf{I}_1 des oberen Leiters erzeugte Feldstärke, \mathbf{E}_{2z} die vom Strom \mathbf{I}_2 des unteren Leiters erzeugte Feldstärke [siehe Gleichungen (7a) bzw. (22)].

Die magnetische Feldstärke ist ähnlicherweise:

$$\mathbf{H}_\varphi(r_0, \varphi) = \mathbf{H}_{1\varphi} + \mathbf{H}_{2\varphi} \quad (\text{A. 6.3})$$

wo auf der Strecke $-\alpha < \varphi < \alpha$

$$\mathbf{H}_{1\varphi} = \frac{\mathbf{I}_1}{2 r_0 \alpha} \quad \mathbf{H}_{2\varphi} = \frac{\mathbf{I}_2}{2 r_0 \alpha} \quad (\text{A. 6.4})$$

und auf der Strecke $(\pi - \alpha) < \varphi < (\pi + \alpha)$ (untere Nutenöffnung)

$$\mathbf{H}_{1\varphi} = 0 \quad \mathbf{H}_{2\varphi} = -\frac{\mathbf{I}_2}{2 r_0 \alpha} \quad (\text{A. 6.5})$$

Das Integral des POYNTINGSchen Vektors an der Oberfläche des oberen Leiters ist:

$$\mathbf{S} = \int_F \mathbf{E}_z \hat{\mathbf{H}}_\varphi dF = \int_F (\mathbf{E}_{1z} \hat{\mathbf{H}}_{1\varphi} + \mathbf{E}_{2z} \hat{\mathbf{H}}_{1\varphi} + \mathbf{E}_{1z} \hat{\mathbf{H}}_{2\varphi} + \mathbf{E}_{2z} \hat{\mathbf{H}}_{2\varphi}) dF \quad (\text{A. 6.6})$$

Beim Vergleich der Gleichungen (A. 6.6) und (A. 6.1) ergibt sich, daß die ersten Glieder der rechten Seite gleich sind, da die Impedanz Z'_{11} eben mit der Bedingung berechnet wurde, daß nur im oberen Rundleiter Strom fließt [Gleichung (A. 2.3)]. Ebenso sind die vierten Glieder der rechten Seite beider Gleichungen gleich, und zwar die Werte nach Gleichung (A. 5.2). Da sowohl die elektrischen als auch die magnetischen Feldstärken mit den entsprechenden Strömen proportional sind, ist ebenfalls ersichtlich, daß auch die übrigen Glieder der Gleichungen einander entsprechen; somit erhalten wir aus der Gleichheit der zweiten Glieder der rechten Seiten:

$$Z'_{12} = \frac{\int_F \mathbf{E}_{2z} \hat{\mathbf{H}}_{1\varphi} dF}{I_2 \hat{\mathbf{I}}_1} \quad (\text{A. 6.7})$$

Ist $H_{1\varphi}$ in der unteren Nutenöffnung gleich Null, so genügt es, die Integration nur für den oberen Abschnitt zu machen. Nach Substituierung des Wertes E_{2z} aus Gleichung (22) und des Wertes $H_{1\varphi}$ aus Gleichung (A. 6.4) sowie nach Durchführung der Integration erhalten wir aus Gleichung (A. 6.7) folgendes Ergebnis:

$$Z'_{12} = \frac{2l |w_0|^2}{\sigma r_0^2 \pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{(2\nu-1)} \left(\frac{\sin(2\nu-1)\alpha}{(2\nu-1)\alpha} \right)^2 \right] = \frac{Z_k}{2}, \quad (\text{A. 6.8})$$

das der Gleichung (28) gleich ist.

Literatur

1. STEVENSON, A. R.—PARK, R. H.: Graphical Determination of Magnetic Fields. Theoretical Considerations. Transactions 1927.
2. ROTHERT, H.: Über die Nutstreuung elektrischer Maschinen Teil II—III. (Archiv für Elektrotechnik, Bd. XXXII, 1938.)
3. RETTER GY.: Mágneses terek és körök (Magnetische Felder und Kreise). Tankönyvkiadó, 1952.
4. SIMONYI, K.: Theoretische Elektrotechnik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
5. LENGYEL, Z.: Különleges kalickás forgórészek tervezése (Entwurf von Spezial-Käfigläufern). Mérnöki Továbbképző Intézet, 1955.
6. HESS, H.: Stromverdrängungsmotoren mit Ein- und Mehrnutläufern, Eindringtiefe. Archiv für Elektrotechnik, 1930.
7. LAIBLE, TH.: Stromverdrängung in Nutleitern von trapezförmigem und dreieckigem Querschnitt. Archiv für Elektrotechnik, 1933.
8. SCHUISKY, W.: Die Stromverdrängungsmotoren. Archiv für Elektrotechnik, 1933.
9. ROGOWSKY: Über zusätzliche Kupferverluste. Archiv für Elektrotechnik, 1913.
10. RETTER GY.: Mélyhornyos jellegű különleges forgórészkalickák rúdjaiknak számításáról (Berechnung der Stäbe von Tiefnutläufern). Elektrotechnika, 1956.
11. JAHNKE—EMDRE: Tafeln höherer Funktionen. Teubner, Leipzig 1952.
12. TÖLKE: Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen. Verl. Wittwer, Stuttgart 1936.
13. FREUD G.: Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern. Acta Technica Hungarica, 1954.

Zusammenfassung

Die vorliegende Abhandlung befasst sich mit der analytischen Bestimmung des Widerstandes und der Streuungsreaktanz der in den kreisförmigen Nuten der elektrischen Maschinen liegenden massiven Leitern unter der Voraussetzung, daß die tangentielle Komponente der magnetischen Feldstärke in der Nutenöffnung gleichmäßig verteilt ist.

Für die auf Grund der abgeleiteten Zusammenhänge errechneten Werte der Gleichstrom-Streuleitfähigkeit, der Wechselstromwiderstand und Reaktanz werden Diagramme und Tabellen vorgelegt. Desgleichen veranschaulichen Tabellen und Diagramme die Werte, die sich auf die der Abb. 7 entsprechenden Anordnung beziehen.

Dipl. Ing. R. TUSCHÁK, Budapest XIII., Szent István park 5.