

VERGLEICH DES NEO-HOOKE'SCHEN UND DES MOONEY-RIVLIN'SCHEN MATERIALMODELLS IN DER FEM-BERECHNUNG¹

László VALENTA and László MOLNÁR

Department of Precision Mechanics and Optics
Technical University of Budapest
H-1521 Budapest, Hungary

Fax: +36 1 463-3787, Tel.: +36 1 463-2501
Email: valenta@fot.bme.hu, lmolnar@fot.bme.hu

Eingegangen: am April 5, 2000

Zusammenfassung

This paper presents the application of two material models, Mooney-Rivlin, and Neo-Hooke in FEM, to calculate better results, nearer to the facts. The exact definition of the material properties is an important step in the finite element analysis. Silicone rubber belongs to non-linear incompressible elastic materials, which have large deformability. This material behaviour can be described by the application of the strain energy potential. Of course, there are more types of elastic potentials, but the Mooney-Rivlin method is widely used for rubber-like materials. This Mooney-Rivlin formula is also used by the Marc/Mentat FEM program.

Keywords: silicon-rubber, hyperelastic material model.

1. Einleitung

Im Bereich der Feinmechanik werden Kunststoffe und Gummielemente immer öfter verwendet. In der Konstruktion spielen diese Elemente eine veränderte Rolle, die Funktion der Gummiteile hat sich von Abdichtung zu Hauptteilen (Gelenke, elastische Führung) verschoben. Dementsprechend muß nicht nur die Festigkeit der Elemente untersucht werden, sondern, falls diese als Konstruktionselemente verwendet werden, müssen auch die Materialeigenschaften gründlich erforscht werden.

2. Energie der Formänderung der hyperelastischen Materialien bei großer Formänderung

Um die richtigen Endergebnisse zu erhalten, ist es bei einer FEM Analyse notwendig die Materialeigenschaften richtig anzugeben. Das Silikongummi zeigt große Formänderungsfähigkeit und gehört der Materialgruppe mit nichtlinearem Verhalten.

¹Mit der Unterstützung von OTKA T 032509 und T 022 196

Dieses Verhalten zeigt das Festigkeitsdiagramm des 50 Sh A Additivsilikongummis (Bild 1).

Die Spannung ist hier aus dem undeformierten ursprünglichen Querschnitt berechnet, die Dehnung ist auf die Originallänge bezogen.

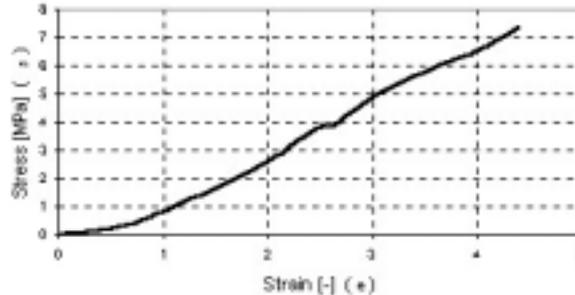


Bild 1. Festigkeitsdiagramm des 50 Sh A Additivsilikongummis

Der Formänderungszustand wird mit dem Verformungstensor beschrieben. Der Verformungstensor kann in einem von uns gewähltem Koordinatensystem in der Regel von der ursprünglichen Konfiguration hergestellt werden (Lagrange Methode).

Die Matrix der Koordinaten des Lagrange'schen Verformungstensors in Descartes $x - y - z$ Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Die Hauptdehnungen ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) sind mit den spezifischen Dehnungen ($\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*$) entlang der Verformhauptachse durch die folgenden Beziehungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_1} &= 1 + \varepsilon_1^* = \lambda_1, \\ \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_2} &= 1 + \varepsilon_2^* = \lambda_2, \\ \sqrt{1 + 2 \cdot \varepsilon_3} &= 1 + \varepsilon_3^* = \lambda_3, \end{aligned} \quad (2)$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die spezifischen Längsdehnungen sind.

Die Hauptdehnungen sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung (3):

$$\varepsilon^3 - J_1 \varepsilon^2 - J_2 \varepsilon - J_3 = 0. \quad (3)$$

Die Formänderungsinvarianten J_1, J_2, J_3 sind von Hauptdehnungen abhängig:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \\
 J_2 &= -(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \\
 &\quad - \frac{1}{4}(\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 - 3), \\
 J_3 &= \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = \frac{1}{8}(\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2^2 - 1)(\lambda_3^2 - 1).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Die Ermittlung der elastischen Potentiale $W(J_1, J_2, J_3)$ ist einfacher mit den Formänderungsinvarianten als mit den Hauptdehnungen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta L - \delta W = 0, \tag{5}$$

wobei L die Arbeit der äußeren Kraft ist.

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit und der Volumenunveränderlichkeit ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$) erhält man:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 - \sigma_3 &= \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}, \\
 \sigma_2 - \sigma_3 &= \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Das bedeutet, daß nur zwei von den drei Formänderungsinvarianten voneinander unabhängig sind. So ändert sich der Ausdruck der elastischen Potentiale folgender Weise: $W(J_1, J_2)$. Zur Beschreibung des Materialverhaltens der gummiartigen Materialien benutzen wir wegen ihres nichtlinearen Verhaltens elastische Potentiale. Für die Untersuchungen der gummiartigen Materialien werden in der Regel die Neo-Hooke'sche und Mooney-Rivlin'sche Funktionen verwendet.

3. Vergleich der Modellierung mit Neo-Hooke'scher und mit Mooney-Rivlin'scher Methode

Um die genaueren Ergebnisse zu erhalten werden auch bei der FEM Methode elastische Potentiale benutzt. Das MARC 7.1 Programm bietet sowohl die Methode von Neo-Hook als auch Mooney-Rivlin für diesen Zweck an. Im Programm wurde eine verallgemeinerte Mooney-Rivlin Formel eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 W &= C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \\
 &\quad + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3,
 \end{aligned} \tag{7}$$

wobei
 $C_{10}, C_{01}, C_{11}, C_{20}, C_{30}$ die Materialeigenschaften, die durch Experimente zu bestimmen sind,
 W elastische Potentiale,
 I_1, I_2 Formänderungsinvarianten erster und zweiter Ordnung,
 wobei

$$I_1 = 2J_1 + 3, \quad (8)$$

$$I_2 = 4(J_2 - J_1) + 3.$$

Die elastischen Potentiale auf Grund der Neo-Hooke'schen Methode:

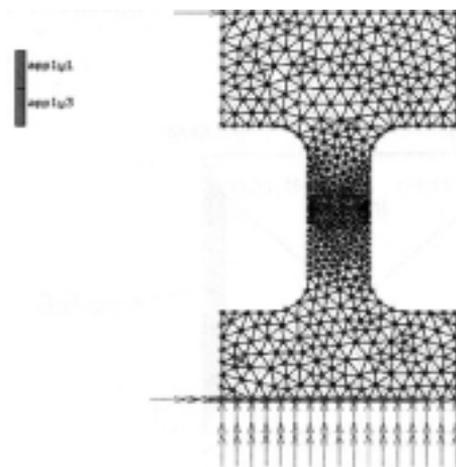
$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad (9)$$

und auf Grund der Mooney-Rivlin'schen Methode:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3). \quad (10)$$

Beide Modelle stellen wir mit Hilfe von Anwendungsbeispielen vor. Im ersten Fall werden die von nichtlinearen Verhalten gegebenen nichtlinearen Bewegungen hervorgehoben, im zweiten wird Übereinstimmung mit der Realität hervorgehoben.

3.1. Das Neo-Hooke'sche Modell



Materialeigenschaften:

Element 1: Stahl

$$E = 210 \text{ Gpa}$$

$$\nu = 0,3$$

Element 2: Silikongummi

$$E = 1,3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,49$$

Belastung:

Apply 1: Fixation

Apply 2: Belastung 0,3 N während
1 Sekunde, linear

Im Modell (*Bild 2*) haben wir das Festigkeitsdiagramm des 40 Sh A Gummi eingesetzt und $C_{10} = 0,1108 \text{ MPa}$ Materialkonstante erhalten.

Bild 2.

Durch die Vergleichung der *Bilder 5* und *6* ist es ersichtlich, daß infolge der nichtlinearen Materialeigenschaften nichtlineare Bewegungen entstehen.

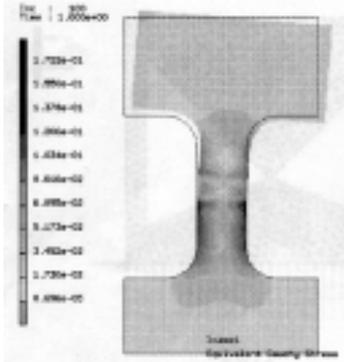


Bild 3.

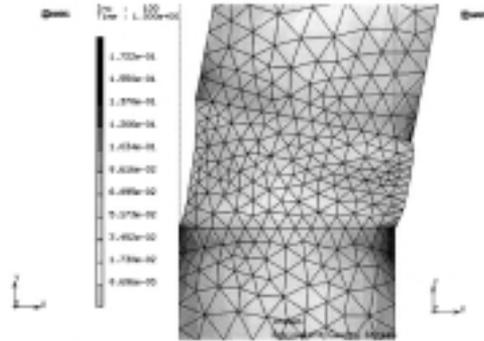


Bild 4.

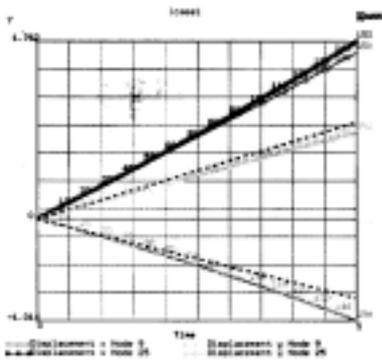


Bild 5. Das Neo-Hooke'sche Modell

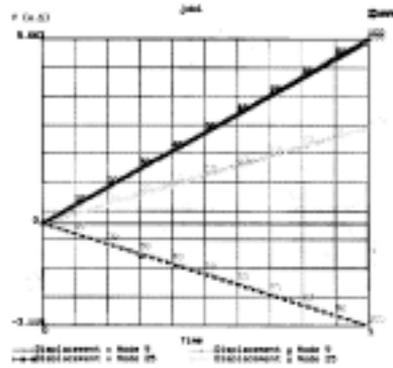
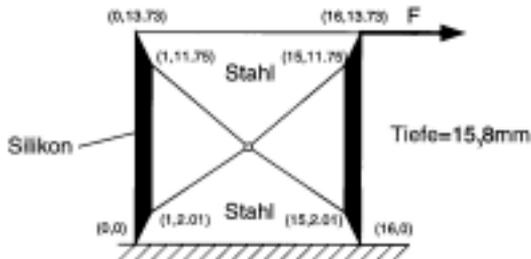


Bild 6. Das Hooke'sche Modell

3.2. Das Mooney-Rivlin'sche Modell



Elastizitätsmodul

Stahl $E = 210 \text{ GPa}$

Silikon $E = 1,3 \text{ MPa}$

Poisson-Koeffizient

Stahl $\nu = 0,3$

Silikon $\nu = 0,49$

Im Mooney'schen Modell

$C_{10} = 0,311 \text{ MPa}$

$C_{01} = -0,365 \text{ MPa}$

$C_{11} = 0,0134 \text{ MPa}$

Bild 7.

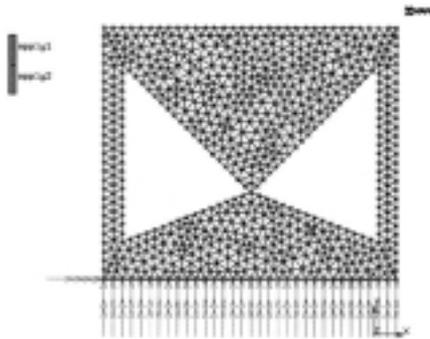


Bild 8.

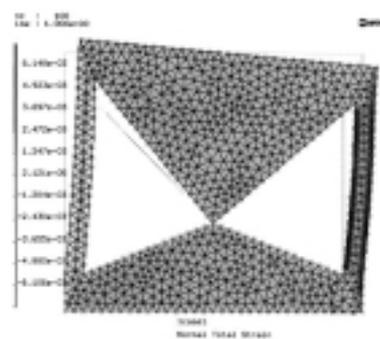


Bild 9.

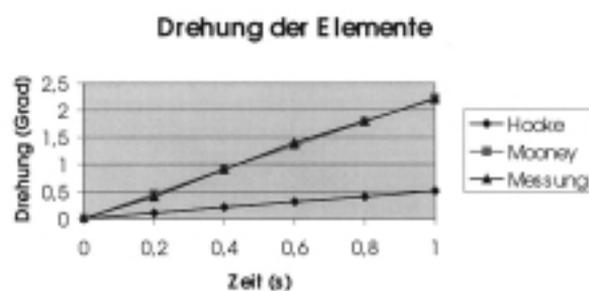


Bild 10.

Wir haben von der TU Ilmenau im Rahmen der wissenschaftlichen Zusammenarbeit die Aufgabe bekommen, Silikon-Gelenke zu produzieren. Die Kraft – Winkel Kurven der Gelenke wurden in Deutschland gemessen. Die Ergebnisse von FEM mit dem Mooney-Rivlin'schen Materialmodell zeigen die größte Ähnlichkeit mit den gemessenen Kurven.

4. Zusammenfassung

Die Ergebnisse beweisen, daß die Angabe der richtigen Materialeigenschaften einen wesentlichen Teil der Aufgabe der FEM Analysis bildet. Die Ergebnisse zeigen unter Benutzung der Beschreibung des Materialverhaltens durch nichtlineare und hyperelastische Materialgesetze eine Differenz, verglichen mit den Ergebnissen, die mit dem Hooke'schen Materialmodell gewonnen sind. Das wirkliche Verhalten von Silikonem wird am besten durch nichtlineare Materialmodelle beschrieben.

Literatur

- [1] OGDEN, R. W.: Large Deformation Isotropic Elasticity – on the Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids, *Proc. R. Soc. London. A.* **326**, (1972), pp. 565–584.
- [2] BOROS, T.: A rugalmas potenciál és a feszültségi állapot számításának módszere a nemlineáris kontinuummechanikában, *GÉP XXIX.* 1977. 6. June.
- [3] HUBA, A. – MOLNÁR, L. – VALENTA, L.: Szilikon-elasztomer anyagok tulajdonságai és konstrukciós célú alkalmazásai a finommechanikában és a gyógyászatban, *OGÉT*, Oradea, 1999.
- [4] MOLNÁR, L.: Statische Stabilitätsprüfung einer hochelastischen Konstruktion, *44. IWK* 1999, Ilmenau, Band. 2. pp. 246–251.
- [5] HUBA, A.: Konstruktionswerkstoffe aus Silikon-Elastomeren und ihre medizintechnischen Anwendungen, *44. IWK*, 1999, Ilmenau, Band 2. pp. 460–465.