PERIODICA POLYTECHNICA SER. MECH. ENG. VOL. 39, NO. 1, PP. 9-24 (1995)

BIRATIONALE TRANSFORMATIONEN (EIN HISTORISCHER ÜBERBLICK)

Ján ČIŽMÁR

Katedra geometrie MFF UK
Mlynska dolina
SK-842 15 Bratislava, SLOVAKIA
e-mail: cizmar@ fmph.uniba.sk

Eingegangen: Februar 9, 1995.
Herrn Professor Julius Strommer zu seinem 75. Geburtstag gewidmet

Abstract

A survey of the historical development of the concept of birational transformations is sketched. The first period from CREMONA till the twenties of the 20th century is based on the classical algebraic methods of the Italian school. The second period operates with ideal-theoretical methods (B. L. VAN DER WAERDEN) and progressed methods of the commutative algebra (product varieties, protections, valuation etc. (O. ZARISKI). In the third period the basic concepts are expressed in the language of schemas.

Keywords: birational transformation, homaloid system, generic point, centre of the valuation, rational map of schemas.

1. Vorgeschichte

Bis zu den Sechzigerjahren des 19. Jahrhunderts war kein wesentlicher Fortschritt in der analytischen Theorie der nichtlinearen abbildungen in der Geometrie vorgemerkt worden. Etwa 40 Arbeiten und Bücher, die in Jahren 1820–1860 nichtlineare geometrische Abbildungen behandelt hatten, gingen am meisten an die Kreis- und Kugelinversion an, also an die Abbildungen, die im Grundsatz schon dem Appolonios in der Antik bekannt waren, dann sind sie ins Vergessen gefallen worden, im 19. Jahrhundert waren sie wiederentdeckt, untersucht und angewandt worden. Die intensive Untersuchung der ebenen algebraischen Kurven, das Problem der Auflösung ihrer Singularitäten haben das Bestreben hervorgerufen, neue wirksame Hilfsmittel der Bearbeitung von Kurven zu suchen und zu finden. Höchsteffektiv in dieser Hinsicht haben sich *birationale Transformationen* erwiesen. Den wirklichen Aufbruch auf diesem Gebiet haben die ersten Veröffentlichungen von Luigi Cremona in der ersten Hälfte der Sechzigerjahre aufgewiesen. Die Transformationen haben sich bald in einen selbstständiges Gegenstand der Untersuchung umgewandelt und haben einen mächtigen Aufschwung zur Entwicklung des neuen algebraischgeometrischen Gebiets veranlaßt. Die tiefliegenden Ergebnisse in der Begründung der ebenen Theorie sowie auch in der Ausarbeitung von Grundlagen der Raumtheorie um und nach dem Jahre 1870 sind neben dem Cremona mit dem Namen von Max Noether eng verbunden.

Die klassische Periode der Entwicklung der Theorie von birationalen Transformationen kann grob mit den Jahren 1860–1925 begrenzt sein. Neben den allgemeinen Fragestellungen konzentrierten sich die Interessen an die Untersuchung der konkreten Fälle von Transformationen in der projektiven Ebene bzw. im projektiven Raum bzw. zwischen verschiedenen Räumen und zwischen ihren linearen Unterräumen.

2. Birationale Transformationen

Wie ist die klassische Gestaltung einer birationalen Transformation?

Es sind immer eins oder zwei Exemplare der projektiven Ebene bzw. des projektiven Raumes über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbf{C}$ bzw. der reellen Zahlen vorhanden: $P^2(\mathbf{C})$, $P'^2(\mathbf{C})$, $P^3(\mathbf{C})$, $P'^3(\mathbf{C})$ usw. Eine *rationale Abbildung* z.B. der projektiven Ebene P^2 in die projektive Ebene P'^2 ist durch drei homogene Polynome gleichen Grades gegeben:

$$\varphi : P^2 \dashrightarrow P'^2 \ ; \quad \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) \ ; \quad \varphi_i \in \mathbf{C}[S_0, S_1, S_2] \ ;$$

$$\varphi_i \text{ - homogen, } i = 0,1,2; \text{ Grad } \varphi_i = n \geq 0,\ i = 0,1,2 \ .$$

Man kann vom Anfang annehmen, daß die Formen φ_i keinen gemeinsamen Faktor haben.

Für einen Punkt $(x) \in P^2$ existiert das Bild $(x) \in P'^2$, falls

$$(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)) \neq (0,0,0)$$

ist. Dann ist $\varphi(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (x'_0, x'_1, x'_2)$ ein Punkt in P'^2, der das *Bild* des Punktes $(x) \in P^2$ genannt wird. Man schreibt:

$$\varphi : P^2 \dashrightarrow P'^2 \ , \ \ (x) \mapsto (x') \ , \ x'_0 = \varphi_0(x) \ , \ \ x'_1 = \varphi_1(x) \ , \ \ x'_2 = \varphi_2(x). \quad (2.1)$$

Für inhomogene Koordinaten, z.B.

$$x = \frac{x_1}{x_0} \ , \quad y = \frac{x_2}{x_0} \ , \quad \text{und} \quad x' = \frac{x'_1}{x'_0} \ , \quad y' = \frac{x'_2}{x'_0}$$

mit $x_0 \neq 0$ und $x'_0 \neq 0$ in den Mengen (affinen Ebenen)

$$A_0^2 = P^2 - \omega_0 \quad (\omega_0 : x_0 = 0) \quad \text{bzw.} \quad A_0'^2 = P'^2 - \omega'_0 \quad (\omega'_0 : x'_0 = 0)$$

erhält man

$$x' = \frac{\overline{\varphi}_1(x,y)}{\overline{\varphi}_0(x,y)} , \quad y' = \frac{\overline{\varphi}_2(x,y)}{\overline{\varphi_0}(x,y)} ;$$

$$\overline{\varphi}_i(x,y) = \frac{1}{x_0^n}\varphi_i(x_0,x_1,x_2) . \tag{2.2}$$

Hier sind

$$\eta(x,y) = \frac{\overline{\varphi}_1(x,y)}{\overline{\varphi}_0(x,y)} , \quad \zeta(x,y) = \frac{\overline{\varphi}_2(x,y)}{\overline{\varphi}_0(x,y)}$$

rationale Funktionen in Unbestimmten x, y. Davon geht die Benennung *rationale Abbildung* hervor.

Die rationale Abbildung φ kann auch durch ein anderes Trippel (ξ_0, ξ_1, ξ_2) von homogenen Polynomen gegeben sein, so daß

$$x_0' = \xi_0(x) , \quad x_1' = \xi_1(x) , \quad x_2' = \xi_2(x) . \tag{2.1'}$$

Es muß aber in allen Punkten, in denen die Bilder $\varphi(x)$ und $\xi(x)$ definiert sind, die Gleichheit

$$(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (\xi_0(x), \xi_1(x), \xi_2(x))$$

gelten. Das benötigt die Erfüllung der Bedingungen

$$\varphi_i(x)\xi_j(x) - \varphi_j(x)\xi_i(x) = 0$$

$$\text{für alle} \quad (i,j) \in J \times J \quad (J = \{0,1,2\}) ,$$

d.h. $\varphi_i\xi_j - \varphi_j\xi_i$ verschwindet auf der ganzen Ebene.

Soll die Abbildung (2.1) eine Umkehrabbildung besitzen, d.h. soll eine rationale Abbildung $\psi : P'^2 \to P^2$ existieren, so daß

$$x_0 = \psi_0(x') , \quad x_1 = \psi_1(x') , \quad x_2 = \psi_2(x') \tag{2.3}$$

mit homogenen Polynomen $\psi_i(S_0, S_1, S_2) \in \mathbf{C}[S_0, S_1, S_2]$ gleichen Grades $m \geq 0$ sind und $\psi \circ \varphi = 1_{P^2}$ und $\varphi \circ \psi = 1_{P'^2}$ (die Identitäten) als rationale Abbildungen gelten, müssen die Formen $\varphi_0(S)$, $\varphi_1(S)$ und $\varphi_2(S)$ (selbstverständlich auch $\psi_0(S)$, $\psi_1(S)$, $\psi_2(S)$) besondere Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen sollen sicherstellen, daß φ und $\psi = \varphi^{-1}$ zueinander invers sind und eine *bijektive Abbildung* zwischen *fast allen* Punkten von P^2 und P'^2 liefern. (Unter ihnen sind die Bedingungen $n > 0$ und $m > 0$ trivial.) In diesem Fall spricht man über eine *birationale Abbildung*. Im Fall $P^2 = P'^2$ spricht man üblich über eine *birationale Transformation*. Die neuere Terminologie unterscheidet diese Begriffe *nicht*.

3. Homaloide

1. Sei $\varphi : P^2 \to P'^2$ eine durch die Formeln (2.1) gegebene birationale Abbildung mit der inversen Abbildung $\psi : P'^2 \to P^2$ (Formeln (2.3)). Dem zweiparametrigen System von Geraden in P'^2

$$\left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x'_i = 0 \;\middle|\; (a) \neq (0) \right\}$$

entspricht durch $\psi = \varphi^{-1}$ ein zweiparametriges System (*das Netz*) von Kurven n-ter Ordnung in P^2

$$\left\{ \sum_{i=0}^{1} a_i \varphi_i(x) = 0 \;\middle|\; (a) \neq (0) \right\}$$

und umgekehrt – dem Netz von Geraden in P^2

$$\left\{ \sum_{i=0}^{2} b_i x_i = 0 \;\middle|\; (b) \neq (0) \right\}$$

enstpricht das Netz von Kurven m-ter Ordnung in P'^2

$$\left\{ \sum_{i=0}^{2} b_i \psi_i(x') = 0 \;\middle|\; (b) \neq (0) \right\} .$$

Es sind die sgn. *homaloidschen Systeme* in P^2 bzw. P'^2. Die Elemente von Systemen heißen *Homaloide.*

Jedem Punkt $(x) \in P^2$ als dem Schnittpunkt von zwei Geraden entspricht im allgemeinen als das Bild $\varphi(x)$ ein einziger freier (beweglicher) Schnittpunkt von entsprechenden Homaloiden. Also gibt es eine Menge von Punkten, die für alle Elemente des homaloidschen Systems gemeinsam sind. Diese gemeinsame Elemente müssen aus der gesamten Anzahl der Schnittpunkte von zwei Homaloiden, die nach dem Bézoutschen Satz n^2 bzw. m^2 ist, die Zahl $n^2 - 1$ bzw. $m^2 - 1$ abnehmen.

2. Seien Φ ein Homaloid und l eine Gerade in P^2. In der 'allgemeinen' Lage gibt es (einschließlich Multiplizität) n gemeinsame Punkte $\phi \cap l$. In der Abbildung φ entspricht dem Homaloid Φ eine Gerade l' und der Geraden l ein Homaloid Ψ, den Schnittpunkten $\Phi \cap l$ die Schnittpunkte $l' \cap \Psi$. Daher geht $n = m$ hervor.

3. Alle gemeinsame Punkte aller Homaloide liegen auf allen drei Basishomaloiden und bieten keinen Bildpunkt. Diese Menge heißt *Basis* des homaloidschen Systems und stellt die Menge derjenigen Punkte dar, für welche die Bilder nicht existieren. (In heutiger Terminologie ist die Abbildung in diesen Punkten *nicht regulär*, d.h. nicht definiert.) Diese Menge heißt *Fundamentalmenge*, ihre Punkte – *Fundamentalpunkte*.

4. Die Fundamentalmenge stellt gewisse Bedingungen für homaloidsches System auf:

a) Für die Kurven von der Ordnung n bestimmt sie soviel unabhängige Bedingungen, daß nur *zwei* frei bleiben; diese Zahl heißt *Postulationszahl* (Postulation) der Fundamentalmenge; Bezeichnung: P;

$$P = \frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 \ .$$

b) Sie nimmt von der Anzahl der Schnittpunkte von zwei Kurven n-ter Ordnung die Zahl $n^2 - 1$ ab; diese Zahl heißt *Äquivalenzzahl* (Äquivalenz); Bezeichnung: E;

$$E = n^2 - 1 \ .$$

c) Jedes Element des homaloidschen Systems ist punktweise (mit endlich vielen Ausnahmen) äquivalent zu einer Geraden. Daher ist es *rational* und besitzt das *Geschlecht* 0. Die Reduktion des Geschlechtes ist durch die Fundamentalpunkte gesichert. Diese Zahl heißt *Reduktionszahl des Geschlechtes* (kurz: Reduktion des Geschlechtes); Bezeichung: R;

$$R = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

(= das höchste mögliche Geschlecht der Kurve von der Ordnung n).

Zu a, Jeder i-fache Punkt stellt für die Bestimmung einer Kurve n-ter Ordnung

$$\frac{i(i+1)}{2}$$

unabhängige Bedingungen dar.

Ist die Anzahl der i-fachen Punkte ($i = 1, 2, \dots$) in der Basis gleich σ_i, so gilt

$$P = \sum_i \sigma_i \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 \ . \tag{3.1}$$

Zu b, Ein i-facher Punkt der Basis ist i-facher auf beiden sich schneidenden Homaloiden, also die Schnittmultiplizität von Homaloiden in diesem Punkt ist gleich i^2. Ist die Anzahl der i-fachen Punkte in der Basis σ_i, so ist

$$E = \sum_i \sigma_i i^2 = n^2 - 1 \ . \tag{3.2}$$

Zu c, Jeder i-facher Punkt der Kurve von der Ordnung n setzt vom Geschlecht die Zahl

$$\frac{i(i-1)}{2}$$

herab. Damit ist die Reduktion des Geschlechtes auf 0 durch die Summe

$$R = \sum_i \sigma_i \frac{i(i-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \tag{3.3}$$

realisiert.

Die Gleichheiten (3.1-3) sind sgn. *Gleichungen der Bedingungen.* Die Subtraktion der dritten von der ersten Gleichheit gibt

$\sum \sigma_i \cdot i = 3n - 3$; dazu kommt noch die zweite Gleichheit

$\sum \sigma_i \cdot i^2 = n^2 - 1$.

5. *Charakteristiken*

Die Zahlen n (Grad der Transformation), i (Vielfachheit des Fundamentalpunktes) und σ_i (die Anzahl der i-fachen Punkte in der Fundamentalmenge) charakterisieren die gegebene birationale Transformation. Diese Zahlen können auf verschiedene Weise geschrieben werden. Zum Beispiel:

$$n;\ \sigma_1^{i_1} \dots \sigma_\alpha^{i_\alpha} \dots \sigma_\beta^{i_\beta} \ ;$$

$$i_1 > \dots > i_\alpha > \dots > i_\beta \ .$$

Die Zahl $\sigma_\alpha^{i_\alpha}$ gibt an, daß die Anzahl der i-fachen Punkte in der Fundamentalmenge gleich σ_α ist.

Andere Form:

$$n;\ i_1,\ i_2, \dots, i_\sigma \ ;$$

$$i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_\sigma$$

in der Folge ist jeder Fundamentalpunkt angegeben; es können mehrere Fundamentalpunkte derselben Vielfachheit vorkommen.

$\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha$ bezeichnet die gesamte Anzahl der Fundamentalpunkte

Die angegebenen Zahlenfolgen heißen Charakteristiken der birationalen Transformation.

Geometrische Charakteristik entspricht einer reellen birationalen Transformation. Arithmetische Charakteristik gibt nur theoretisch potenzielle Verteilung der Vielfachheiten unter Fundamentalpunkten an.

Die Transformation mit einer gegebenen Charakteristik ist von $2\sigma+8$ Parametern abhängig:

2α Verhältnisse von Koordinaten für jeden Fundamentalpunkt

9 homogene Parameter für drei unabhängige Homaloide.

Für die Anzahl σ bzw. σ' der Transformation φ bzw. φ^{-1} gilt $\sigma = \sigma'$, aber die Charakteristiken müssen nicht übereinstimmen. Die Charakteristiken der Transformationen φ, φ^{-1} heißen konjugiert. Wenn sie übereinstimmen, spricht man über die selbstkonjugierte Charakteristik.

Wenn alle Fundamentalpunkte gleiche Multiplizität besitzen, heißt die Transformation symmetrisch; Bezeichnung: T_{sym}.

De JONQUIÈRsche Transformation besitzt die Charakteristik n; $1^{n-1}(2n-2)^1$; Bezeichnung: T_J.

Potenzielle Zahlen für die Anzahl der Fundamentalpunkte, die Vielfachheiten dieser Punkte für den gegebenen Grad m stellten ein besonderes Interesse der klassischen Theorie von birationalen Transformationen dar. Für jede zulässige Zahl wurden alle möglichen Type gesucht und die Tabellen der vollständigen Klassifikation konstruiert.

6. NOETHER*sche Ungleichheit*

Jede birationale Transformation vom Grad ≥ 2 besitzt mindestens drei Fundamentalpunkte: wäre nämlich ihre Anzahl höchstens 2, würde dann $i_1 + i_2 \leq n$ für ihre Vielfachheiten i_1, i_2 und den Grad der Transformation gelten (diese Ungleichheit gilt allgemein). Es folgt daraus $3n-3 = i_1+i_2 \leq n$ und weiter $2n \leq 3$, was $n = 1$ nach sich zieht. Also für $n \geq 2$ gilt es $\sigma \geq 3$. Daraus folgt für die Vielfachheiten i_1, i_2, i_3 von drei Fundamentalpunkten

$$i_1 + i_2 + i_3 \geq n + 1 \quad \text{(NOETHERsche Ungleichheit).}$$

7. *Irreguläre Varietäten (Hauptvarietäten, Hauptsystem)*

In heutiger Terminologie sind das die Urbilder der Fundamentalpunkte.

Jeder Fundamentalpunkt liegt auf jedem Homaloid. Daraus folgt: Jedes sein Urbild muss auf einer Geraden liegen und alle Geraden sind durch diese Urbilder getroffen. Das heißt: Das Urbild eines Fundamentalpunktes muß eine Kurve sein.

Jedem i-fachen Fundamentalpunkt entspricht die Kurve, die eine dem Homaloid entsprechende Gerade i-mal schneidet; also ist diese irreguläre

Kurve von der Ordnung i. Die gesamte Ordnung von irregulären Kurven ist $\sum i = 3n - 3$.

Nach einigen Überlegungen erweist sich, daß die irregulären Varietäten durch das Annullieren von Jacobischen Determinanten definiert sind

$$J : J(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}(x) \right| = 0 ,$$

$$J' : J(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial X_j}(x') \right| = 0 .$$

8. CLEBSCH*er Satz*
Seien $i_1, \dots , i_r$ die Vielfachheiten der Fundamentalpunkte in P^2, $i'_1, \dots , i'_s$ die Vielfachheiten der Fundamentalpunkte in P'^2

Clebscher Satz: $r = s$ und $\{i_1, \dots , i_r\} = \{i'_1, \dots , i'_r\}$ (die Anordnung kann geändert sein).

9. NOETHER*scher Satz*
Jede birationale Transformation ist als ein *Produkt* einer endlichen Anzahl von *quadratischen* birationalen Transformationen darstellbar. Die Anzahl der quadratischen Transformationen h ist durch die Formel

$$h \leq \sum_{(\alpha)} (4\mu - 4) \leq 4n - 4$$

gegeben; 4μ ist die Anzahl von den de Jonquièrschen Transformationen von der Ordnung μ, die die Ordnung der Transformation T_{n-n} reduzieren.

4. Birationale Raumtransformationen

1. *Definition*
Eine rationale Abbildung

$$\varphi : P^3 \to P'^3$$

ist durch die Formeln

$x'_i = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, mit homogenen Polynomen φ_i gleichen Grades gegeben (Grad $n \geq 1$). Eine andere Darstellung

$x'_i = \xi_i(x)$ ist mit der gegebenen Abbildung äquivalent, wenn

$\varphi_i \xi_j - \varphi_j \xi_i = 0$ auf P^3 gilt.

Wenn es zur Abbildung φ eine umgekehrte Abbildung von der Gestalt

$x_i = \psi_i(x')$, $i = 0, 1, 2, 3$, mit homogenen Polynomen ψ_i gleichen Grades $m \geq 1$ gibt, so daß $\psi \cdot \varphi = 1_{P^3}$ und $\varphi \cdot \psi = 1_{P'^3}$ gilt, spricht man über eine birationale Transformation.

Für ein Urbild $x \in P^3$ des Punktes $(x') = (\varphi_0(x), \dots, \varphi_3(x))$ gelten die Gleichungen

$$x'_0\varphi_1(x) - x'_1\varphi_0(x) = 0\ ,\quad x'_0\varphi_2(x) - x'_2\varphi_0(x) = 0\ ,\quad x'_0\varphi_3(x) - x'_3\varphi_0(x) = 0$$

$$\text{unabhängige Gleichungen} \tag{4.1}$$

$$x'_1\varphi_2(x) - x'_2\varphi_1(x) = 0\ ,\quad x'_1\varphi_3(x) - x'_3\varphi_1(x) = 0\ ,\quad x'_2\varphi_3(x) - x'_3\varphi_2(x) = 0$$

$$\text{unabhängige Gleichungen} \tag{4.2}$$

Die Gleichungen (1) stellen drei Flächen von n-ter Ordnung dar, die 'im allgemeinen' nur einen *freien* gemeinsamen Punkt haben, der dem Punkt (x') (in der inversen Transformation) entspricht. Drei Flächen n-ter Ordnung haben 'allgemein' n^3 gemeinsame Punkte: zwei Flächen schneiden sich in einer Raumkurve von der Ordnung n^2 und diese Kurve schneidet die Fläche n-ter Ordnung in n^3 Punkten.

2. Die birationale Transformation ist bijektiv in *fast* allen Punkten des Raumes P^3 und des Raumes P'^3. Jeder Punkt in P'^3 kann beispielweise als ein Schnittpunkt von drei linear unabhängigen Ebenen

$$\sum_{i=0}^{3} a_i x'_i = 0\ ,\quad \sum_{i=0}^{3} b_i x'_i = 0\ ,\quad \sum_{i=0}^{3} c_i x'_i = 0$$

aufgefaßt werden. Diesen Ebenen entsprechen die *Homaloide*

$$\sum_{i=0}^{3} a_i \varphi_i = 0\ ,\qquad \text{usw.}$$

Es ist auf diese Weise wiederum bestätigt, daß drei linear unabhängige Flächen *fast* immer nur einen freien gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Dem System

$$\left\{ \sum_{i=0}^{3} a_i x'_i = 0 \,\middle|\, (a) \neq (0) \right\}$$

entspricht das System

$$\left\{ \sum_{i=0}^{3} a_i \varphi_i(x) = 0 \,\middle|\, (a) \neq (0) \right\}$$

von Flächen in P^3 (das homaloidsche System).

Eingenschaften:

(1) Es ist linear und dreiparametrig (ein Gewebe).
(2) Drei linear unabhängige Elemente des Systems haben '*in allgemeinen*' nur einen freien Schnittpunkt gemeinsam.
(3) Alle Elemente sind rational, d.h. mit endlich vielen Ausnahmen (Kurven und Punkten) stehen sie in einer $(1,1)$-deutigen Korrespondenz mit der Ebene.

3. *Postulation und Äquivalenz*

Gemeinsame Gebilde (Punkte und Kurven) aller Homaloide bilden eine *Basis* des Homaloidsystems. Da dieses System dreiparametrig ist, gibt es drei linear unabhängige Elemente dieses Systems. Einzelne Elemente des Systems sind durch die Angabe.

$$N = \binom{n+3}{3} - 1$$

einfachen Bestimmungsbedingungen gegeben. Daraus ergibt sich, daß die Anzahl der einfachen Bestimmungsbedingungen der Basis gleich

$$P = \binom{n+3}{3} - 4 \text{ ist } (\textit{Postulationszahl, Postulation}) .$$

Die Anzahl der gemeinsamen Schnittpunkte von drei beliebigen Homaloiden ist gleich

$$E = n^3 - 1 \ (\textit{Äquivalenzzahl, Äquivalenz}).$$

Es gibt kein Analog der Reduktion vom Geschlecht für Flächen.

4. *Fundamentale und irreguläre Varietäten*

Fundamentale Varietäten werden durch alle gemeinsamen Punkte und Kurven aller Homaloide gebildet. Sie sind durch den größten gemeinsamen Faktor aller Formen $\varphi = \sum_{i=0}^{3} c_i \varphi_i$ bestimmt.

Irreguläre Varietäten sind Urbilder von Fundamentalvarietäten. Sie sind durch die Gleichungen

$$J = \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_J}(x) \right| = 0 \quad \text{usw.}$$

angegeben.

5. *Wesentliche Unterschiede zwischen ebenen und räumlichen Transformationen*

1. Die Ordnungen der direkten und inversen Transformation können verschieden sein.
2. Es gibt kein Analog des Noetherschen Satzes über die Zerlegung der Transformation.
   Bemerkung: Im Rahmen der klassischen Theorie waren ganz seltene und schüchterne Versuche um die Ausarbeitung der allgemeinen Theorie von birationalen Transformationen in n-dimensionalen Räumen (für $n > 3$) unternommen. Es waren einzelne Type untersucht, die allgemeine Theorie ist jedoch nicht entstanden.

5. Idealtheoretische Periode

1. Einen bemerkenswerten Fortschritt zeichnete algebraische Geometrie auf der Basis der Geometrisierung von algebraischen Ergebnissen der Noetherschen Schule in der zweiten Hälfte der Zwanzigerjahren und in den Dreißigerjahren.
Neue Begriffe:

- der *allgemeine Punkt* einer irreduziblen algebraischen Varietät
- der *Koordinatenring* einer algebraischen Varietät (der Ring von Regulären Funktionen)
- der *Körper von rationalen Funktionen* einer irreduziblen Varietät (Funktionenkörper)

Der Begriff der rationalen Abbildung und der birationalen Transformation wird auf beliebige irreduzible Varietäten erweitert.

Seien X, Y irreduzible algebraische Varietäten. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt rational, wenn $\varphi(X)$ dicht in Y liegt (d.h. die Hülle $\overline{\varphi(X)}$ ist gleich Y) und die induzierte Abbildung $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ ein Monomorphismus ist.

Birationale Abbildung ist dann durch den Isomorphismus $k(X) \xrightarrow{\sim} k(Y)$ von Funktionenkörpern charakterisiert.

Die klassische birationale Transformation zwischen zwei projektiven Ebenen hat dann in der idealtheoretischen Sprechweise die folgende Gestalt (B. L. VAN DER WAERDEN):

$(1, \xi_1, \xi_2)$ ist der allgemeine Punkt der Ebene P^2; der Funktionenkörper (über dem Grundkörper k) hat die Gestalt

$$k(P^2) = k(1, \xi_1, \xi_2) \xrightarrow{\sim} k(\tau_0, 1, \tau_2) \xrightarrow{\sim} k(\sigma_0, \sigma_1, 1) \ .$$

(ξ_1, ξ_2 bzw. τ_0, τ_2 bzw. σ_0, σ_1 sind unabhängige Unbestimmten.) $(1, \eta_1', \eta_2')$ ist der allgemeine Punkt der Ebene P'^2

$$k(P'^2) = k(1, \eta_1', \eta_2') \ .$$

Transformationsgleichungen:
Direkte Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1' &= R_1(\xi_1, \xi_2) \\ \eta_2' &= R_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{rationale} \\ \text{Funktionen} \end{array}; \quad \text{daraus folgt}$$
$$k(1, \eta_1', \eta_2') \subset k(1, \xi_1, \xi_2) \ .$$

Inverse Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= S_1(\eta_1', \eta_2') \\ \xi_2 &= S_2(\eta_1', \eta_2') \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{rationale} \\ \text{Funktionen} \end{array}; \quad \text{daraus folgt}$$
$$k(1, \xi_1, \xi_2) \subset k(1, \eta_1', \eta_2')$$

und damit

$$k(1, \xi_1, \xi_2) = k(1, \eta_1', \eta_2') \ .$$

Das ist die erste einfache Charakterisierung der birationalen Transformationen der klassischen Gebilde.

Bei Ebenen (ebenso wie bei Räumen) ist die Anwendung der Funktionenkörper möglich, weil Ebenen natürlich irreduzibel sind.

Vollständige Klärung dieser Fragen und Beziehungen lieferte erst später die Theorie der quasiprojektiven Varietäten. Aber schon in dieser Etappe war die Erweiterung auf beliebige Dimension n möglich und aktuell und auf eine natürliche Weise war das möglich auch für *beliebige irreduzible Varietäten* (nicht nur Räume).

2. Einen interessanten und erfolgreichen, leider alleinstehenden Versuch, alle zersplitterten Teilergebnisse über birationale Transformationen in n-dimensionalem Raum auf einen einheitlichen Grund zusammenzuziehen, hat O. ZARISKI in der ersten Hälfte der Vierzigerjahren unternommen. Seine Hauptarbeitsmethode war die Anwendung der *Bewertungstheorie* an die algebraische Varietäten und ihre birationale Abbildungen.
Bewertung eines Körpers Σ in eine additive geordnete Gruppe Γ ist die Abbildung $v : \Sigma \to \Gamma$, die folgende Forderungen erfüllt:

(I) $v(\xi, \eta) = v(\xi) + v(\eta)$
(II) $v(\xi + \eta) \geq \min[v(\xi), v(\eta)]$
(III) Wenn Σ eine K-Erweiterung ist, gilt

$$\forall a \neq 0 \ , \quad a \in K : \ v(a) = 0 \ .$$

Bewertungsring: $\{\xi \in \Sigma \,|\, v(\xi) \geq 0\} = R$.

Bewertungsideal: $\{\xi \in \Sigma \,|\, v(\xi) > 0\} = p$ - ein maximales Ideal (Hauptideal im Fall der diskreten Bewertung).

Bewertungen im Funktionenkörper:

Sei $\Sigma = k(\eta_0, \dots, \eta_n)$ ein Funktionenkörper und v eine Bewertung von Σ, in welcher $v(\eta_k) \leq v(\eta_i)$ für alle $i \neq k$ gilt.

Die Menge $\{f \in k[\eta_0, \dots, \eta_n], \text{Grad}\ (f) = m \,|\, v(f(\eta)) > mv(\eta_k)\} = p$ ist ein Primideal.

Die Varietät $V(p)$ heißt *Zentrum der Bewertung*. Sie ist irreduzibel. *Dimension der Bewertung*: $\dim_k R/p$; für eine nichttriviale Bewertung gilt es $\dim_k R/p < \dim_k \Sigma$.

Umgekehrt: Für jede irreduzible Untervarietät gibt es eine Bewertung, so daß ihr Zentrum die gegebene Untervarietät ist.

Definition einer birationalen Korrespondenz zwischen Untervarietäten $W \subset V$ und $W' \subset V$ (für welche $k(V') \xrightarrow{\sim} k(V) \xrightarrow{\sim} \Sigma$) (Zariski):

$W \subset V$ und $W' \subset V'$ entsprechen sich in einer birationalen Korrespondenz T (Bezeichnung: $T(W) = W'$, $T^{-1}(W') = W$), wenn es eine Bewertung v von Σ gibt, so daß das Zentrum der v auf V die Untervarietät W und das Zentrum auf V' die Untervarietät W' ist. Bei $V = V'$ kann der Automorphismus $\tau : \Sigma \to \Sigma$ benutzt werden und es handelt sich in diesem Fall um eine birationale Transformation von V in sich.

Bei Zariski tritt die Korrespondenz zwischen Untervarietäten beliebiger zulässigen Dimension statt der Korrespondenz zwischen Punkten ein. Die entsprechende Untervarietäten können verschiedene Dimensionen besitzen.

In den späteren Fassungen der birationalen Transformationen ist diese Korrespondenz zwischen Varietäten mit Hilfe von Produktvarietäten und Graphen ausgedrückt.

$$
\begin{tikzcd}
 & V \times V' \arrow[dl, "epi"', "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
V & & V'
\end{tikzcd}
$$

$T \subset V \times V'$ definiert eine Korrespondenz

Für eine beliebige abgeschlossene Untermenge $A \subset V$ ist ihr Bild (eine entsprechende Untermenge) folgendermaßen definiert:

$$T(A) := p_2((A \times V') \cap T)$$

(im allgemeinen ist das keine Punktabbildung).

Birationale Transformation:

$$\begin{tikzcd} & T\subset V\times V' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ V & & V' \end{tikzcd}$$

$$p_1(T) = Vp_2\wedge(T) = V'$$

und wenn (x, y) ein allgemeiner Punkt von T ist, so ist (x) der allgemeine Punkt von V und (y) der allgemeine Punkt von V'.

Sei $T : V \to V'$ eine birationale Transformation, wobei V, V' lokale normal sind, d.h. sie sind normal auf jeder Untervarietät W, W'; das bedeutet, daß die lokalen Ringe $Q(W)$ bzw. $Q(W')$ in ihren Quotientenkörper ganz abgeschlossen sind. Eine Untervarietät $W \subset V$ heißt

- regulär
- irregulär
- fundamental

in der Korrespondenz T, falls eine Untervarietät $W' \subset V'$ existiert, so daß $T(W) = W'$ und

- $Q(W) = Q(W')$
- $Q(W) \supset Q(W')$
- $Q(W) \not\supseteq Q(W')$

Eigenschaften:

1. Die Dimension der Fundamentalvarietät ist $\leq \dim V - 2$.
2. Der Fundamentalvarietät entsprechen unendlich viele Varietäten.
3. *Zariski Main Theorem*: Sei $T : V \to V'$ eine birationale Korrespondenz, es gebe keine Fundamentalvarietäten auf V' und sei $W \subset V$ eine Fundamentalvarietät, so daß V lokale normal auf W ist. Dann gilt es für das totale Bild $T[W] : \dim T[W] > \dim W$.

Die Beziehungen in birationalen Transformationen sind durch das Einbeziehen der topologischen Methoden durchsichtiger geworden: Seien X, Y irreduzible quasiprojektive Varietäten. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt birationale Transformation (birationaler Isomorphismus), wenn es in X bzw. Y offene und dichte Untermengen $U \subset X$ bzw. $V \subset Y$ existieren, so daß U und V zueinander isomorph sind.

Die Abbildung f kann verschiedene Darstellungen $\varphi(f)$ besitzen. Zu jeder Darstellung gibt es ein Definitionsbereich $D(\varphi(f))$, der eine nicht leere offene Untermenge von X ist. Die Vereinigung

$$\mathrm{Def}\,(f) = \bigcup_{\varphi(f)} D(\varphi(f))$$

ist der vollständige Definitionsbereich der Abbildung f. Er ist die Vereinigung der regulären und irregulären Varietäten von X. Sein Komplement $X - \text{Def}\,(f)$ ist die Fundamentalvarietät von X.

Totales Bild:

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\varphi : U \to Y$ eine Darstellung dieser Abbildung. Sei $\Gamma_\varphi = \Gamma_0$ der Graph dieser Darstellung und sei $\Gamma = \overline{\Gamma}_0$ als Graph Γ_f der Abbildung f bezeichnet. Seien p_1 bzw. p_2 die Projektionen von Γ_f auf U bzw. Y. Dann ist es für eine beliebige abgeschlossene Menge $Z =\subseteq X$ das totale Bild

$$T[Z] := p_2(p_1^{-1}(Z)) .$$

Main Theorem (heute): Sei $T : X \to Y$ eine birationale Transformation und sei X normal. Ist P ein Fundamentalpunkt der Transformation, so ist das totale Bild zusammenhängend und besitzt eine Dimension ≥ 1.

6. Birationale Transformationen von Schemata

Seien X, Y zwei irreduzible Schemata (d.h. die unterliegenden topologischen Räume sind irreduzibel).

Sei $U \subset X$ eine offene und in X dichte Untermenge und $f : U \to Y$ ein Morphismus; ebenso sei $V \subset X$ eine offene und in X dichte Untermenge und $g : V \to Y$ ein Morphismus. Man sagt, daß $f \sim g$ (f ist äquivalent zu g (auf $U \cap V$)), wenn $f\big|_{U\cap V} = g\big|_{U\cap V}$ gilt. Diese Relation bestimmt eine Äquivalenzklasse. Diese Äquivalenzklasse heißt rationaler Morphismus des Schemas X in das Schema Y.

Weiter ist der Vorgang klar.

7. Anwendungen der birationalen Transformationen

1. *Klassische Anwendung: Auflösung der Singularitäten ebener Kurven*
Das Ziel dieses Verfahrens ist zu einer Kurve zu gelangen, auf welcher die Singularitäten normal sind, d.h. alle Tangenten in einem mehrfachen Punkt getrennt (einfach) sind.

2. *Aufblasung* (blowing up, σ-Prozeß)

Aufblasung des Raumes A^n im Punkt $0 = (0, \ldots, 0)$

1.

$$A^n \times P^{n-1}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A^n \;, \quad (y_1, \ldots, y_n) \in P^{n-1}$$

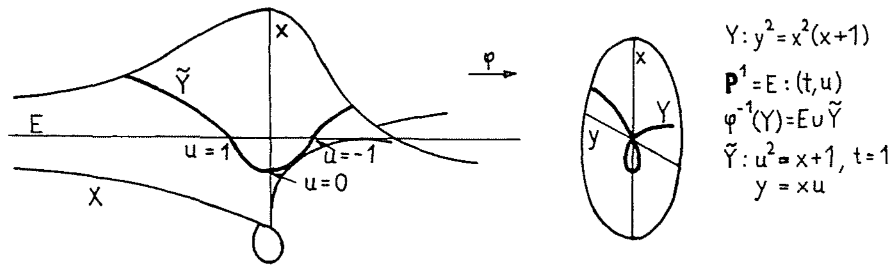

Fig. 1.

(nicht übliche Bezeichung)

2. Die Aufblasung des Raumes A^n im Punkt 0 ist eine abgeschlossene Menge $X \subset A^n \times P^{n-1}$, die folgendermaßen definiert ist:

$$X : x_i y_j - x_j y_i = 0 \; ; \quad i, j = 1, \dots , n$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & A^n \times p^{n-1} \arrow[d, "p_1"] \\ & A^n \end{tikzcd} \qquad \varphi = p_1 | X$$

a) $\varphi^{-1}(P) = P' \in X$ für $P \neq 0$
b) $\varphi^{-1}(0) = P^{n-1}$
In [5] wird eine 'Aufblasung längs einer Untervarietät' untersucht.

References

1. HUDSON, H. P.: Cremona Transformations, Cambridge 1927.
2. VAN DER WAERDEN, B. L.: Einführung in die algebraische Geometrie, Springer, Berlin 1939.
3. ZARISKI, O.: Foundations of General Theory of Algebraic Correspondences, *Trans. AMS* Vol. 53, (1943), p. 490.
4. HARTSHORNE, R.: Algebraic Geometry, Springer, New York, 1977.
5. HIRONAKA, H.: Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero, *Ann. of Math.* Vol. 79, (1964), I. pp. 109–203, II. pp. 205–326.