

FORMOPTIMIERUNG DREIDIMENSIONALER BAUTEILE MIT DER RANDELEMENTMETHODE¹

Gábor KÖRTÉLYESI* und Csilla ERDŐS-SÉLLEY**

Institut für Maschinenkonstruktionslehre, TUB
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3, Ungarn
Tel: (36 1) 463-1292
Fax: (36 1) 166-6083

* E-mail: gabor@biga.gee.bme.hu
gabor@imfsun1.mach.uni-karlsruhe.de

** E-mail: csilla@biga.gee.bme.hu
csilla@imfsun1.mach.uni-karlsruhe.de

Eingegangen am 20 Mai 1995

Abstract

In this paper we are dealing with the problem of shape optimisation of three dimensional machine parts with free surfaces. Briefly the optimisation methods are classified and for the further research the method of Sequential Quadratic Programming was chosen and more detailed described.

This paper concentrates to the evaluation of structural responses and their gradients with the Boundary Element method. Hereby there is necessary to use special numerical techniques for the direct evaluation of the present higher order singular integrals. In the following the numerical methods for sensitivity analysis are shown. More detailed the methods built in our optimisation program system are discussed.

In the end there are shown the optimum results of a simple testproblem getting with different sensitivity analysis.

Keywords: shape optimization, BEM, sensitivity analysis.

1. Einleitung

Der Fortschritt in der Fertigungstechnologie, in der Computertechnologie und in den numerischen Anwendungen haben den Weg in der letzten Zeit zur Entwicklung optimaler Bauteile eröffnet. Unser Ziel ist das Konzept eines Optimierungssystems unter Verwendung der Randelementmethode (BEM = Boundary Element Method) auszuarbeiten, das die Freiformflächenoptimierung räumlicher Bauteile ermöglicht.

¹Diese Arbeit ist in dem Rahmen der Zusammenarbeit mit dem Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre (IMF) Universität Karlsruhe unter der Führung Prof Dipl.-Ing. habil. Eckart Schnack entstanden. Die Autoren waren an dem IMF, Karlsruhe in dem Zeitraum 1991-1994 als wissenschaftliche Mitarbeiter tätig.

Erst wird die Optimierungsaufgabe formuliert, dann werden kurz die anwendbaren Optimierungsmethoden klassifiziert, wovon die geeignetste für die weiteren Untersuchungen ausgewählt wird.

Danach kommt die Modellierung der Aufgabe für die ausgewählte Optimierungsmethode an die Reihe. In dem nächsten Abschnitt wird die Strukturanalyse mit der Randelementmethode beschrieben. Danach werden die Methoden der Sensitivitätsanalyse, die im Mittelpunkt der Forschung steht, vorgestellt. Zuletzt werden die ersten Ergebnisse des Optimierungssystems mit zwei verschiedenen Sensitivitätsmethoden an dem Beispiel des Biegebalkens zusammengefaßt.

2. Problemformulierung

Viele Aufgabenstellungen des Ingenieurs können heutzutage als Optimierungsprobleme formuliert werden. Bei der Herstellung sind zahlreiche Bedingungen einzuhalten, gleichzeitig strebt man die bestmögliche Qualität und möglichst niedrige Produktionskosten an. Die Funktionsfähigkeit wird aus mechanischer Sicht beurteilt: Einbau, Festigkeit, Stabilität, dynamisches Verhalten und Sicherheit gegen Ermüdung müssen als Nebenbedingungen eingehalten werden. Vorausgesetzt, daß das Material und die Funktionsbedingungen schon festgelegt sind, bleibt ein Teil der Geometrie des Bauteils oder der Struktur variabel. Variiert man die Oberfläche des zu optimierenden Bauteils, spricht man von Formoptimierung.

Diese Arbeit konzentriert sich an der Minimierung des Volumens eines Bauteiles, während die Festigkeitsbedingungen der Struktur erfüllt bleiben. Die Untersuchungen beziehen sich für linear-elastische, homogene und isotrope Materialien im Bereich der kleinen Verformungen. Die meisten Materialien, die traditionell in der Konstruktion auftreten, erfüllen diese Bedingungen. Die Optimierungsaufgabe kann in der folgenden Form definiert werden (*Abb. 1*):

wobei

- Ω das betrachtete Gebiet,
- Γ_u : Teil des Randes, auf dem Verschiebungen vorgegeben sind,
- Γ_t : Teil des Randes, auf dem Spannungen vorgegeben sind,
- Γ_{design} : die zu variierende Oberfläche, mit p Designvariablen parametrisiert,
- Γ_{fix} : die unveränderte Oberfläche während der Optimierung,
- Ω^* : das Gebiet der möglichen geometrischen Variationen sind.

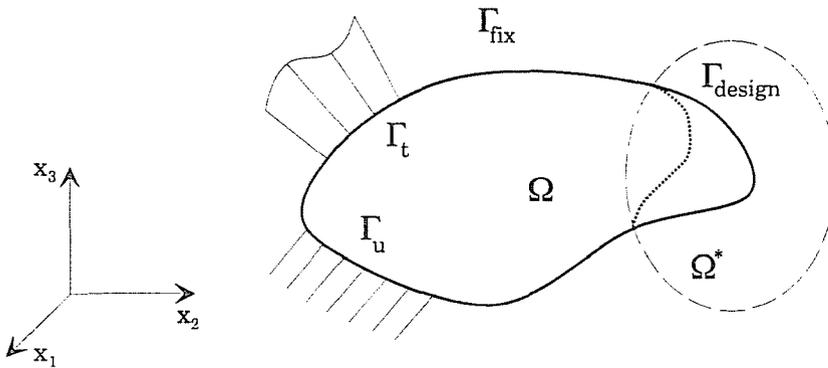


Abb. 1. Das Optimierungsproblem

3. Optimierungsalgorithmen

Von der Vielzahl der numerischen Verfahren zum Auffinden optimaler Geometrie lassen sich die meisten in zwei Klassen einordnen. Die erste umfaßt die Methoden, die ein parametrisiertes, mathematisch formuliertes Modell stellen, wovon durch strenge mathematische Methoden das Optimum angenähert wird. Die sind die Methoden der mathematischen Programmierung. Die anderen, die sogenannten Optimalitätskriterienmethoden nutzen spezielle physikalische Kenntnisse aus, um eine verbesserte Geometrie zu erhalten [1].

ARORA [2] und SCHITTKOWSKI [3] haben die Methode der mathematischen Programmierung getestet und nach ihren Vergleichsberechnungen ist das Verfahren SQP (Sequentielle Quadratische Programmierung) als allgemein verwendbar, zuverlässig und am effektivsten erwiesen, deswegen wird von uns für die weiteren Berechnungen das SQP Verfahren für die Formoptimierung NLPQL von SCHITTKOWSKI [4] eingesetzt. Diese Methode arbeitet mit primären (Designvariablen) und dualen Variablen (Lagrangesche Multiplikatoren). Es wird iterativ durch eine Reihe quadratischer Ersatzprobleme das Optimum angenähert, das mit der Erfüllung der Kuhn-Tucker Bedingung erreicht wird. Das quadratische Ersatzproblem wird aus den Strukturvariablen und deren Gradienten aufgebaut (die zweiten Ableitungen werden nach der BFGS-Formel angenähert [4]).

4. Modellierung

Die mathematische Formulierung der Optimierungsaufgabe sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{ll}
 w(\mathbf{p}) = \min & \text{Zielfunktion} \\
 g_i(\mathbf{p}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m & \text{Ungleichungsbedingungen} \\
 h_i(\mathbf{p}) = 0, \quad j = 1, \dots, k & \text{Gleichungsbedingungen} \\
 \underline{\mathbf{p}} \leq \mathbf{p} \leq \bar{\mathbf{p}}, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n & \text{Designvariablen.}
 \end{array}$$

Bei der Transformation eines allgemeinen Formoptimierungsproblems in eine restringierte Minimierungsaufgabe ist es zunächst erforderlich, ein geometrisches Designmodell zu erstellen. Dabei wird die unendliche Punktmenge des Designrandes Γ_{design} durch eine endliche Anzahl von Parametern dargestellt, die als Designvariablen (\mathbf{p}) bezeichnet werden. Die können auf vielerlei Art definiert werden: als Größe von Formen (Konen, Zylindern, Kugeln, usw.), die an der Geometrie anpassen, Knotenveränderung (wie in dieser Arbeit), Kontrollparametern von B-Spline Flächen, Polynomkoeffizienten, Parametern von Designelementen, usw.

Bei der Wahl der Anzahl der Designvariablen ergeben sich zwei Probleme. Einerseits soll die Oberfläche mit einer möglichst großen Freiheit gestaltet werden, um das Optimum genauer anzunähern. Andererseits wird die Zunahme der Anzahl der Designvariablen den numerischen Aufwand der Sensitivitätsanalyse erheblich vergrößern und die Konvergenzeigenschaften des Optimierungsverfahrens verderben. Ebenfalls ist einschneidend, daß das gewählte mechanische Modell den sich verändernden Bauteil in jedem Iterationsschritt genau genug analysiert. Im Falle einer großen Netzdeformation wird eine Neuvernetzung nötig sein.

Bei Gradientenverfahren sollen die Zielfunktion und Restriktionsfunktionen nach den Designvariablen differenzierbar sein. In diesem Artikel wird als Zielfunktion das Volumen, als Nebenbedingungen die Verschiebungen und Mises Vergleichsspannungen in den Kollokationsknoten genommen.

5. Strukturanalyse

Die Randelementmethode wurde in den 70-er Jahren als ein zur FEM alternatives numerisches Verfahren zur Lösung elliptischer Randwertaufgaben entwickelt [5, 6]. Mit einer Einzelkraftlösung an der Stelle \mathbf{y} (im weiteren als Quellpunkt) der zugehörigen Differentialgleichung im unendlichen Raum wird das Randwertproblem in eine Randintegralgleichung umformuliert [5]:

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})t_j d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})u_j d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (1)$$

wobei \mathbf{x} , \mathbf{y} die Koordinaten von Oberflächenpunkten, \mathbf{u} die Verschiebungen, \mathbf{t} die Randspannungen, U_{ij} , T_{ij} , die bekannten Fundamentallösungen, c_{ij} der integralfreie Term sind.

Nach einer Diskretisierung mit der Kollokationsmethode erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{t} , \quad (2)$$

das nach Umordnen der Unbekannten auf die linke Seite in dem folgenden Form gewinnt

$$\mathbf{E}\mathbf{z} = \mathbf{b} . \quad (3)$$

Die Strukturmatrix der *Gleichung* (3) ist unsymmetrisch und voll besetzt. Eine spezielle Eigenschaft der Randelementmethode ist, daß bei der numerischen Integration zur Matrixerstellung unterschiedlich singuläre Integralkerne auftreten [5, 7]. Nach der Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man die Randverschiebungen und Randspannungen. Innenpunkte und der gesamte Spannungstensor auf dem Rand können in nachgeschalteten Schritten ausgewertet werden. Die Verschiebungsgradienten an der Oberfläche, die zur Spannungsberechnung nötig sind, können durch die Differentiation des interpolierten Verschiebungsfeldes erhalten werden oder man berechnet sie mit analytischer Differentiation der Verschiebungsgleichung.

Die bei dem letzten Vorgehen auftretenden hochgradigen Singularitäten werden mit der Methode von GUIGGIANI behandelt [8–10].

Die Randelementmethode ist während der Formoptimierung vorteilhaft anzuwenden, da die Restriktionen meistens an der Oberfläche formuliert sind und in vielen Fällen liefert sie sogar auch mit einer größeren Vernetzung genauere Ergebnisse als die FEM.

In unseren Untersuchungen wird das Programm DBETSY angewandt [11] und in allen Beispielen werden quadratische Viereckselemente verwendet.

6. Sensitivitätsanalyse

Um die Sensitivitätswerte zu erhalten, bieten sich mehrere Methoden an:

- Methode der finiten Differenzen
- direkte implizite partielle Differentiation der grundlegenden Integralgleichungen nach der Designvariablen
- semianalytische Methoden aufbauend an der direkten partiellen Differentiation
- direkte Anwendung des Konzepts von materiellen Ableitungen

- adjungierte, variationelle Methode [12]
- Finite Differenz Belastungsmethode (Finite Difference Load Method) [12].

Die letzten zwei Methoden sind nur vollständigkeithalber erwähnt, nach unseren Untersuchungen haben sie sich nicht als vorteilhaft anwendbar mit dem Programm DBETSY erwiesen. Alle anderen Methoden sind in das Optimierungssystem 3DBESO eingebaut.

6.1 Methode der finiten Differenzen

Bei dieser Methode wird die Strukturanalyse bei kleiner Änderung des aktuellen Designparameters noch einmal durchgeführt, und die finite Differenz von den Lösungen gebildet:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} \approx \frac{\mathbf{u}(p + \Delta p) - \mathbf{u}(p)}{\Delta p} \quad (4)$$

Diese Methode wird oft zur Sensitivitätsanalyse angewandt, da es keine besondere Programmierarbeit oder theoretische Überlegung erfordert. Ihr Nachteil ist, daß ein großer Rechenaufwand auftritt, ohne den Fehler von der numerischen Differentiation ausgeschlossen zu haben. Die erhaltenen Sensitivitäten hängen von der Wahl der Schrittweite Δp ab.

1. Beispiel: Konvergenzuntersuchungen

Im folgenden wird es mit der Anwendung der finiten Differenzen untersucht, ob die Strukturgrößen und deren Sensitivitäten mit der Verfeinerung des Netzes zum einen Grenzwert halten. Das Beispiel ist die gelochte Streife, wovon erst HOWLAND analytische Ergebnisse veröffentlicht hat [13]. Die verschiedenen Netze werden in *Abb. 2* zusammengefaßt.

Die Designvariable ist die Variation der Kante in y Richtung bei $x = 0$, $y = R$ (wobei R der Radius des Loches ist).

Die Funktionswerte und deren Sensitivitäten an der mit \square bezeichneten Stelle bei dem Lochrand werden in der *Tabelle 1* zusammengefaßt:

Die Resultate zeigen, daß das Konvergenzverhalten von Spannungssensitivitäten am schlechtesten ist. Dieses Verhalten wird damit begründet, daß die Verschiebungsgradienten durch Differentiation des interpolierten Verschiebungsfeldes ermittelt werden und die Ableitung nach den Designvariablen durch den Differenzquotienten ersetzt wird. So sind im weiteren genauere Techniken bei der Bestimmung von Spannungen und deren Sensitivitäten an der Oberfläche anzuwenden.

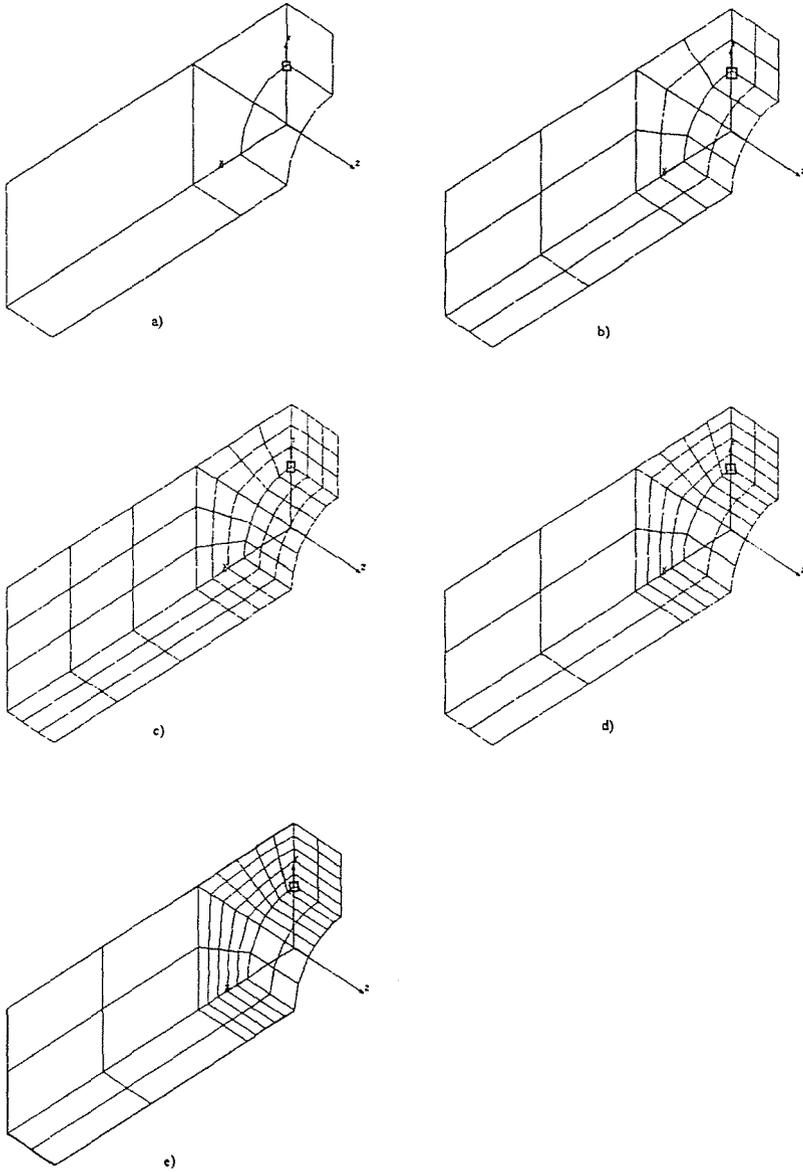


Abb. 2. Verschiedene Netze zur Konvergenzuntersuchung

Tabelle 1

| | Problem a | Problem b | Problem c | Problem d | Problem e |
|--|-----------|------------|------------|------------|-------------|
| Anzahl der Elemente | 14 | 56 | 126 | 104 | 134 |
| CPU-Zeit | 20.3 S | 1 Min 39 S | 9 Min 38 S | 5 Min 53 S | 11 Min 14 S |
| IBM3090 | | | | | |
| $u_z(10^{-5})$ | -2.0142 | -2.4024 | -2.4312 | -2.4369 | -2.4388 |
| σ_{xx} | 4.0851 | 4.4369 | 4.5023 | 4.5340 | 4.5512 |
| $\frac{\partial u_y}{\partial p}(10^{-3})$ | 0.1369 | 0.1870 | 0.1950 | 0.1980 | 0.1995 |
| $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial p}$ | 41.17 | 59.17 | 70.03 | 78.40 | 84.67 |

6.2 Direkte partielle Differentiation

Dieses Konzept wird erfolgreich in 2D und 3D Anwendungen benutzt. Die Randintegralgleichung in diskretisierter Form (2) wird direkt nach der aktuellen Designvariable abgeleitet:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \mathbf{u} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} \mathbf{t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial p} . \quad (5)$$

Die die gewünschten Verschiebungs- und Randspannungssensitivitäten beinhaltenden Terme lassen sich unter der Voraussetzung $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} \Big|_{\Gamma_u} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial p} \Big|_{\Gamma_t} = 0$ zusammenfassen

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial p} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} , \quad (6)$$

so bekommt man die Grundgleichung zur Verschiebungssensitivitätsanalyse

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial p} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p} \mathbf{t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p} \mathbf{u} , \quad (7)$$

wobei \mathbf{t} , \mathbf{u} und \mathbf{E} von der Strukturanalyse bekannt sind. Die Ermittlung von $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p}$ erfolgt durch die Anwendung der impliziten partiellen Differentiation [9]. Da ein Designparameter meistens nicht die ganze Geometrie beeinflusst, sondern einen kleinen Teilbereich, werden diese Matrizen dünn besetzt.

2. Beispiel: Sensitivitätsanalyse

Nehmen wir den festgespannten Biegebalken belastet an dem freien Ende, Länge 50, Größe in Querrichtung 10×10 (siehe Abb. 3). Die Designvariablen

beschreiben die Änderungen der Knotenkoordinaten in x_3 Richtung an den Stellen $(x_1, 10^*i, 0)$ $i = 1, \dots, 5$ während sich die Nachbarknoten halb so viel ändern (z.B. die erste Designvariable beeinflusst die in der *Abb. 3a* mit \circ bezeichneten Knoten). Die Nebenbedingungen sind an den in *Abb. 3b* bezeichneten Stellen auf Verschiebungen in x_3 Richtung formuliert. In der *Tabelle 2* sind die Sensitivitäten bezüglich der 1. Designvariable durch analytische und numerische Differentiation verglichen. Die Werte zeigen eine gute Übereinstimmung. In der *Tabelle 3* werden die von verschiedenen Berechnungen verbrauchten CPU-Zeiten zusammengefaßt. Daraus ist zu entnehmen, daß die Sensitivitätsanalyse durch analytische Differentiation mehr CPU-Zeit verbraucht als es zur numerischen Differentiation nötig ist. Falls man aber ausnutzt, daß die Designvariable nur auf einen kleinen Teilbereich auswirkt, wird die früher genannte Methode effektiver (4. Spalte in *Tabelle 3*).

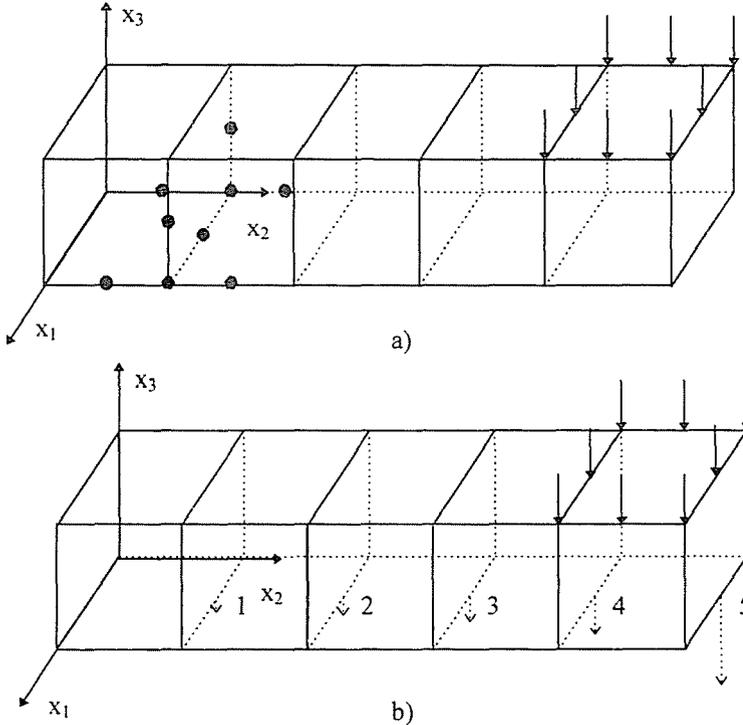


Abb. 3. Definition der Designvariablen und der Verschiebungsrestriktionen

Der Singularitätsgrad der Integralkerne, die während der Sensitivitätsanalyse auftreten, erhöht sich durch die Ableitung nach den Designvariablen

Tabelle 2

| Restriktionsnummer | Finite Differenzen | Analytisches Verfahren |
|--------------------|--------------------|------------------------|
| 1 | -0.0214747 | -0.0212952 |
| 2 | -0.0203274 | -0.0201396 |
| 3 | -0.0183431 | -0.0181600 |
| 4 | -0.0162205 | -0.0160520 |
| 5 | -0.0112961 | -0.0111571 |

Tabelle 3

| | Finite Diff. Eps=0.001 | Anal. Verfahren | Effektives anal. Verfahren | Struktur- analyse |
|----------|---------------------------|--------------------|-------------------------------|----------------------|
| CPU-Zeit | | | | |
| IBM3090 | 73.12 | 84.59 | 42.83 | 13.79 |

nicht. Die starksingulären Integrale lassen sich hier auch durch die Starrkörperbewegung eliminieren. So stehen die Verschiebungs- und Randspannungssensitivitäten zur Verfügung.

Um die Spannungssensitivitäten mit großer Genauigkeit zu berechnen, wird erst die Gleichung [9] direkt partiell nach den Designvariablen analytisch abgeleitet:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma-\Gamma_e} \left(\frac{\partial T_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial p} J^l(\xi) + \frac{\partial J^l(\xi)}{\partial p} T_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \Phi^m(\xi) d\xi [u_j^{ml} - u_j(\mathbf{y})] + \\
 & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma-\Gamma_e} T_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi^m(\xi) J^l(\xi) d\xi \left[\frac{\partial}{\partial p} u_j^{ml} - \frac{\partial}{\partial p} u_j(\mathbf{y}) \right] - \\
 & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma-\Gamma_e} \left(\frac{\partial U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial p} J^l(\xi) + \frac{\partial J^l(\xi)}{\partial p} U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \Phi^m(\xi) d\xi t_j^{ml} - \\
 & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \int_{\Gamma-\Gamma_e} U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi^m(\xi) J^l(\xi) d\xi \frac{\partial}{\partial p} t_j^{ml} = 0, \quad (8)
 \end{aligned}$$

wobei $J(\xi)$: der Jacobi Funktion der Transformation auf $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ lokalen Koordinaten ist, $\Phi(\xi)$: die Formfunktionen bezeichnet.

Also die Spannungssensitivitäten hängen von dem Integral der originalen und nach den Designvariablen abgeleiteten Fundamentallösungen, von den

Verschiebungen und Randspannungen, von deren Sensitivitäten und von dem Spannungstensor ab.

Um die Spannungssensitivitäten mit größerer Genauigkeit zu bekommen, muß man all diese Werte entsprechend mit größerer Genauigkeit berechnen, wobei das von uns aufgebaute numerische Integrationssystem eine große Bedeutung gewinnt.

Es ist zu erkennen, daß in der Gleichung (8) höchstens Cauchysche Singularitäten auftreten, die sich mit den im Kapitel 4 ausgeführten Vorgehen behandeln lassen. Nach Erkenntnis der Autoren wurde eine solche Sensitivitätsberechnung für allgemein formulierte Aufgaben noch nicht implementiert und auf ihre Effektivität während der Optimierung noch nicht getestet.

Die betrachtete Zielfunktion, das Volumen läßt sich leicht nach den Designvariablen mit demselben Vorgehen ableiten [9].

6.3 Semianalytische Methoden aufbauend auf der direkten partiellen Differentiation

Diese Methoden basieren auf der Anwendung von finiten Differenzen in verschiedener Stufe von direkter impliziter Differentiation der Grundgleichung. Die eine ist, wenn $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p}$ durch ihren Differenzquotienten ersetzt werden. Die andere ist, wenn die Elemente der $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p}$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial p}$ Matrizen analytisch nach der Designvariable abgeleitet werden, dann bekommen wir von $\frac{\partial r}{\partial p}$ abhängige Terme. Wenn $\frac{\partial r}{\partial p}$ durch finite Differenzen ersetzt wird, ist die Methode ohne Programmänderung für die Anwendung beliebiger Designvariablen geeignet.

6.4 Direkte Anwendung des Konzepts von materiellen Ableitungen

Es sei ein Gebiet Ω mit dem Rand Γ gegeben. Der Übergang von einem geometrischen Zustand zu einem anderen wird mit der Transformation \hat{T} durch den Parameter τ beschrieben:

$$x_\tau = \hat{T}(x, \tau), \quad (9)$$

$$\Omega_\tau = \hat{T}(\Omega, \tau). \quad (10)$$

$\hat{T}(x, \tau)$ wird um $\tau = 0$ in eine Reihe entwickelt:

$$\hat{T}(x, \tau) = \hat{T}(x, 0) + \tau \frac{\partial \hat{T}(x, 0)}{\partial \tau} + \dots \quad (11)$$

Wird τ als dimensionsloser Zeitparameter betrachtet, bedeutet $\partial\hat{T}/\partial\tau$ die Gestaltänderungsgeschwindigkeit und wird mit $v(x, \tau)$ bezeichnet.

Die Gestaltänderungsgeschwindigkeit kann auch durch das 'Bewegungsgesetz' des Punktes x_τ angegeben werden:

$$\frac{dx_\tau}{d\tau} = \dot{x}_\tau, \quad \dot{x}_\tau := \frac{\partial x_\tau}{\partial \tau} + \nabla_{x_\tau} v. \quad (12)$$

Die mit Punkt bezeichnete Operation nennt man als materielle Ableitung:

$$(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \tau} + \nabla(\bullet)v. \quad (13)$$

Die linearisierte Verbindung zwischen zwei geometrischen Zuständen eines Punktes beschreibt die folgende Gleichung:

$$x_\tau = x + \tau v(x). \quad (14)$$

Die Ausgangsgleichung sei die regularisierte Randintegralgleichung [14]:

$$\int_{\Gamma_\tau} [u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{y})] n_s(\mathbf{x}) \Sigma_{isk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_\tau} t_i(\mathbf{x}) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad (15)$$

wobei $n_s(\mathbf{x}) \Sigma_{isk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Kelvinschen Fundamentallösungen sind. Wird die Materialableitung von (15) gebildet, so folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\tau} [\dot{u}_i(\mathbf{x}) - \dot{u}_i(\mathbf{y})] n_s(\mathbf{x}) \Sigma_{isk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma_\tau} \dot{t}_i(\mathbf{x}) U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ & \int_{\Gamma_\tau} t_i(\mathbf{x}) \left\{ [v_r(\mathbf{x}) - v_r(\mathbf{y})] \frac{\partial U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_r} + U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) D_r v_r(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & \int_{\Gamma_\tau} [u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{y})] \left\{ D_{rs} v_r(\mathbf{x}) \Sigma_{isk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \right. \\ & \left. - [v_r(\mathbf{x}) - v_r(\mathbf{y})] n_s(\mathbf{x}) \frac{\partial \Sigma_{isk}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_r} \right\} d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (16) \end{aligned}$$

wobei v die Gestaltänderungsgeschwindigkeit ist, D_r und D_{rs} die folgenden Differentialoperatoren bezeichnen:

$$D_r = \frac{\partial}{\partial x_r} - n_r(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n}, \quad D_{rs} = n_r D_s - n_s D_r = n_r(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_s} - n_s(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_r}. \quad (17)$$

Die in der Gleichung (16) auftretenden Integralkerne sind schwach singulär und können mit der Standard Gauss-Quadratur integriert werden.

Demzufolge können die Verschiebungssensitivitäten in den folgenden Schritten bestimmt werden :

- Diskretisieren und Lösen des Ausgangsproblems (15), wodurch alle Randverschiebungen und Randspannungen bekannt werden.
- Diskretisieren von (16), so entsteht ein lineares Gleichungssystem für \dot{u} , \dot{t} . Um dieses zu lösen, müssen am Rand Γ_u und Γ_t \dot{u} , \dot{t} als Randbedingungen vorgegeben werden. Aus dem Vergleich (15) und (16) folgt, daß die Systemmatrix unverändert bleibt.
- Berechnung der rechten Seite. Hierzu müssen alle Randwerte bekannt sein. Diese stammen aus der vorherigen Strukturanalyse und können in die Formel eingesetzt und mit den abgeleiteten Strukturmatrizen multipliziert werden.
- Lösung des linearen Gleichungssystems. Die Lösung gibt die Verschiebungs- und Randspannungssensitivitäten in allen Kollokationsknoten an.

Um die Spannungssensitivitäten zu berechnen, wird die materielle Ableitung von der hypersingulären Gleichung für Verschiebungsgradienten [10] gebildet (unter der Voraussetzung $\dot{c}_{ikjh}(y) = 0$):

$$\begin{aligned}
 c_{ikjh} \dot{u}_{j,h} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S-\varepsilon} \left[u_j(x) \left[(V_l(x) - V_l(y)) n_s \frac{\partial^2 \Sigma_{isj}}{\partial x_k \partial x_l} + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. \left. + D_{sl} V_l \frac{\partial \Sigma_{isj}}{\partial x_k} \right] + n_s \frac{\partial \Sigma_{isj}}{\partial x_k} \dot{u}_j(x) - \right. \right. \\
 \left. \left. - t_j(x) \left[[V_l(x) - V_l(y)] \frac{\partial U_{ik,j}}{\partial x_l} + U_{ik,j} D_l V_l(x) \right] - U_{ik,j} \dot{t}_j(x) \right] d\Gamma_x + \right. \\
 \left. + \dot{u}_j(y) \frac{b_{ikj}(y)}{\varepsilon} + u_j(y) \frac{\dot{b}_{ikj}(y)}{\varepsilon} \right\} = 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

In dieser Gleichung befinden sich auch hypersinguläre Integralkerne, die sich mit der Methode von GUIGGIANI et al. [10] behandelt werden können.

7. Optimierung mit verschiedenen Sensitivitätsanalysen

Im folgenden wird das Problem des Biegebalkens (Abb. 9) untersucht. Die Änderung der Geometrie und die Restriktionen sind dieselben wie im Beispiel 2 (5 Designvariablen, 5 Verschiebungsrestriktionen, Abb. 9). In der

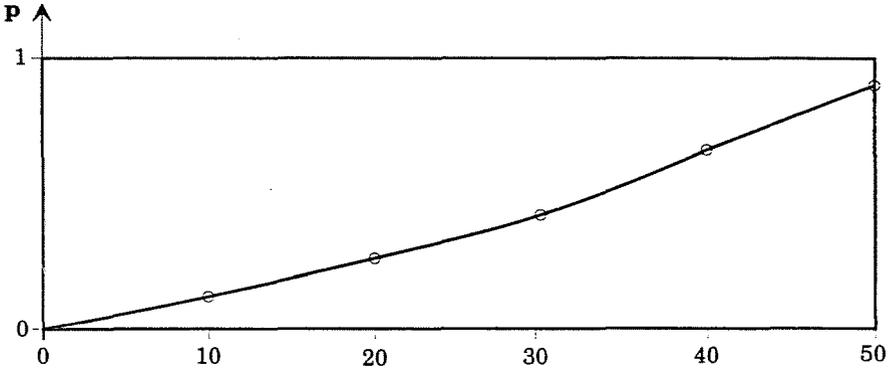


Abb. 4. Optimale Gestalt des Biegebalkens

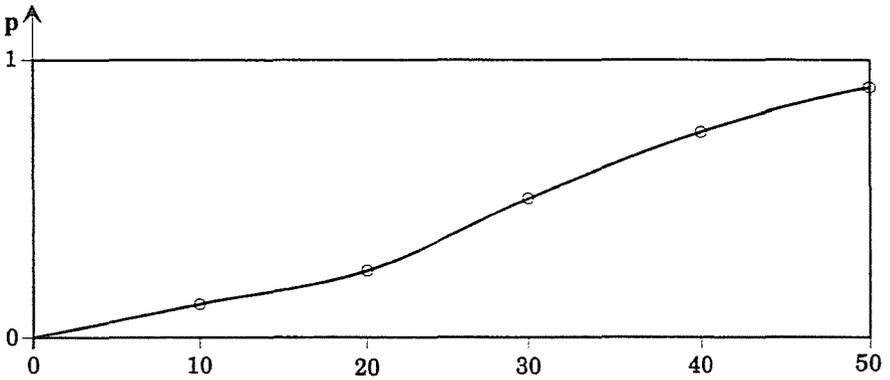


Abb. 5. Optimierte Gestalt mit numerischer Sensitivitätsanalyse

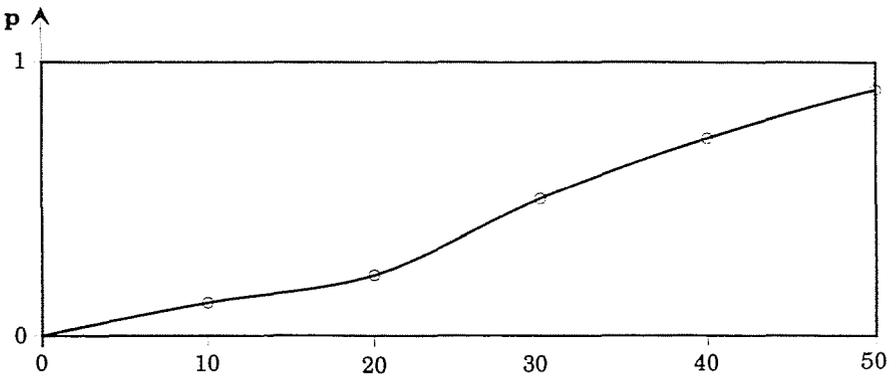


Abb. 6. Optimierte Gestalt mit semianalytischer Sensitivitätsanalyse

Abb. 4 wird die durch analytische Berechnung erhaltene erwartete Gestalt in Frontsicht gezeigt. Die Optimierung wird mit einer Sensitivitätsanalyse einerseits durch finite Differenzen (Abb. 5), andererseits mit direkter partieller Differentiation (Abb. 6) durchgeführt.

8. Zusammenfassung

In diesem Artikel wurden die Aufbauschritte und die Entwicklung eines Lösungskonzeptes gezeigt, um ein automatisches Optimierungssystem für dreidimensionale Körper freier Gestalt unter Verwendung der Randelementmethode zu verwirklichen. Das Ziel ist, den numerischen Fehler rein von der Feinheit der Geometriemodellierung abhängig lassen; nur so hat man Chance, größere Probleme erfolgreich zu lösen. Nach Analysieren der Fehlerquellen wurde festgestellt, daß ein hochgenaues numerisches Integrationssystem für die Auswertung unterschiedlich singulärer Integralkerne während der Sensitivitätsanalyse erforderlich ist. Die ersten Testergebnisse der verschiedenen Sensitivitätsberechnungen mit speziellen Integrationen während der Optimierung wurden in diesem Artikel vorgestellt. Das Ziel der weiteren Forschung ist, die Testphase zu beenden und Optimierungen von praxisrelevanten Aufgaben mit verschiedenen Sensitivitätsverfahren durchzuführen.

Danksagung

An dieser Stelle möchten sich die Autoren bei Prof. Eckart Schnack für die organisatorische und fachliche Betreuung, bei seiner Forschergruppe für das gute Arbeitsklima und die Hilfsbereitschaft und bei der DFG (Deutschen Forschungsgemeinschaft), der Daimler Benz AG und Ungarische Ministerium für Kultur- und Unterrichtswesen (Projektnummer 134/94) für die finanzielle Unterstützung des Projektes herzlich bedanken. Weiterhin sind wir unseren Kollegen und Leitern in dem Institut für Maschinenkonstruktionslehre dankbar, die unsere Tätigkeit in dem Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe ermöglicht haben.

Literatur

1. SCHNACK, E. (1979): An Optimization Procedure for Stress Concentrations by the Finite Element Technique. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, No. 1, pp. 115-124.
2. ARORA, J. S. (1989): Introduction to Optimum Design. McGraw-Hill Book Company.
3. SCHITTKOWSKI, K. (1992): Mathematische Grundlagen von Optimierungsverfahren. *Computer Aided Optimal Design of Structures, COMMET-Seminar, Thurnau*, Kap. 3.

4. SCHITTKOWSKI, K. (1985): NLPQL: A FORTRAN Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems. *Annals of Operation Research*, Vol. 5, pp. 485–500.
5. BREBBIA, C. A. – TELLES, J. C. F. – WROBEL, L. C. (1984): *Boundary Element Techniques. Theory and Application in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
6. VÁSÁRHELYINÉ, SZ. A. (1978): Treftz-módszer és véges elemes módszer összeépítése alapozási probléma megoldásánál. *Építés-építésztudomány*, X. kötet, 3–4. szám, 331–340.
7. LACHAT, J. C. – WATSON, J. O. (1976): Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation for Three-dimensional Elastostatics. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 10, pp. 991–1005.
8. GUIGGIANI, M. – GIGANTE, A. (1990): A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method. *Journal of Applied Mechanics*, December.
9. ERDŐS-SÉLLEY, Cs. – KÖRTÉLYESI, G. – MATHIAK, G. (1992): Dreidimensionale Formoptimierung mit Randelementmethoden. Institutsbericht, Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe.
10. GUIGGIANI, M. – KRISHNASAMY, G. – RIZZO, F. J. – RUDOLPHI, T. J.: Hypersingular Boundary Integral Equations: A New Approach to Their Numerical Treatment. in press.
11. Handbuch von DBETSY, Daimler-Benz, 1989.
12. ZHAO, Z. (1990): Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization Using the Boundary Element Method. Ph.D. Thesis, Wessex Institute of Technology, Southampton.
13. HOWLAND, R. C. J. (1930): On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension. *Phil. Trans. Roy. Soc., London A*, CCXXIX, pp. 49–86.
14. BONNET, M. (1989): Regular Boundary Integral Equations for Three-dimensional Finite or Infinite Bodies with and without Curved Cracks in Elastodynamics. In *Boundary Element Techniques: Application in Engineering*. Edited by C.A. Brebbia and N.G. Zamani. Computational Mechanics Publications (Southampton).