PERIODICA POLYTECHNICA SER. MECH. ENG. VOL. 36, NO. 3-4, PP. 219-225 (1992)

EINE TETRAEDER – DREIECK ZUORDNUNG IN DER ELEMENTARGEOMETRIE

I. REIMAN[1]

Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest

Eingegangen: November 16, 1992.

Abstract

Let us consider a tetrahedron $ABCD$ and assign to this the triangle $\mathbf{H}$ having sides $AB \cdot CD$, $BC \cdot AD$, $CA \cdot BD$. Investigating this assignment, we show the common root of some results in solid geometry. We give a simple proof for the von Staudt formula concerning the radius of the circumsphere of a tetrahedron. Furthermore, we present the solution of a solid geometric problem which is analogous to the Fagnano extremum problem in plane, namely, in a special case we construct that octahedron enclosed in a given tetrahedron where the sum of the edges is minimal.

Keywords: polyhedron, tetrahedron.

Wir werden die folgenden Bezeichnungen benutzen: Die Kanten des Tetraeders $ABCD$: $DA = a$, $DB = b$, $DC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$, $AB = c_1$; der Mittelpunkt, bzw. der Radius der Umkugel: O, bzw. R, der Rauminhalt des Tetraeders: V.

Es wird zum Tetraeder $ABCD$ das Dreieck $\mathbf{H}$ zugeordnet, dessen Seitenlängen aa_1, bb_1, cc_1 sind. Die Existenz solches Dreieckes ist aber gar nicht selbstverständig, darum geben wir für die Existenz einen konstruktiven Beweis.

Wählen wir ein beliebiges Seitendreieck des Tetraeders, z. B. das Dreieck ABC aus (*Abb. 1*). Die Eckpunkte A, B, C enthaltende beliebige Kugel (die nicht mit der Umkugel identisch ist) schneidet die Halbgeraden DA, DB, DC in den Punkten X, Y, Z. Jetzt werden wir beweisen, daß das Dreieck $\mathbf{H}$ und das Dreieck XYZ ähnlich sind.

Da das Viereck $ABYX$ ein Sehnenviereck ist, $DXY\angle = ABD\angle$ und darum sind die Dreiecke ABD und YXD ähnlich, es gilt also $\dfrac{XY}{c_1} = \dfrac{DY}{a}$, und daraus folgt:

$$XY = \frac{DY \cdot c_1}{a} = \frac{DY}{ac} cc_1. \qquad (1)$$

[1]Unterstützt von der Ungarischen Wiss. Forschungsstiftung (OTKA) No. 1615 (1991).

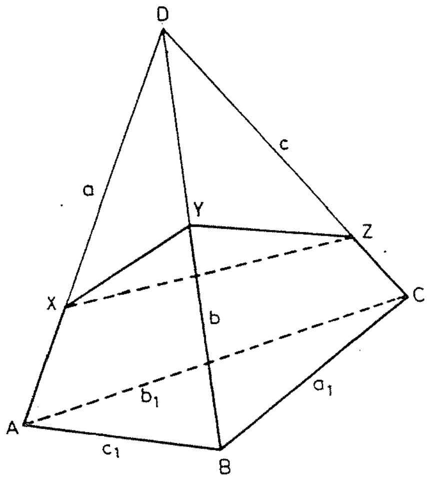

Abb. 1.

Auf ähnlicher Weise folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBD und YZD, daß

$$YZ = \frac{DY \cdot a_1}{c} = \frac{DY}{ac} a a_1, \tag{2}$$

das heißt:

$$XY : YZ = cc_1 : aa_1.$$

Dies bedeutet, daß das Verhältnis zweier beliebigen Seiten des Dreieckes XYZ und das Verhältnis der Produkte zweier gegenüberliegenden Kantenpaare des Tetraeders gleich sind, darum sind die Dreiecke XYZ und $\mathbf{H}$ ähnlich, woraus die Existenz des Dreieckes $\mathbf{H}$ folgt.

Nach unserem Beweis kann man also zu jedem Tetraeder auf dieser Weise eindeutig ein Dreieck $\mathbf{H}$ zuordnen und umgekehrt: für jedes Dreieck $\mathbf{H}$ existiert ein Tetraeder, zu welchem dieses Dreieck $\mathbf{H}$ zugeordnet ist. Es sei nämlich ABC ein beliebiges Dreieck mit $AB = c_1$, $BC = a_1$, $CA = b_1$ und D ein beliebiger Punkt der Gerade m, die den Mittelpunkt des Umkreises des Dreieckes ABC enthält und senkrecht auf der Ebene ABC steht. Die Kanten DA, DB, DC des Tetraeders $ABCD$ sind offenbar gleich, es sei ihre Kantenlänge e. Die Produkte der gegenüberliegenden Kanten sind a_1e, b_1e, c_1e. Das Tetraeder $ABCD$ kann in geeignetem Maße verkleinert oder vergrößert werden, daß diese Produkte a_1, b_1, c_1 seien.

Auf dieser Weise gehört zu jedem Dreieck eine nichtleere Menge der Tetraeder.

Wenn wir in den vorigen Überlegungen die Kugeln durch die Ecken A, B, C verändern, die so erhaltenen Dreiecke XYZ ähnlich sind, und sind auch ihre Ebenen parallel. Die Ebenen, die zu Ebenen der Dreiecke XYZ

parallel sind, werden als *Hauptschnittebenen* des Tetraeders bezeichnet. Zu jedem Ecke des Tetraeders gehört also eine Lage der Hauptschnittebene.

Die zum Ecke D des Tetraeders gehörige Hauptschnittebene steht senkrecht zum Radius OD der Umkugel.

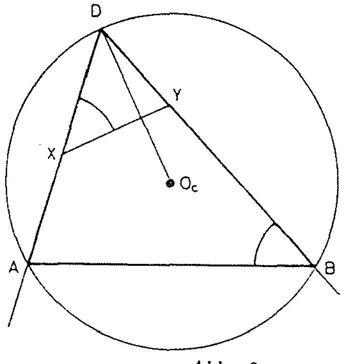

Abb. 2.

Betrachten wir nämlich z. B. das Seitendreieck ABD (*Abb. 2*), die Ebene des Dreieckes schneidet den Umkreis k des Dreieckes ABD aus der Umkugel aus, es sei der Kreismittelpunkt O_C. Die Strecke OO_C steht offenbar senkrecht zur Ebene ABD. Nach dem Peripherienwinkelsatz sind der Winkel der Tangente des Kreises k im Punkte D und der Seite AD, weiterhin der Winkel ABD gleich, darum sind die Tangente und die Gerade XY parallel, deshalb steht XY zum Umkreisradius O_CD senkrecht. Da XY auch zur Strecke OO_C senkrecht steht, steht die Gerade XY auf die Ebene ODO_C senkrecht, infolgedessen stehen auch die Geraden XY und OD senkrecht (*Abb. 3*). Auf ähnlicher Weise kann man beweisen, daß auch YZ zu OD senkrecht steht, woraus die senkrechte Lage der Hauptschnittebene XYZ und Radius OD folgt.

Aus den bisherigen Überlegungen kann man einige interessante Ergebnisse der elementaren Tetraedergeometrie leicht erhalten.

1. *Ist das Dreieck ABC gleichseitig und P ein beliebiger Punkt außer der Ebene des Dreieckes, so kann ein Dreieck aus den Strecken PA, PB, PC immer konstruiert werden.*

Wählen wir nämlich die Längeneinheit so, daß die Seiten des Dreieckes ABC gleich 1 seien, so sind die Produkte der gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders $PABC$ gleich PA, PB, PC und diese sind eben die Seiten des zum Tetraeder gehörigen Dreieckes $\mathbf{H}$.

(Man kann leicht beweisen, daß diese Eigenschaft nur die gleichseitigen Dreiecke besitzen.)

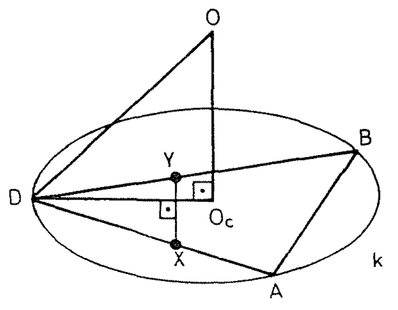

Abb. 3.

2. Ist das Tetraeder gleichflächig, d. h. sind die Seitendreiecke kongruent, so sind die gegenüberliegenden Kanten gleich: $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$. Es existiert also ein Dreieck **H**, dessen Seiten gleich a^2, b^2, c^2 sind. Nach der Dreiecksungleichung gilt es z. B. $a^2 + b^2 > c^2$, dies ist aber mit der Behauptung gleichwertig, daß das Seitendreieck spitzwinklig ist, *so sind* also *die Seitendreiecke des gleichflächigen Tetraeders notwendigerweise spitzwinklige Dreiecke.*

3. Mit Hilfe der Hauptschnittebenen können wir einen einfachen Beweis für *die Radienformel der Umkugel des Tetraeders* geben. Nach dieser Formel (sog. *von Staudt-Formel*)

$$R = \frac{T}{6V}$$

gilt, wo T der Flächeninhalt des Dreieckes **H** ist.

Es sei DP ein Diameter der Umkugel. Die Tangentialebene im Punkte P steht senkrecht auf dem Radius OD, infolgedessen ist eine Hauptschnittebene. Es seien die Schnittpunkte der Geraden DA, DB, DC mit der Tangentialebene X, Y und Z (*Abb. 4*). Da DP ein Kugeldiameter ist, sind DA und PA senkrechte Strecken und so ist PA eine Höhe des rechtwinkligen Dreieckes DPX. Nach dem Kathetensatz gilt: $a \cdot DX = 4R^2$ und ähnlicherweise: $b \cdot DY = 4R^2$, $c \cdot DZ = 4R^2$. Mit Benutzung von (1) und (2) bekommen wir aus diesen Formeln:

$$XY = \frac{DY}{ac} cc_1 = \frac{4R^2}{abc} cc_1, \qquad YZ = \frac{4R^2}{abc} aa_1,$$

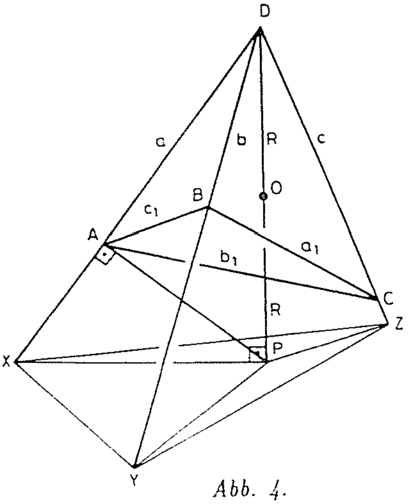

Abb. 4.

und auch

$$ZX = \frac{4R^2}{abc} bb_1.$$

Da der Flächeninhalt des Dreieckes XYZ

$$\left(\frac{4R^2}{abc}\right)^2 \cdot T$$

ist und die Höhe des Tetraeders $XYZD$ aus der Ecke D eben $2R$ ist, ist der Rauminhalt des Tetraeders $XYZD$ gleich

$$V_{XYZD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{16R^4}{a^2b^2c^2} \cdot 2RT = \frac{32R^5T}{3a^2b^2c^2}. \tag{3}$$

Anderseits gilt:

$$V_{XYZD} = \frac{DX \cdot DY \cdot DZ}{abc} V = \frac{64R^6V}{a^2b^2c^2},$$

$$V_{XYZD} = \frac{64R^6V}{a^2b^2c^2}. \tag{4}$$

Der Vergleich von (3) und (4) ergibt die Radienformel:

$$R = \frac{T}{6V}.$$

4. Ein berühmtes Extremalproblem der Planimetrie ist das Problem von I. F. Fagnano: *zu einem spitzwinkligen Dreieck ein Dreieck einschreiben, dessen Umfang minimal ist.* Eine stereometrische Analogie dieses Problems ist das Folgende:

auf jeder Kante des Tetraeders einen inneren Punkt so auswählen, daß die sechs Punkte die Ecken eines allgemeinen Oktaeders mit minimaler Kantensumme seien.

Es sei $ABCD$ ein orthozentrisches Tetraeder, dessen Seitendreiecke spitzwinklig sind. Besichtigen wir eine beliebige Kante, z. B. die Kante AB. Wie bekannt, in diesem Falle sind auf AB die Höhenfußpunkte der Dreiecke ABC und ABD identisch. Bezeichnen wir diesen gemeinsamen Fußpunkt mit P_{AB}. Auf ähnlicher Weise erhalten wir die Punkte P_{BC}, P_{CA} P_{AD}, P_{BD}, P_{CD} (*Abb. 5*).

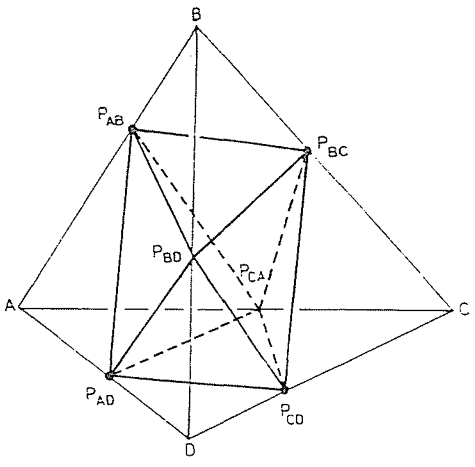

Abb. 5.

Die konvexe Hülle dieser sechs Punkte ist ein Oktaeder. Vier Seiten des Oktaeders sind Fußpunktdreiecke der Tetraederseiten. Es ist bekannt, daß die Umkreisradien, die zu den Ecken des Dreieckes gehören, stehen zu den Seiten des Fußpunktdreieckes senkrecht. Aus einer unserer vorigen Bemerkungen folgt darum, daß die Seitendreiecke des Oktaeders, die nicht auf Tetraederseiten liegen, senkrecht auf einer der Umkugelradien OA, OB, OC, OD stehen. Die vier Ebenen dieser Dreiecke sind also Hauptschnitte des Tetraeders und darum sind diese Dreiecke ähnlich.

Die Kantensumme des so konstruierten Oktaeders ist *minimal*; wenn es nämlich zu dem Tetraeder ein eingeschriebenes Oktaeder mit kleinerer Kantensumme existieren würde, so sollte ein eingeschriebenes Dreieck einer Tetraederseite kleineren Umfang besitzen, als der Umfang des Fußpunktdreieckes, das widerspricht aber dem Satzes von Fagnano.

Wir bemerken noch, daß die Geraden, die die gegenüberliegenden Ecken des Oktaeders verbinden, durch den Höhenschnittpunkt des Tetraeders gehen.

Addresse:

István REIMAN
Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest
H–1521 Budapest, Ungarn