PERIODICA POLYTECHNICA SER. MECH. ENG. VOL. 37, NO. 3-4, PP. 245-250 (1993)

ÜBER EINE ÜBERDECKUNGSKONSTRUKTION IN DER BOLYAI–LOBATSCHEWSKISCHEN EBENE

I. VERMES[1]

Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest

Eingegangen: am 16 November, 1992

Abstract

This paper gives a covering construction of the hyperbolic plane with such congruent hypercyclic domains in which the basic lines are neither parallel nor intersect. Moreover, there is such a point of the plane which is covered by infinitely many domains.

Keywords: convex sets, packing, covering, tiling, AMS (MOS) subject classification 52A45.

L. FEJES TÓTH beschäftigte sich in seinen Arbeiten [1], [2] und [3], [4] bzw. in seinem Buch [5] (S. 224–238) mit den Kreisausfüllungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung bzw. mit der dichtesten Horozyklenlagerung und mit der dünnsten Horozyklenüberdeckung der Bolyai–Lobatschewskischen Ebene. Auf Grund dieser Untersuchungen wurden die dichtesten Hyperzyklenlagerungen [7] und die dünnsten Hyperzyklenüberdeckungen [8], [9], [10] untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen, daß die dichtesten Ausfüllungen bzw. die dünnsten Überdeckungen in den Fällen der regelmäßigen Bereichsysteme zustandekommen. Im Falle der Überdeckungsuntersuchungen ist es im allgemeinen notwendig einige Voraussetzungen für die Bereiche zu stellen, damit die übertriebenen Häufungen der Bereiche ausschließbar seien. In [10] haben wir diejenigen Überdeckungen der Bolyai–Lobatschewskischen Ebene durch die kongruenten Hyperzyklenbereiche vom Abstand l untersucht, zu denen je eine Hyperzyklenausfüllung durch kongruente Exemplare der Bereiche vom Abstand $l-d$ existiert, falls man den zu den Hyperzyklenbereichen gehörenden Abstand l mit demselben Abstand d verkleinert ($l > d > 0$). Also die Existenz von einem solchen d ist als zusätzliche Geräumigkeitsbedingung angenommen. Diese Geräumigkeitsbedingung ist wirklich eine unentbehrliche Voraussetzung für die Überdeckungen, denn *solche Überdeckung kann gegeben werden, in der die Grundlinien der Hyperzyklen-*

[1]Unterstützt von der Ungarischen Wiss. Forschungsstiftung (OTKA) No. 1615 (1991).

bereiche paarweise je ein gemeinsames Lot haben, doch existiert mindestens ein Punkt in der Ebene, der im Inneren unendlich vieler Bereiche liegt.

Wir wollen eine Konstruktion solcher Überdeckungskonfiguration unten geben.

Betrachten wir zwei senkrechte Geraden mit dem Schnittpunkt C (*Abb. 1*). Nehmen wir jetzt solche kongruenten Hyperzyklenbereiche vom Abstand l, $l > \Delta\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gilt, wo $\Delta\left(\frac{\pi}{4}\right)$ zu $\frac{\pi}{4}$ als Parallelwinkel gehörende Lot bedeutet. Betrachten wir vier Hyperzykel vom Abstand l, durch den Punkt C, deren Grundlinien auf die winkelhalbierenden Geraden senkrecht stehen. (Die *Abb. 1* stellt nur diese Grundlinien dar: $a_1, a_2, \ldots$). Wir bemerken, daß die dieser Konfiguration entsprechenden Überdeckungen nach [8] und [9] auf der ganzen Ebene als reguläre Überdeckungen realisiert werden können. Im Weiteren gibt unsere Konstruktion sog. 'leere Halbebene', die durch die Grundlinien der Hyperzyklen begrenzt werden. In diese Halbebenen können solche reguläre Überdeckungen gelagert werden, und seien sie als $\mathcal{R}$-Überdeckungen genannt.

Betrachen wir die zwei benachbarten Grundlinien a_1 und a_2, und bezeichne m ihr gemeinsames Lot mit den entsprechenden Schnittpunkten A_1 und A_2. Nehmen wir die Punktfolge $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ auf m so, daß $A_2A_3 = \frac{1}{2}A_1A_2, A_3A_4 = \frac{1}{2}A_2A_3, \ldots, A_kA_{k+1} = \frac{1}{2}A_{k-1}A_k$ gelten, und im Falle $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ der Punkt A_{i+1} im Inneren der Strecke A_iA_{i+2} liegt. Diese Punktfolge hat einen Häufungspunkt S. Spiegeln wir die Punktfolge $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ an S, somit ergibt sich die Punktfolge $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$. Errichten wir je eine Senkrechte in diesen Punkten auf m, und bezeichnen die entsprechenden kleinen Buchstaben diese Geraden, ferner betrachte man die zu diesen Geraden gehörenden Hyperzyklenbereiche vom festen Abstand l (*Abb. 2*).

Im weiteren beschäftigen wir uns ausschließlich mit den zu $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ gehörenden Hyperzyklenbereichen, denn die zu $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ gehörige Konstruktion ergibt sich durch die Spiegelung an S. Wegen der symmetrischen Lage ist es genügend, nur die obere Hälfte bezüglich m der Konstruktion herzustellen.

In der Schicht zwischen den Halbgeraden a_1 und a_2 kann die Überdeckung nach der oben erwähnten regulären Überdeckung fortgesetzt werden, nämlich bezeichne $H_{1,2}$ den Schnittpunkt der Abstandslinien zu a_1 und a_2. Die aus $H_{1,2}$ auf a_1 und a_2 gefällten Lote und ihre Winkelhalbierenden bilden eine ebensolche Konfiguration, welche in der *Abb. 1* dargestellt ist, folglich kann die Überdeckung um den Punkt $H_{1,2}$ auf reguläre Weise verwirklicht werden. Die neuen und die ursprünglichen Hyperzyklen bilden ebensolche Konfigurationen, wie im Punkt $H_{1,2}$, folglich kann die Überdeckung auch hier regulär sein. Dieses Verfahren kann in

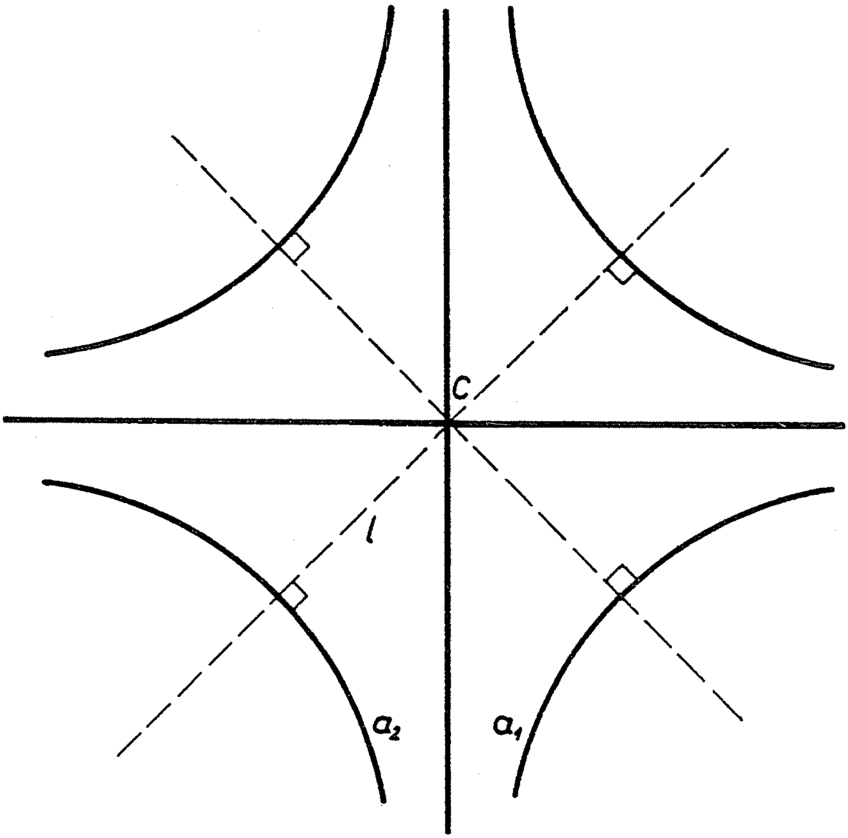

Abb. 1.

dieser Schicht unbegrenzt fortgesetzt werden, und zu jedem neuen Hyperzyklen gehört je eine leere Halbebene, die durch ihre Grundlinien begrenzt wird, ebenso, wie die Halbebene von a_1, die den Punkt S nicht enthält. In diesen leeren Halbebenen können die $\mathcal{R}$-Überdeckungen gelagert werden.

Jetzt soll man noch zeigen, daß die Überdeckung in den Schichten von $a_2a_3, a_3a_4, \dots, a_ka_{k+1}, \dots$ auch durch die Hyperzyklenbereiche vom Abstand l fortgesetzt werden kann. Diese Fortsetzung der Überdeckung geht auf ähnliche Weise, wie in der Schicht von a_1a_2, aber diese Überdeckungen geben nicht mehr reguläre Konfigurationen. Vor allem betrachen wir die zwei, nacheinander folgenden Schichten von $a_{i-1}a_i$ bzw. a_ia_{i+1} $(i = 2, 3, \dots)$ (*Abb. 3*). In diesen Schichten seien die Schnittpunkte der entsprechenden Hyperzyklen $H_{i-1,i}$ bzw. $H_{i,i+1}$. Fallen wir Lote durch diese Punkte auf die Grundlinie a_{i-1} bzw. a_i, ferner auf die Gerade m.

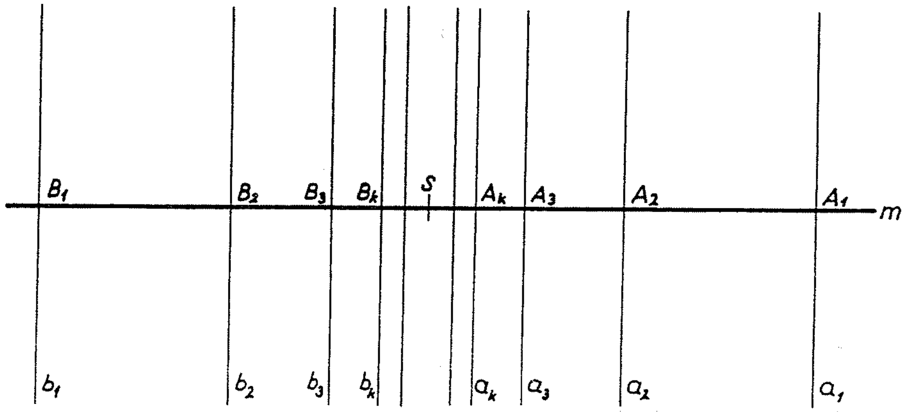

Abb. 2.

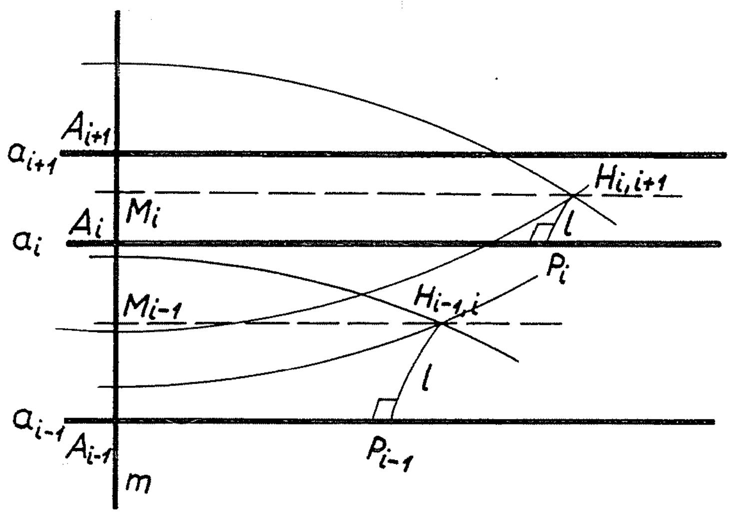

Abb. 3.

Bezeichne P_{i-1} bzw. P_i, ferner M_{i-1} bzw. M_i die entsprechenden Fußpunkte. In den zwei Lambertschen Vierecken $M_{i-1}H_{i-1,i}P_{i-1}A_i$ und $M_iH_{i,i+1}P_iA_i$ sind die Spitzwinkel $\sphericalangle\ M_{i-1}H_{i-1,i}P_{i-1} = \gamma_{i-1}$, bzw. $\sphericalangle\ M_iH_{i,i+1}P_i = \gamma_i$ und seien die Strecken $M_{i-1}A_{i-1} = m_{i-1}$, bzw. $M_iA_i = m_i$. Auf Grund der bekannten trigonometrischen Beziehungen (S. z. B. [6] S. 65–82 und 37–42) gelten mit $H_{i,i+1}P_i = H_{i-1,i}P_{i-1} = l$, wie folgt

$$\sin \gamma_{i-1} = \frac{\operatorname{ch} \frac{m_{i-1}}{\kappa}}{\operatorname{ch} \frac{l}{\kappa}} \quad \text{bzw.} \quad \sin \gamma_i = \frac{\operatorname{ch} \frac{m_i}{\kappa}}{\operatorname{ch} \frac{l}{\kappa}}.$$

Da $m_{i-1} > m_i$ ist, folglich besteht $\gamma_{i-1} > \gamma_i$. Übertragen wir die Winkel γ_{i-1} bzw. γ_i an die andere Seite von $H_{i-1,i}P_{i-1}$ bzw. $H_{i,i+1}P_i$ und spiegeln wir die erhaltenen Schenkel an die Geraden $H_{i-1,i}M_{i-1}$ bzw. $H_{i,i+1}M_i$, so ergeben sich je zwei Winkel, die durch je zwei Hyperzyklen überdeckt werden. In den Punkten $H_{i-1,i}$ bzw. $H_{i,i+1}$ bleiben die äußeren Winkel, die durch die Geraden $M_{i-1}H_{i-1,i}$ bzw. $M_iH_{i,i+1}$ in die Winkel $2\delta_{i-1}$ bzw. $2\delta_i$ halbiert werden (*Abb. 4*). Diese Winkel können durch die Hyperzyklen vom Abstand l so überdeckt werden, daß ihre Grundlinien und die Schenkel dieser Winkel je ein gemeinsames Lot haben. Die Winkelhalbierenden von $2\delta_{i-1}$ bzw. $2\delta_i$ stehen auf die entsprechenden Grundlinien senkrecht. Zum Beweis dieser Behauptung soll man noch nur bemerken, daß $\Delta(\delta_{i-1}) > \Delta(\delta_i)$ gilt, falls $\delta_{i-1} < \delta_i$ ist. Da man in der Schicht a_1a_2 eine reguläre Überdeckung konstruieren kann, folglich können die weiteren Schichten auf die oben erwähnte Weise überdeckt werden.

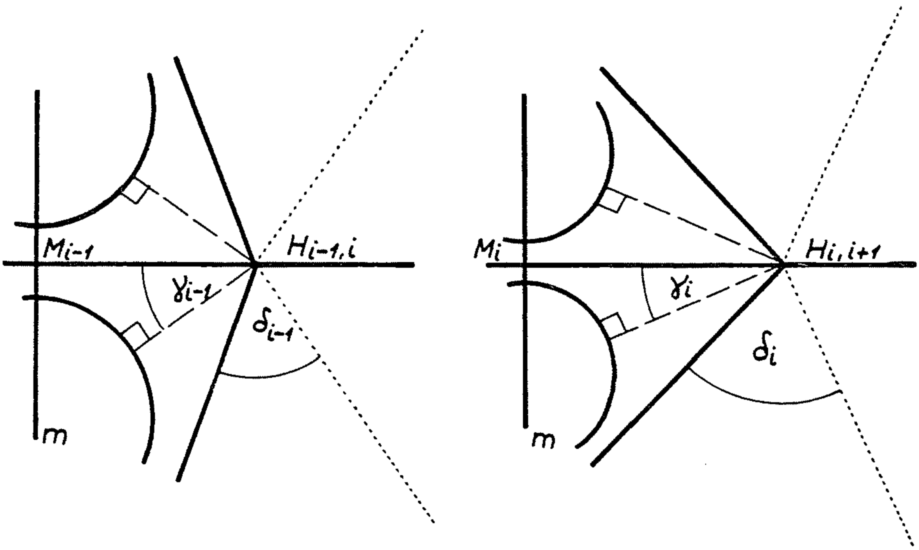

Abb. 4.

Man soll noch nachprüfen, ob die Überdeckungen in den weiteren Schichten fortgesetzt werden können. Die auf die Winkel von der Größe $2\delta_i$ gelegten neuen Hyperzyklen schneiden die Hyperzyklen, die zu den Grundlinien a_i bzw. a_{i+1} gehören. Auf Grund der Symmetrie können weitere Hyperzyklenbereiche auf die erhaltenen Schnittpunkte so gelegt werden, daß diese

Konfigurationen und die Konfiguration im Punkt $H_{i,i+1}$ kongruent sind, ferner haben die Grundlinien der Hyperzyklen paarweise je ein gemeinsames Lot. Falls sich je zwei Hyperzyklen schneiden, so schließen ihre Normalen die Winkel von der Größe entweder $\gamma_i + \delta_i$ oder $2\gamma_i$ oder $2\delta_i$ ein (*Abb. 4*), deswegen können die Überdeckungskonfigurationen in den neuen Schnittpunkten genauso angegeben werden , wie im Punkt $H_{i,i+1}$.

Damit haben wir die Behauptung über die Überdeckungskonstruktion vollständig bewiesen.

Literature

1. FEJES TÓTH, L.: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* Vol. 4, pp. 103–110. (1953). M. R. **15** - p.341.
2. FEJES TÓTH, L.: Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* Vol. 5, pp. 41–44. (1954). M. R. **16** - p.65.
3. FEJES TÓTH, L.: Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* Vol. 4, pp. 111–114. (1953). M. R. **15** - p.341.
4. FEJES TÓTH, L.: Über die dünnste Horozyklenüberdeckung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* Vol. 7, pp. 95–98. (1956). M. R. **18** - p.63.
5. FEJES TÓTH, L.: Reguläre Figuren, Akadémiai Kiadó, Budapest (1965). M. R. **30** # 3408.
6. LIEBMANN, H.: Nichteuklidische Geometrie, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin–Leipzig (1912).
7. VERMES, I.: Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzyklenbereiche, *Period. Math. Hung.* Vol. 10, pp. 217–229. (1979). M. R. **81**. c:52018.
8. VERMES, I.: Über reguläre Überdeckungen der Bolyai–Lobatschewskischen Ebene durch kongruente Hyperzyklenbereiche, *Period. Polytechnica Mech. Eng.* Vol. 25, pp. 249–261. (1981). M. R. **83**. c:52012.
9. VERMES, I.: A hiperbolikus sík szabályos lefedései egybevágó hiperciklustartományokkal (ungarisch) *Mat. Lapok* Vol. 32, pp. 97–105. (1981–1984). M. R. **88**. d:52016.
10. VERMES, I.: Bemerkungen zum Problem der dünnsten Überdeckungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzyklenbereiche, *Studia Sci. Math. Hungar.* Vol. 23, pp. 1–6. (1988). M. R. **89**. j:52015.

Addresse:

Imre VERMES
Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest
H–1521 Budapest, Ungarn