

OPTIMALE KUGELPACKUNGEN FÜR DIE RAUMGRUPPEN F23, P432 UND F432¹

J. SZIRMAI

Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest
H-1521 Budapest, Hungary

Eingegangen am 17. November, 1992

Abstract

In this paper the optimal ball-packing is determined where the centres of balls form an orbit (with trivial stabilizer) of a particular crystallographic space group. The space groups are **F23**, **P432**, **F432** which allow a unified method called the method of cones.

1. Einführung

Mit den Kristalluntersuchungen der Physik kam auch die Kristallgeometrie in den Vordergrund. Es wurde das Problem interessant für eine gegebene Raumgruppe die optimale Kugelpackung und deren Dichte zu bestimmen. Das ist in Verbindung mit dem Aufbau der einzelnen Kristalle.

Ein solcher Problemkreis entstand nach dem in 1943 publizierten Fachartikel von U. Sinogovitz. Er stellte das Programm diejenigen dichtesten Raumausfüllungen zu finden.

Die Arbeit untersucht für eine gegebene Raumgruppe die zugehörigen einfach transitiven Kugelpackungen, d. h. solche Kugelsysteme, deren Symmetriegruppe eine gegebene kristallographische Raumgruppe ist. Zu zwei beliebigen Kugeln der Packung gibt es also genau ein Element der gegebenen Raumgruppe, das die erste Kugel in die zweite überführt. Die hier untersuchten Raumgruppen seien **F23**, **P432**, **F432**. Die optimale Kugelpackung der Raumgruppe **F23** und ihre Dichte wird im Kapitel 3 festgestellt. Im Kapitel 4 werden die Raumgruppen **F432** und **P432** und ihre dichtesten Kugelpackungen dargestellt. Die optimalen Kugelpackungen werden hier einheitlich mit synthetischen Hilfsmitteln, mit der sogenannten "Kegelmethode" bestimmt.

Ähnliche Fragestellungen sind auch bei anderen Raumgruppen aktuell und bedeuten merkwürdige Aufgaben für die Anwendungen.

¹Unterstützt von der Ungarischen Wiss. Forschungstiftung (OTKA) No. 1615 (1991).

2. Grundbegriffe

1. Die Bewegungsgruppe, d. h. Isometriegruppe des euklidischen Raumes E^3 wird mit $IsomE^3$ bezeichnet.

Definition 1. Die Transformationsgruppe \mathbf{G} heißt eine diskrete Gruppe, wenn sich die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\mathbf{G} \subset IsomE^3$,
- Für beliebiges $X \in E^3$ ist die Bahn (Orbit) des Punktes X $X^{\mathbf{G}} := \{X^\alpha \in E^3 : \alpha \in \mathbf{G}\}$ eine diskrete Punktmenge im Raum E^3 (sie hat keinen Häufungspunkt).

Definition 2. Die geschlossene Punktmenge F_G wird ein Fundamentalbereich der diskreten Gruppe G genannt wenn die folgenden Bedingungen bestehen:

- Für jedes $P \in E^3$ gibt es einen Punkt $A \in F_G$, so daß $P \in A^G$.
- Wenn $A, B \in \text{Int } F_G$ innere Punkte und $B \in A^G$ sind, dann $A = B$.
- $\text{Int } F_G$ ist einfach zusammenhängend in E^3 .

Definition 3. Eine diskrete Gruppe heißt Kristallgruppe, wenn sie einen beschränkten Fundamentalbereich hat.

Definition 4. Zu $A \in E^3$ heißt $\mathbf{G}_A := \{\alpha \in G : A^\alpha = A\}$ die Stabilisatorgruppe von A in \mathbf{G} .

Weiterhin nehmen wir zu einer festen diskreten Gruppe solche Punkte $P \in E^3$ deren Stabilisatorgruppe aus der Identität besteht, d. h. $\mathbf{G}_P = 1$. Es seien G eine Kristallgruppe, $X, Y \in E^3$ und $\rho(X; Y)$ die Entfernungsfunktion in dem Raum E^3 .

Definition 5. Zu der Bahn X^G führen wir die Dirichlet - Voronoi Zelle mit Kernpunkt X ein, sie heißt kurz D - V Zelle:

$$D(X^G) := \{Y \in E^3 : \rho(X; Y) \leq \rho(Y; X^g) \text{ für jedes } g \in \mathbf{G}\}.$$

Wenn $\mathbf{G}_x = 1$, dann ist $D(X^G)$ im Raum E^3 ein zu \mathbf{G} gehöriger Fundamentalbereich. Im weiteren nehmen wir stets $\mathbf{G}_x = 1$ an.

Definition 6. In der Zelle $D(X^G)$ mit einem gegebenen Mittelpunkt X ist der maximale Kugelradius:

$$r(X) := \min_{g \in G \setminus \{I\}} \left\{ \frac{1}{2} \rho(X; X^g) \right\}.$$

Definition 7. Die Dichte einer zu X^G gehörigen Kugelpackung ist

$$\delta(X^G) := \frac{4r^3(X)\pi}{3\text{Vol}(D(X^G))}.$$

Wenn $Y \in X^G$ so gibt es ein $h \in \mathbf{G}$, mit $Y^h = X$. Dann ist $(D(Y^G))^h = D(X^G)$. Das gilt auch für die zu Zellen gehörigen Kugeln mit maximale Radius. Die Raumgruppe \mathbf{G} enthält die Symmetriegruppe des Punktsystems X^G , und so des entsprechenden Kugelsystems. Sie kann aber reicher sein: $\mathbf{G} \subseteq \text{Sym}(X^G)$.

Definition 8. Wenn $\mathbf{G} = \text{Sym}(X^G)$, so nennt man die Bahn X^G charakteristisch. Sonst ist die Bahn (Orbit) nicht-charakteristisch.

1. Die allgemeine Formulierung der Probleme

Zu einer gegebenen Gruppe \mathbf{G} suchen wir diejenige Bahn X^G , deren Kugelpackung eine maximale Dichte hat. Zu \mathbf{G} gehörige optimale Dichte wird mit

$$\delta(\mathbf{G}) := \max_{X; p(\mathbf{G})} (\delta(X^G)) \text{ definiert.}$$

Hier bezeichnet $p(\mathbf{G})$ in der Raumgruppe eventuell auftretende freie (affine) Parameter, bis auf eine Ähnlichkeitstransformation.

2. Allgemeine Bemerkungen

a. Die G -Bahnen können in Äquivalenzklassen eingeordnet werden $X^G \sim Y^G$ wenn es ein $h \in \text{Isom}E^3$ mit $(X^G)^h = Y^G$ gibt. Diese Isometrien h mit $(X^G)^h = (X^h)^G$ für jedes $X \in E^3$ bilden den metrischen Normalisator der Gruppe \mathbf{G} . In äquivalenter Form ist $N(\mathbf{G}) := \{h \in \text{Isom}E^3 : h^{-1}\mathbf{G}h = \mathbf{G}\}$. $F(N(\mathbf{G}))$ bezeichnet den Fundamentalbereich.

b. Wenn man die zur optimalen Kugelpackung gehörige Bahn bekommen möchte, ist es genug einen Punkt der Bahn in $F(N(\mathbf{G}))$ zu suchen: $\delta(\mathbf{G}) := \max_{X \in F(N(\mathbf{G})); p(\mathbf{G})} (\delta(X^G))$. Der Fundamentalbereich des metrischen Normalisator von \mathbf{G} kann auch von den Parametern der Kristallgruppe abhängig sein.

c. In vielen Fällen lohnt es sich den Fundamentalbereich des Normalisators auf gut gewählte kleinere Bereiche zu teilen.

d. Für die Fälle $\mathbf{G}_x \neq 1$ können wir den zur optimalen Kugelpackung gehörigen Punkt X an der Grenze von $F(N(\mathbf{G}))$ suchen, in einem null-, ein- oder zweidimensionalen Bereich.

e. Zur optimalen Bahn X_{opt}^G soll die Symmetriegruppe $\text{Sym}(X_{\text{opt}}^G) \supseteq \mathbf{G}$ sein. Besonders interessant sind diejenigen optimalen Bahnen X_{opt}^G , für die $\text{Sym}(X_{\text{opt}}^G) = \mathbf{G}$, d. h. die optimale Bahn charakteristisch ist. Wenn

nicht, so hat die optimale Kugelpackung eine reichere Symmetriegruppe als G . Dann behandeln wir diese Kugelpackung bei dieser reicheren Gruppe.

3. Optimale Kugelpackung zur Raumgruppe $F23$

1. Wir betrachten zunächst das Tetraeder in *Abb. 1*. Die Spiegelungen an den Seitenflächen dieses Tetraeders bilden die Raumgruppe $F\bar{4}3m$. Ihre Teilgruppe von Index 2, deren Elemente orientationserhaltende Bewegungen sind, wird als Raumgruppe $F23$ definiert.

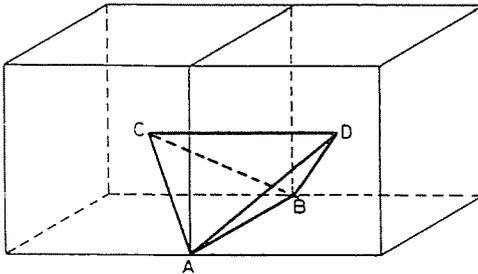


Abb. 1.

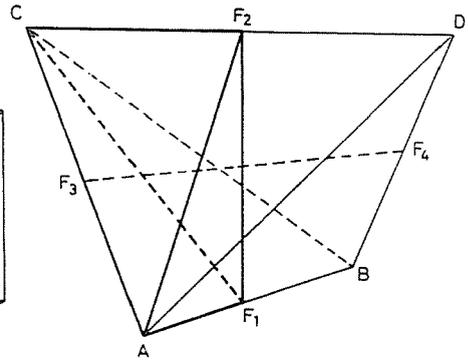


Abb. 2.

Die Kanten AB und CD sind 2-zählige Ächsen, die anderen Kanten bestimmen je eine 3-zählige Achse. Wir wählen einen beliebigen Punkt X von dem $ABCD$ Tetraeder und betrachten die $D - V$ Zelle dieses Punktes. Wir suchen die Zelle, in die man die Kugel mit dem größten Radius einschreiben kann.

Die Kantenlänge von $AB = CD$ sei zwei Einheiten. Wir führen die Halbierungspunkte der Kanten $F_1F_2F_3F_4$ nach der *Abb. 2*. ein. Das Tetraeder bildet sich bei den Halbdrehungen um die Ächsen F_1F_2 und F_3F_4 in sich ebenso wie bei den Ebenenspiegelungen CF_1D und AF_2B . So ist es genügend den optimalen Kugelmittelpunkt im Inneren des Tetraeders. AF_1F_2C bzw. auf der Oberfläche zu suchen.

2. Wir wählen die Ecke A und suchen den Kegel mit Spitze A und Achsenpunkt X der die A enthaltenden Seitenflächen der $D - V$ Zelle von X berührt und maximalen Spitzwinkel hat. Wir stellen das Tetraeder AF_1F_2C in ein Koordinatensystem. (*Abb. 5*). Im Tetraeder AF_1F_2C sei

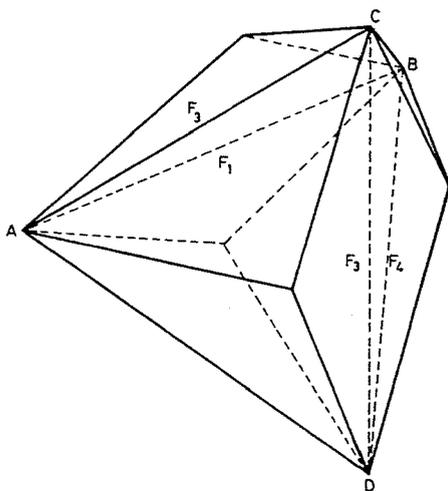


Abb. 3.

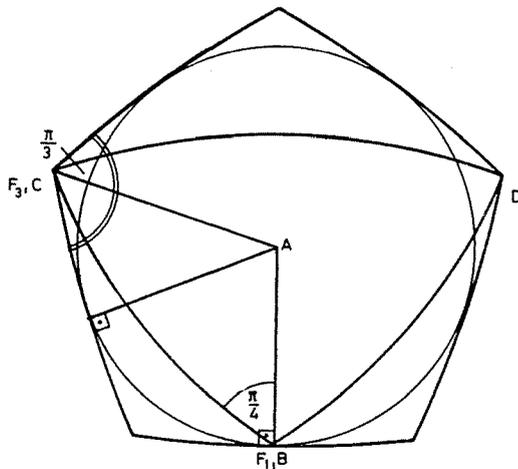


Abb. 4.

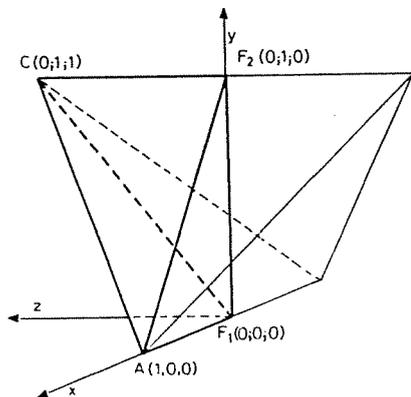


Abb. 5.

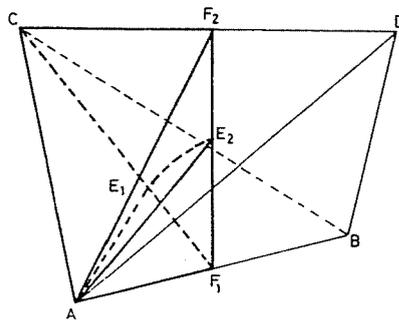


Abb. 6.

$X(a; b; c)$ ein Punkt. Wir rechnen die Entfernung des Punktes X von den Geraden AF_1 und CA .

$$d(O; AF_1) = \sqrt{c^2 + b^2}.$$

$$d(O; AC) = \sqrt{\frac{1}{9}[(2 - 2a - b - c)^2 + (c - 2b - a + 1)^2 + (b - 2c - a + 1)^2]}.$$

3. Wir suchen die Menge von den Punkten je dessen Entfernung von AB gleich mit der $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal genommenen Entfernung von AC : (Abb. 3.-4.)

$$\sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{9}[(2 - 2a - b - c)^2 + (c - 2b - a + 1)^2 + (b - 2c - a + 1)^2]}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 + 1 - 2a - b - c + ab + ac - bc = 0.$$

Bemerkung: Das ist die Gleichung für einen A -Spitzigen Kegel, weil mit dem Punkt $X(a; b; c)$ auch die Punkte $(1; 0; 0) + (x(a - 1); xb; xc)$ sie befriedigen.

Wir untersuchen die Stellung dieser Kegelfläche im Tetraeder AF_1F_2C . Der Kegel schneidet die Dreiecksfläche AF_1F_2 in der Strecke AE_2 . Die Gleichung von AE_2 in Ebene $Z = 0$ ist $y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + x \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Die Koordinaten von E_2 sind $E_2(0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 0)$. Der Schnittpunkt des F_1C mit dem Kegel ist der Punkt $E_1(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$. Die Kegelfläche ist im Tetraeder AF_1F_2C wie Abb. 6. zeigt.

4. Wir drehen das Kegelflächenstück AE_1E_2 um die Achse F_3F_4 um 180° : $A \rightarrow C, E_1 \rightarrow E'_1, E_2 \rightarrow E'_2$. (Abb. 7). Der Punkt O bezeichnet den Schnittpunkt der Strecke AE_2 und des Bogens $E'_1E'_2$.

SATZ. Der Punkt O liefert die $D - V$ Zelle und gleich den Kugelmittelpunkt, der zur optimalen Kugelpackung für die Raumgruppe $F23$ führt.

Wir berechnen den vermuteten optimalen Kugelradius. (Abb. 8). Der Punkt O liegt auf der Gerade AE_2 in gleicher Entfernung von den Kanten AB und CD . So haben wir zwei Gleichungen:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + x \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \sqrt{x^2 + (1 - y)^2} = y.$$

Daraus folgt $x^2 - (1 - \sqrt{5})x + 2 - \sqrt{5} = 0$. Für uns ist nur die positive Wurzel gut.

$$x = \frac{1 - \sqrt{5} + \sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} \Rightarrow R = y \approx 0.5141317.$$

Die Kugel mit dem Mittelpunkt O und mit diesem Radius berührt die an die Achsen AB und CD anschließenden Flächen der $D - V$ Zelle ferner die Flächen die bei den Achsen AD und AC je einen Winkel 120° einschließen.

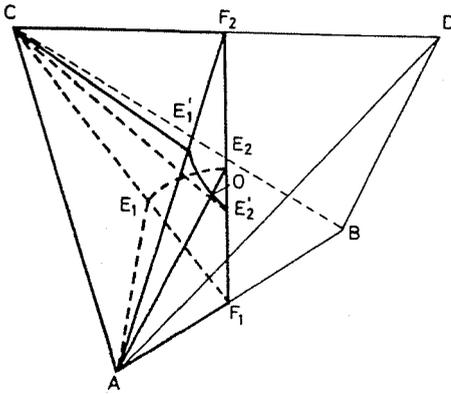


Abb. 7.

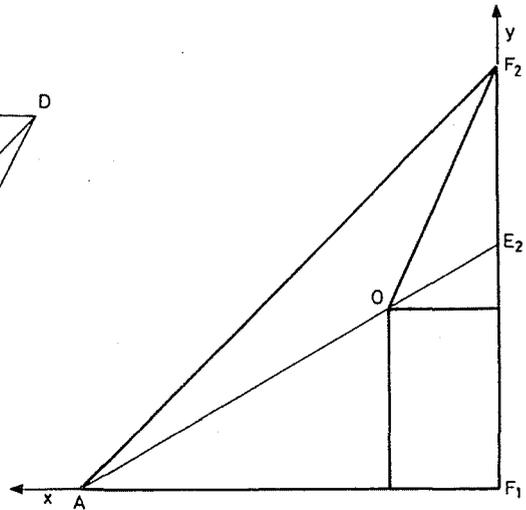


Abb. 8.

5. Wir beweisen den im Punkt 4 formulierten Satz. Wir wählen einen beliebigen Punkt Q des Tetraeders AF_1F_2C . Die Kugel k soll in der $D - V$ Zelle ihres Mittelpunktes Q einen maximalen Radius haben. Darum bewegen wir den Punkt Q als den Kernpunkt einer $D - V$ Zelle, sodaß die entsprechende Kugel k sich mit nicht abnehmendem Radius in die vermutete Kugel bewegt. Die Kegelflächen AE_1E_2 bzw. die $CE_1'E_2'$ teilen das Tetraeder AF_1F_2C in Bereiche. Im weiteren können die Bereiche durch ihre Eckpunkte gekennzeichnet werden. Wir führen den um die Achse F_3F_4 um 180° gedrehten Punkt O als Punkt O' ein. ($O' \in F_1CF_2$).

a. Der Punkt Q liege im Raumteil $AE_1E_2F_2C$.

Wir bewegen die Kugel k parallel in Richtung CA wo sie bis der Mittelpunkt Q auf die Kegelfläche AE_1E_2 oder auf die Fläche AE_2F_2 kommt (Abb. 9). Diese Bewegung kann man ohne Verminderung des Kugelradius machen, denn:

- i. Der Abstand des Punktes Q von der Kante CA verändert sich nicht.
- ii. Der Abstand von Q und der Kante CD nimmt zu.
- iii. Die Kante AB stört noch nicht, weil Q sich im Raumteil $AE_1E_2F_2C$ bewegt.

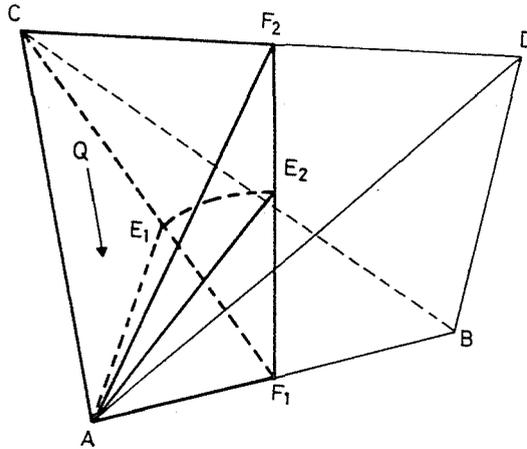


Abb. 9.

iii. Dasgleiche gilt für die weitere Kante, denn Q bewegt sich im Inneren des Raunteiles AF_1F_2C .

Der Mittelpunkt der Kugel k kommt so ohne Verminderung des Radius auf die Kegelfläche AE_1E_2 oder auf die Dreiecksebene AE_2F_2 .

b. Der Punkt Q sei im Raumteil $AF_1E_2OQ'E_1$.

Wir bewegen die Kugel k parallel in Richtung AC . So kommt der Punkt Q auf die Kegelflächen $AOO'E_1$ oder $OO'E_2$ oder auf die Ebene $E_1O'E_2F_1$. Diese Bewegungen sind alle zulässig, wie man das von der Stellung der Kugel sieht. (Abb. 10).

c. Der Punkt Q sei in dem Raumteil $OO'E_2E_2'$.

Wir bewegen den Punkt Q parallel mit der Achse F_3F_4 in einer Ebene, die senkrecht zu der Achse F_1F_2 ist. Dann nehmen die Abstände von den Kanten AB und CD zu, wie man das in der Abb. 11 sieht.

Die Bewegung dauert bis Q auf die Kegelflächen $OO'E_2$ oder $OO'E_2'$ kommt. So ist der Punkt Q an den Kegelflächen $CE_1'E_2'$, AE_1E_2 oder an den ebenen Gebieten $E_1O'E_2F_1$, AE_2F_2 angekommen. Die zwei Kegelflächen sind gleichwertig, darum untersuchen wir nur eine, genau so ist z.B. mit den Punkten der Dreieckfläche AF_1E_2 .

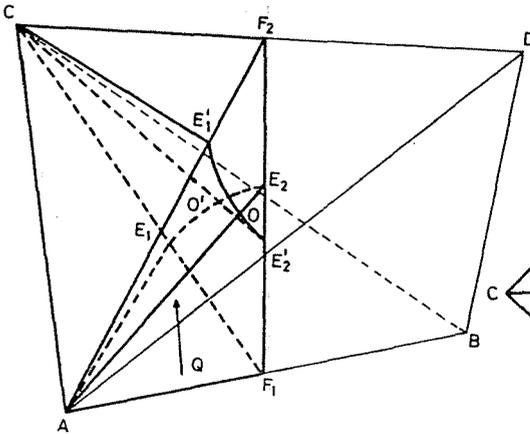


Abb. 10.

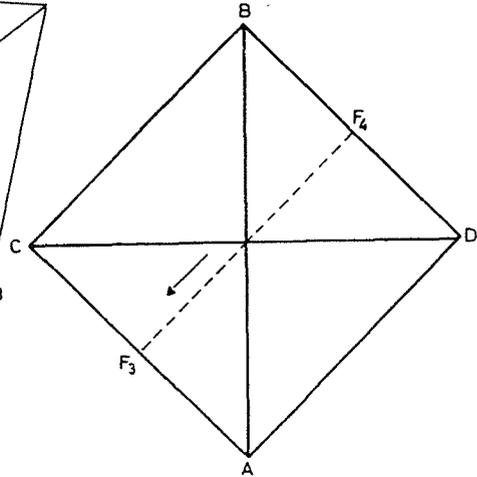


Abb. 11.

d. Der Punkt Q liege auf der Kegelfläche $AOO'E_1$.

Wir bewegen den Kugelmittelpunkt Q auf der Kegelfläche AE_1E_2 , so daß der Abstand von der Kante AB sich nicht verändert, so bleibt der Abstand von der Kante AC auch gleich. Diese Bewegung dauert an, bis der Punkt Q auf den Bogen OO' oder auf die Strecke AE_2 kommt.

e. Der Punkt Q liege auf der Kegelfläche $OO'E_2$.

Wir bewegen den Punkt Q auf der Kegelfläche mit gleichem Abstand von der Kante CD , bis der Punkt Q auf die Strecke AE_2 oder auf den Bogen OO' kommt. Das sind zulässige Bewegungen, denn

- i. der Abstand von der Kante CD ist konstant;
- ii. die Bewegung ist im Raumgebiet $E_1'E_2'CF_2$;
- iii. die Bewegung ist auf der Kegelfläche AE_1E_2 ;
- iiii. die weiteren Kanten beeinflussen die Bewegung nicht.

f. Der Punkt Q liege im Dreieck AF_1F_2 .

Die Kegel teilen das Dreieck auf Teilgebiete. Mit den durch die Pfeile gezeichneten Bewegungen (Abb. 12) in den Teilgebieten können wir den

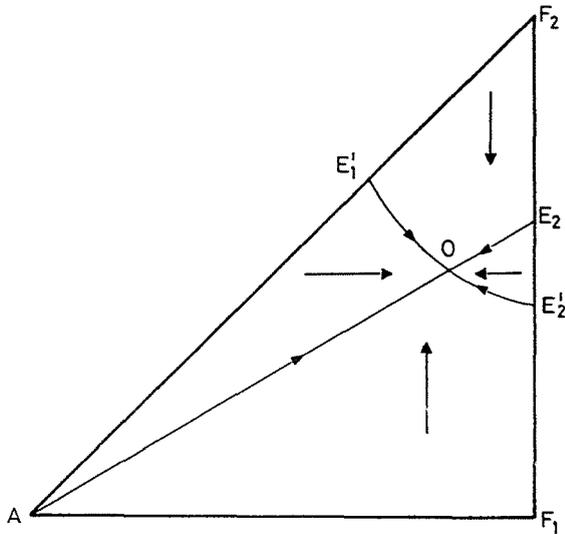


Abb. 12.

Punkt Q in den Punkt O bringen wie im Satz behauptet ist. Unter diesen Bewegungen hat sich der Radius der Kugel k nicht vermindert.

g. Der Punkt Q liege auf dem Bogen OO' .

In diesem Fall gibt es keinen günstigeren Kugelmittelpunkt als der im Satz behauptete Punkt O , denn der Bogen OO' liegt in dem Zylinder, der durch die Achse AC und den Radius R gegeben ist.

6. Wir haben eine beliebige Kugel mit dem Mittelpunkt Q ohne Radiusverminderung in die vermutete Kugel gebracht, und so haben wir den Satz bewiesen.

Die Dichte der optimalen Kugelpackung ist:

$$\delta(O) = \frac{4R^3\pi}{3\text{Vol}(D(O))} \approx 0.426946.$$

4. Optimale Kugelpackungen für die Raumgruppen P432 und F432

1. Optimale Kugelpackung zur Raumgruppe P432

Wir betrachten zunächst das Tetraeder in *Abb. 13*. Die Spiegelungen an den Seitenflächen dieses Tetraeders bilden die Raumgruppe **Pm3m**. Ihre Teilgruppe von Index 2, deren Elemente orientationserhaltende Bewegungen sind, wird als Raumgruppe **P432** definiert. Wir gehen ganz analog vor, wie im Kapitel 3 bei Raumgruppe **F23**. Wir stellen das Tetraeder $A_1A_2A_3A$ in ein Koordinatensystem. (*Abb. 14*).

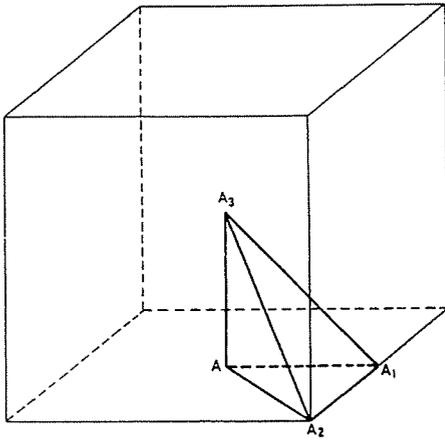


Abb. 13.

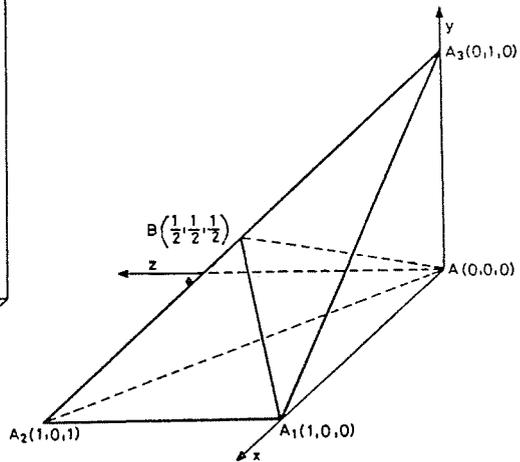


Abb. 14.

Der Punkt B bezeichnet den Halbpunkt der Strecke A_2A_3 . Die folgenden Kegelflächen teilen das Tetraeder AA_1A_3B in Bereiche.

$$y^2 + 1 - xz + zy + xy - x - 2y - z = 0, \quad (1)$$

$$z^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y = 0, \quad (2)$$

$$z^2 + xy + xz - zy - x + z = 0. \quad (3)$$

Die Kegelflächen (1), (2), (3) sind im Tetraeder AA_1A_3B nach *Abb. 15*. Alle drei Kegelflächen haben eine zur Spitze A_3 gehörige Gerade gemein. Mit

O bezeichnen wir den Punkt der Gerade, deren Entfernung von der Kante AA_2 gleich mit der $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -mal genommenen Entfernung von der Kante AA_3 ist.

Die Koordinaten des Punktes O :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{-v^2+1}{2v}t &\approx 0.3881024; & v &\approx 0.3829758 \\ y_0 &= vt + 1 &\approx 0.2861683; & t &\approx 0.2110071 \\ z_0 &= t &\approx 0.2110071. \end{aligned}$$

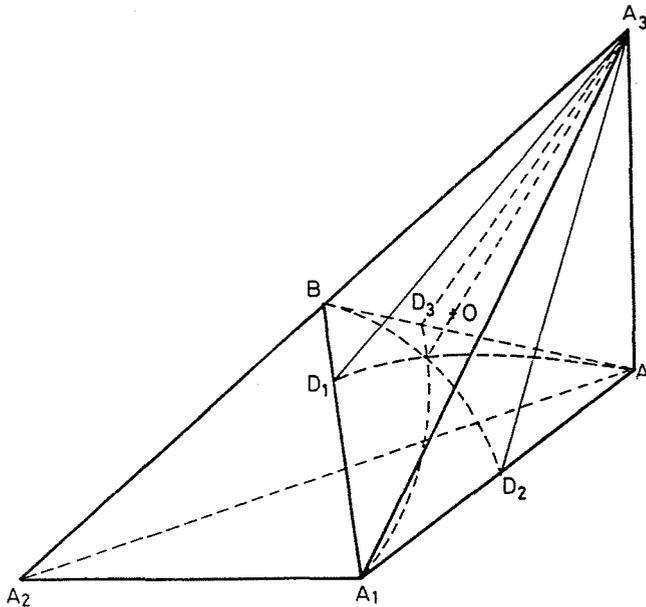


Abb. 15.

SATZ. Der Punkt O liefert die D - V Zelle und gleich den Kugelmittelpunkt, der zur optimalen Kugelpackung für die Raumgruppe $\mathbf{P432}$ führt.

Die Dichte der Kugelpackung ist:

$$\delta(O) = \frac{V_R}{\text{Vol}(D(O))} = 4R^3\pi = 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x_0^2 + z_0^2} \right)^3 \approx 0.3830091$$

Wir können den Satz ebenso beweisen wie wir das im Kapitel 3 gemacht haben.

2. Optimale Kugelpackung zur Raumgruppe **F432**

Wir betrachten zunächst das Tetraeder AF_1CD nach den *Abb. 1.* und *16.* Die Spiegelungen an der Seitenflächen dieses Tetraeder bilden die Raumgruppe **Fm3m**. Ihre Teilgruppe von Index 2, wird wie früher, als Raumgruppe **F432** definiert.

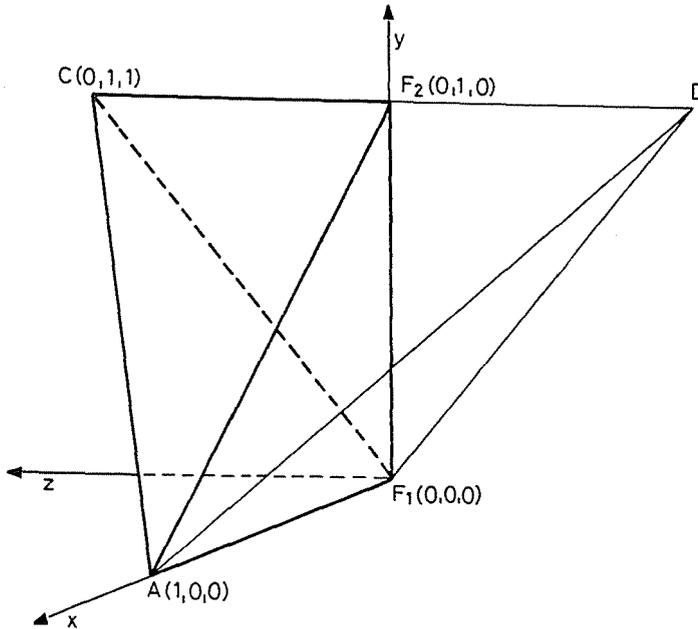


Abb. 16.

Die folgenden Flächen teilen das Tetraeder AF_1F_2C in Bereiche.

$$2x - y - z = 0 \quad (4)$$

$$z^2 - 2x + y - z + xy + xz - yz = 0 \quad (5)$$

$$1 - x^2 - 2x - y - z + xy + xz + yz = 0 \quad (6)$$

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 - 2x - y - z + xy + xz - zy = 0. \quad (7)$$

Die Positionen der Flächen sind im Tetraeder AF_1F_2C in *Abb. 17* dargestellt. Die mit Ebene $z = 0$ hergestellte Schnitte der Flächen (4), (5), (6), (7),

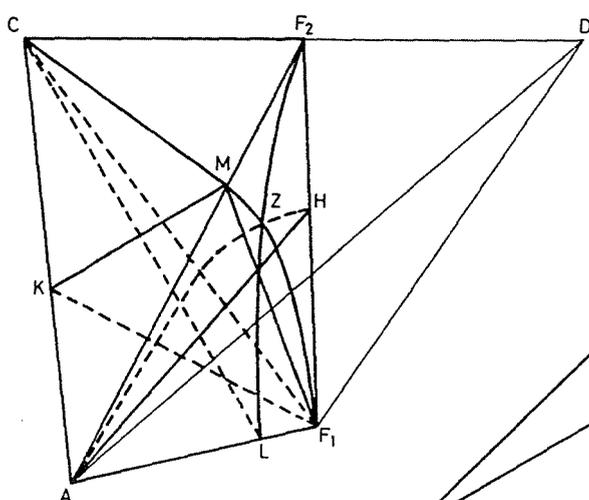


Abb. 17.

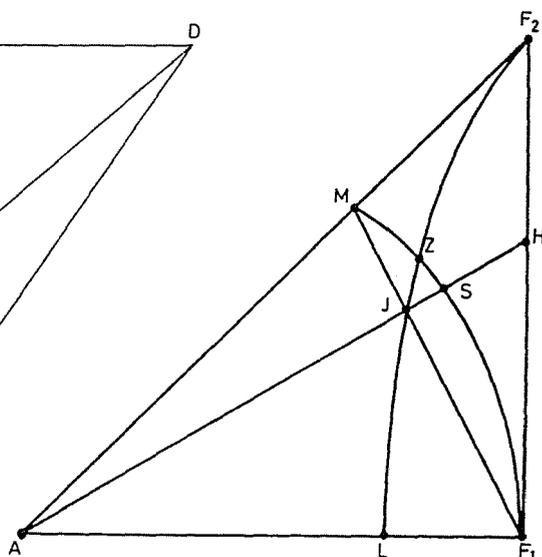


Abb. 18.

werden in *Abb. 18* gezeichnet. Der Punkt *Z* bezeichnet den Schnittpunkt des Bogens MF_1 und LF_2 .

SATZ. Der Punkt *Z* liefert die *D-V* Zelle und gleich den Kugelmittelpunkt, der zur optimalen Kugelpackung für die Raumgruppe **F432** führt.

Die Dichte der Kugelpackungen ist:

$$\delta(Z) = \frac{V_R}{\text{Vol}(D(Z))} = 2\pi R^3 \approx 0.5264921.$$

Wir können den Satz wie im Kapitel 3 mit unseren "Kegelsmethode" synthetisch beweisen.

BEMERKUNG: Die Bahn der Kugelmittelpunkte zur optimalen Packung ist charakteristisch für die Raumgruppe **P432**, also die optimale Kugelpackung selbst hat dieselbe Symmetriegruppe **P432**. Das ist nicht so für die Raumgruppe **F23** und **F432**, denn der optimale Mittelpunkt *O* (*Abb. 10*) liegt in der Symmetrieebene des Tetraeder *ABCD*; der optimale Mittelpunkt *Z* (*Abb. 17-18*) liegt in der Symmetrieebene von AF_1DC . Diese optimalen Kugelpackungen haben also reichere Symmetriegruppen, die aus der erzeugenden Raumgruppen durch Ebenenspiegelungen erweitert werden.

Literature

1. MOLNÁR, E. (1984): Konvexe Fundamentalpolyeder und D-V Zellen für 29 Raumgruppen, die Coxetersche Spiegelungsuntergruppen enthalten. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, Vol. 14, pp. 33–75.
2. SINOGOWITZ, U. (1943): Herleitung aller homogenen, nicht kubischen Kugelpackungen. *Z. Kristallographie*, Vol. 105, pp. 23–52.
3. International Tables for X-Ray Crystallography, Vol 1, N. F. M. Henry–K. Lonsdale, Symmetry Groups. Kynoch Press, Birmingham 1969. New edition by Theo Hahn, Vol. A., Reidel Co, Dordrecht 1983.

Adresse:

Jenő SZIRMAI
Lehrstuhl für Geometrie
Fakultät für Maschinenbau
Technische Universität Budapest
H-1521 Budapest, Ungarn