

# ПРЕДЕЛ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ ТОНКИХ ЛИСТОВЫХ ПОЛОС

К. Касап

Кафедра технической механики  
Будапештского Политехнического Университета

Поступило: 7 февраля 1989 г.

Представлено: проф. д.т.н. Д. Беда

## Abstract

Maximum load capacities of bars of different cross sections were observed to depend — in addition to material characteristics and cross-sectional dimensions — also on length.

Tests have been made on the variation of ultimate load capacity in plate specimens of rectangular cross section as a function of specimen length. Measurement results have been compared to results computed with published relationships.

In the actual case, test results showed fair agreement with those from the theory Goodier and Javorik for short specimens, and with Nádai's sand-heap analogy for long specimens.

При пластическом кручении коротких стержней некруглого сечения возникающее в стержне напряженное состояние весьма сложное, так как стесненная деформация поперечного сечения путем вычислений вызывает дополнительные усилия, за которыми трудно следить. Сложность напряженного состояния одновременно осложняет и определение несущей способности при кручении. Поэтому для последнего неизвестно точного метода вычисления по механике сплошных сред. Вместо такого метода существуют только теории, считаемые приближениями, на основе которых возможно вычислить несущую способность и применить существующие взаимоотношения за пределами их действия. Для проверки действительности этих теорий были проведены эксперименты.

При кручении стержней предел несущей способности, кроме материальных характеристик зависит и от размеров стержня, в том числе и от его длины. На основе экспериментов, путем измерений было рассмотрено изменение предела несущей способности при кручении образцов прямоугольного сечения из тонкого листа, в зависимости от длины образца. Результаты измерений были сравнены с результатами, вычисленными из зависимостей, опубликованных в спецлитературе.

В литературе одним из методов определения предела несущей способности является распространение каким-либо образом полученных для идеально

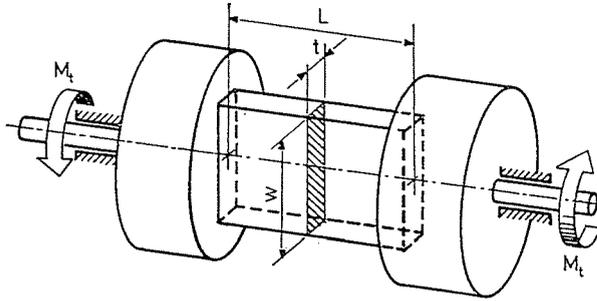


Рис. 1. Отношение размеров исследованной листовой полосы

упруго-пластической деформации решений до предела несущей способности, или до разрушения. В настоящей работе применяются теории Надаи [1], Гудьера [2]; и Яворика [3] для вычисления предела несущей способности.

Примененные в формулах обозначения приведены на рис. 1, где

$M_t$  — крутящий момент

$w$  — ширина образца

$t$  — толщина образца

$L$  — длина после кручения.

На основе аналогии с кучей песка по Надаи [1], пластическая несущая способность стержня прямоугольного сечения с обозначениями рис. 1 имеет вид:

$$M_t = \frac{1}{6} t^2 w \left( 3 - \frac{t}{w} \right) \tau. \quad (1)$$

Для особо тонкого прямоугольного сечения, при  $\frac{t}{w} \rightarrow 0$ , формула (1) сводится к следующему виду:

$$M_t = \frac{1}{2} t^2 w \tau. \quad (2)$$

По предположению Гудьера [2], при вычислении касательного напряжения даже при стесненном кручении стержней любого сечения, но с очень малой длиной ( $L \approx 0$ ) можно применять выведенную для стержней круглого сечения зависимость, т. е.

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \varrho. \quad (3)$$

Значение возникающего в тонкой листовой полосе максимального касательного напряжения, на основе формулы (3) с обозначениями рис. 1, учитывая, что  $w \gg t$ , получим

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \frac{w}{2}. \quad (4)$$

Подставляя значение полярного момента инерции сечения в (4), для момента кручения получим:

$$M_t = \frac{I \cdot w^2}{6} \tau. \quad (5)$$

Предположение Гудера хотя на первый взгляд поразительно, но по доказательству опытных результатов, полученных для стесненного кручения особо коротких стержней заслуживает внимания.

Теория кручения Яворика [3] принимает во внимание и длину стержня. По его предположению при кручении стержней некруглого и некольцевого сечения усилие не может считаться чисто кручением, а появляется и изгибающее усилие, зависящее от длины стержня и способа заделки. Из кручения и изгиба, на основе теории Мора вычисляется приведенное напряжение:

$$\sigma_{\text{ред}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (6)$$

В случае стержня особо тонкого прямоугольного сечения, если  $\frac{t}{w} \rightarrow 0$ , формула (6) сводится к следующему виду [3]:

$$M_t = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{k \cdot L}{I^2(L^2 + w^2)}\right)^2 + 4\left(\frac{6}{I \cdot w^2}\right)^2}} \sigma_{\text{ред}}. \quad (7)$$

В формуле (7) значение  $k$  зависит от способа закрепления.

$k=3$  при «свободном кручении», когда сечение искривляется свободно,

$k=1,5$  при «стесненном кручении», если  $M_t$  передается на образец путем заделки.

В формуле (7) при  $L > w$  следует считаться с  $L = w$ . Формула Яворика при  $L = 0$  сводится к формуле Гудера.

Поскольку зависимость (7) применяет теорию предельного напряжения Мора—Геста, в дальнейшем принимается теория Мора—Геста и для характеристики предельного состояния до разрушения. Этим предположением указанные в формулах (2), (5) и (7) значения  $\tau$  и  $\sigma_{\text{ред}}$  могут быть определены из диаграммы растяжения:

$$\sigma_{\text{ред}} = \sigma_{\text{разруш.}}, \quad \tau = \frac{\sigma_{\text{разруш.}}}{2}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\text{разруш.}} = \frac{F_{\text{разруш.}}}{A_{\text{минимум}}}, \quad (9)$$

где

- $\sigma_{\text{разрушения}}$  — относящееся к разрыву т. н. «действительное напряжение»,
- $F_{\text{разрушения}}$  — относящаяся к разрушению растягивающая сила,
- $A_{\text{минимум}}$  — наименьшее сечение образца после разрушения, на месте контракции.

### Описание экспериментов

Образцы были изготовлены из прокатного тонкого стального листа, применяемого и в транспортном машиностроении. Характеристики прочности материала были определены из испытаний на разрыв.

Размеры образцов, испытанных на разрыв:  $L=170$  мм,  $w=20$  мм,  $t=2$  мм.

Номинальные напряжения вычисляются площадью ненагруженного сечения, а действительные напряжения — при учете контракции — переменным сечением.

Обозначения, применяемые для характерных точек диаграммы растяжения:

$F$  — точка, относящаяся к пределу текучести;

$B$  — точка, относящаяся к максимальной силе;

$C$  — точка, относящаяся к моменту разрушения.

Эти буквы поставим в индексы относящихся к ним напряжений.

Нижеследующие результаты были получены в результате усреднения экспериментальных данных испытаний пяти образцов на разрыв:

$$\sigma_{F \text{ ном}} \approx \sigma_{F \text{ действ}} = 220 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{B \text{ ном}} = 340 \text{ МПа}, \quad \sigma_{B \text{ действ}} = 400 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{C \text{ ном}} = 325 \text{ МПа}, \quad \sigma_{C \text{ действ}} = 740 \text{ МПа},$$

$$\frac{L_C - L_0}{L_0} 100 = 28\%,$$

$L_0=80$  мм — длина рассматриваемого участка,

$L_C$  — длина рассматриваемого участка после разрыва.

В формулы (8) запишем значение  $\sigma_{\text{разруш}} = \sigma_{C \text{ действ}} = 740 \text{ МПа}$  и в формулах (2), (5), (7) считаем вычисленными из них  $\tau$ , и  $\sigma_{\text{ред}}$  значениями соответственно.

Опыты по кручению были проведены на крутильной машине фирмы АМСЛЕР, на которой зажимы свободно перемещаются в осевом направлении, предохраняя этим образец от сжимающей или растягивающей осевой нагрузки. Образец был закреплен в зажиме клиновидными колодками (рис. 2).

Размеры образцов, испытанных на кручение:  $w=20$  мм,  $t=2$  мм,  $L=0, 5, 10, 20, 30, 50, 90, 100, 125, 170$  мм соответственно. Для каждой длины было испытано по пяти образцов.

В ходе экспериментов непрерывно измеряли закручивание образца ( $\varphi$ ) и момент нагружения ( $M_t$ ). Начертили диаграмму  $M_t(\varphi)$  и определили максимальное значение  $M_t$ , т. е. максимальную несущую способность при кручении. О закрученных образцах видна серия фотографий на рис. 3, 4, 5.

Закрученные образцы были рассмотрены и по характеру потери несущей способности. Можно установить, что потеря несущей способности более коротких образцов возникает из-за трещины, исходящей с края листовой полосы. Это представлено и на фотографии рис. 4, снятой об образце со скрученной

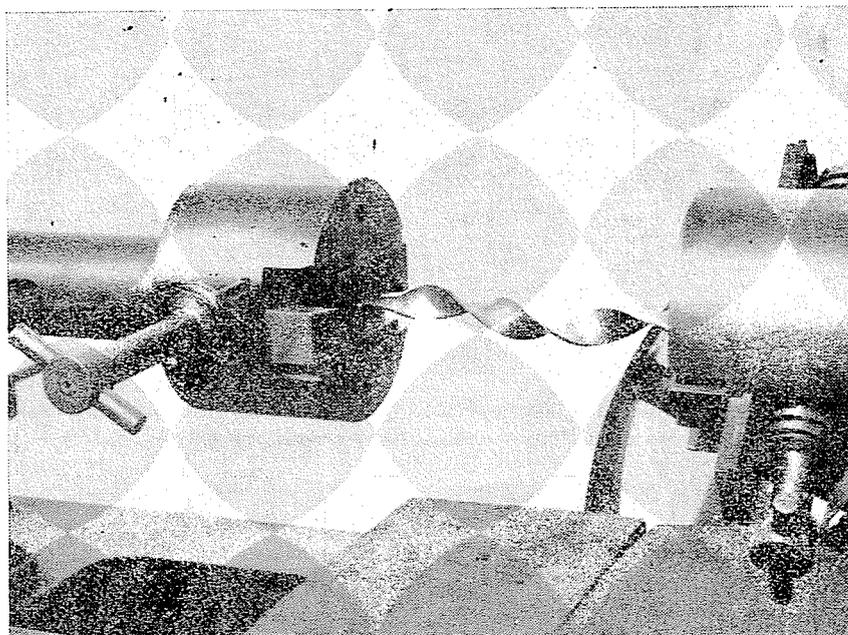


Рис. 2. Закрепление листовой полосы в крутильную машину

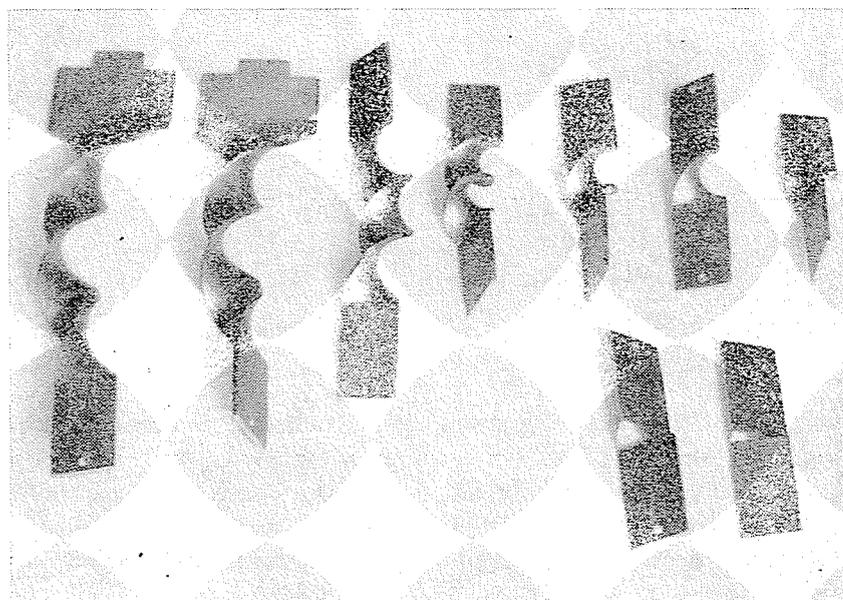


Рис. 3. Форма образцов с различной длиной после закручивания

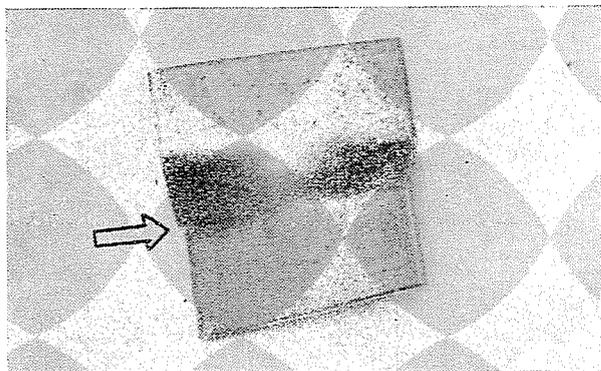


Рис. 4. Потеря несущей способности короткого образца вследствие образования трещины на крае листовая полосы (указанная стрелкой)

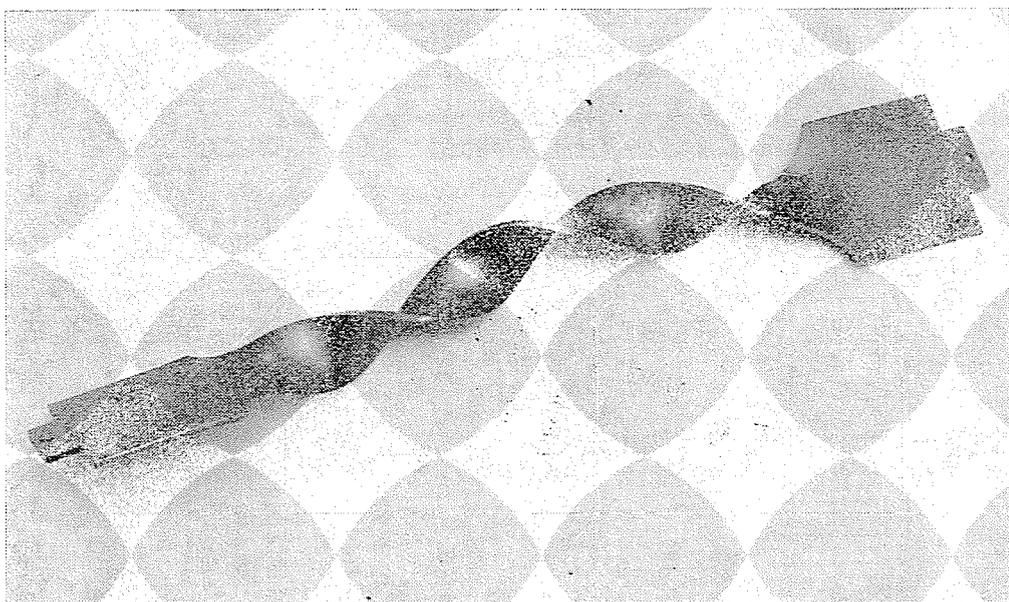


Рис. 5. Потеря несущей способности длинного образца происходит от потери устойчивости

длиной  $L=5$  мм. При более длинных образцах потеряется форма прямоосной винтовой поверхности; образец изгибается и сминается, но трещинообразования на нем нет, как это видно и на рис. 5, значит, здесь возникает проблема устойчивости. Картина снята об образце длиной  $L_0=170$  мм. Явление потери устойчивости у рассмотренных нами образцов наблюдалось при соотношении

$$\text{выше } \frac{L}{w} \approx 3.$$

Полученный за счет измерений максимальный момент кручения был сравнен с моментами кручения, вычисленными из формул по теории Надаи, Гудьера и Яворика — (2), (5), (7). Полученные результаты для случая рассмотренных нами соотношений  $\frac{L}{w}$  приведены в табл. 1. Эти результаты представляются и в виде диаграмм на рис. 6.

Таблица 1

L [mm]	L/w	M <sub>r</sub> [Nm]				
		Надаи	Гудьер	Яворик k=3	Яворик k=1.5	По опытам
0	0		49.33	49.33	49.33	48.0
5	0.25		49.33	42.52	47.33	41.5
10	0.50		49.33	34.88	44.13	39.0
20	1.00		49.33	30.82	41.84	39.0
30	1.50			30.82	41.84	38.5
50	2.50			30.82	41.84	37.0
90	4.50			30.82	41.84	28.0
100	5.00	14.80		30.82	41.84	21.0
125	6.25	14.80		30.82	41.84	16.5
170	8.50	14.80		30.82	41.84	15.0

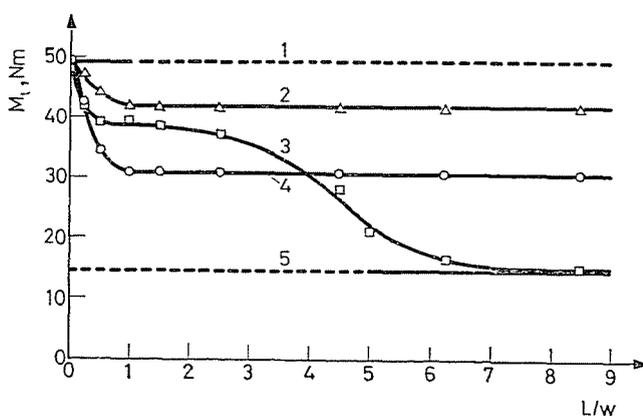


Рис. 6. Максимальный крутящий момент, полученный опытным путем (3) по сравнению с крутящими моментами по теориям Гудьера (1), Яворика  $k=1,5$  (2);  $k=3$  (4) и Надаи (5)

### Оценка результатов

В случае скрученного «стержневого элемента» длиной  $L=0$  происходящая из теории Гудьера формула совпадает с формулой, полученной по теории Яворика. Вычисленный из ней максимальный момент кручения с большой точностью совпадает с измеренной величиной.

Полученные за счет формул Яворика моменты для области  $0 \cong \frac{L}{w} \cong 4$  хорошо совпадают с результатами экспериментов. Последние находятся между теоретическими диаграммами Яворика, полученными для двух видов заделки. В тематике испытаний на разрушение совпадение в такой мере считается хорошим.

При значении  $\frac{L}{w} \approx 3$  изменяется форма полученной измерением кривой.

В общем при этом соотношении изменяется и образ потери несущей способности. В то же время при максимальном моменте кручения образец вслед за большой пластической деформацией потрескается, а выше него, также после большой пластической деформации сминается.

В интервале  $\frac{L}{w} > 5$ , т. е. для случая длинных стержней (листовых полос) формула Надаи дала хорошо совпадающий с экспериментами результат, сфера действия которого и без того распространяется только на длинные стержни и идеально пластические материалы. В этой области к потере несущей способности приводит потеря устойчивости формы, причем предел несущей способности — вопрос устойчивости.

Суммируя сказанное, можно установить, что из рассмотренных теорий теория Гудьера и Яворика дает относительно хорошо совпадающий с экспериментами результат для коротких, а теория Надаи — аналогия песчаного холма для длинных стержней. Эксперименты, однако, распространялись лишь на кручение листовых полос. Было бы целесообразно продолжать испытания с образцами другой формы и другого сечения для различных материалов, для того, чтобы можно было установить сферу действия рассмотренных формул.

### Литература

1. NÁDAI, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw-Hill 1950.
2. GOODIER: Journal of Applied Physics. Volume 13, p. 167, 1942.
3. Яворик, Л.: «Роль венгров в естественнонаучном и техническом прогрессе мира» — Научная встреча 1986. Выписки из докладов, том II, стр. 785. (на венг. языке).

Dr. Kálmán KASZAP, H-1521, Budapest.