

EXTRAPOLATION DES SPANNUNGSINTENSITÄTS- FAKTORS AUF GRUND EXPERIMENTELLER RESULTATE

F. THAMM—A. A. MANSARAY

Lehrstuhl für Technische Mechanik
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 10 November, 1987
Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. BÉDA

Abstract

The stress intensity factor (SIF) is defined usually by following formulas

$$K_I = k_I \sigma_0 \sqrt{2a\pi} \quad \text{and} \quad K_{II} = k_{II} \tau_0 \sqrt{2a\pi}$$

for the fracture-modes I and II, respectively, with the full or half crack-length, a , the „far-field“ stress σ_0 or τ_0 and a dimensionless quantity k_I and k_{II} depending on the boundary conditions. It is shown, that the actual influence of the crack-length upon the SIF is diminishing with its growing value and in many cases the SIF depends practically on the far-field stress only. This makes an extrapolation method possible, which is checked by two photoelastic experiments.

In der elastischen Bruchmechanik wird die Anfälligkeit für RiBfortpflanzung durch den Spannungsintensitätsfaktor (SIF) charakterisiert [1, 2]. Ausgangspunkt für die Bestimmung des SIF ist die Westergaard—Spannungsfunktion mit komplexen Variablen [3] für den Fall eines Risses der Länge $2a$ in einer durch die Spannung σ_0 senkrecht zur RiBebene belasteten unendlichen Scheibe:

$$Z = \sigma_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (1)$$

Hierin sind mit den Bezeichnungen der Abb. 1.

a : Halbe RiBlänge

$$z = x + iy \quad i = \sqrt{-1}.$$

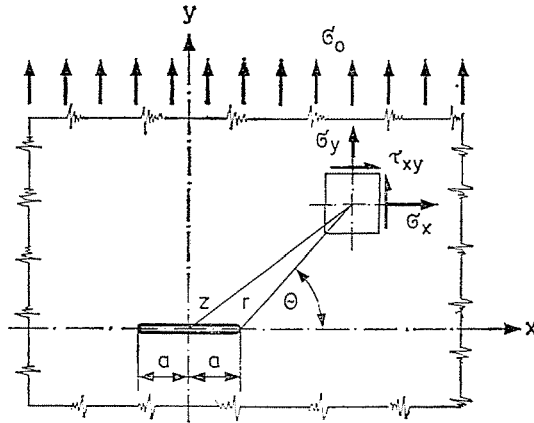


Abb. 1. Riß der Länge $2a$ in einer senkrecht zur Rißebe durch die Zugspannung σ_0 belasteten unendlichen Scheibe und die dadurch in der Umgebung der Rißspitze hervorgerufenen Spannungskomponenten

Die Spannungskomponenten werden von Westergaard durch folgende Gleichungen angegeben:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z' \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z' \\ \tau_{xy} &= -\operatorname{Re} Z'\end{aligned}\quad (2)$$

Re und Im bezeichnen den reellen und imaginären Teil der komplexen Funktion, $Z' = dZ/dz$.

Die Entwicklung der Spannungskomponenten als Funktion von x und y führt auf recht verwickelte Ausdrücke [4]. Aus diesem Grunde beschränkt sich die Praxis darauf, Näherungslösungen für die unmittelbare Umgebung der Rißspitze anzuschreiben. Diese sind — mit den Bezeichnungen der Abb. 1.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2r\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Hierin ist K der SIF, welcher aufgrund der G1.1. für den Belastungsfall der Abb. 1 folgende Form annimmt.

$$K = K_1 = \sigma_0 \sqrt{2a\pi}.\quad (3a)$$

Bei der praktischen Anwendung der Bruchmechanik wird der Wert des SIF für beliebige Rißform und Spannungsverteilung benötigt. Deshalb werden üblicherweise drei Rißarten unterschieden [5], je nachdem welcher der Komponenten des Spannungszustandes in der unmittelbaren Umgebung der Rißspitze als Ursache für den Rißfortschritt angesehen werden kann. Von diesen Rißarten kann im Falle eines ebenen Spannungs- bzw. Verformungszustandes der I und II Modus (Spaltung bzw. Stufengleitung) auftreten. Die dazugehörigen SIF-en werden mit K_I bzw. K_{II} bezeichnet. Aus Annehmlichkeitsgründen beharrt die Praxis weiterhin auf die Form der Gl. (3a), und berücksichtigt die Wirkung von Bauteilgestalt und Belastungsart durch einen dimensionslosen Faktor k in folgender Weise

$$K_I = k\sigma_0\sqrt{2a\pi} \tag{4a}$$

$$K_{II} = k\tau_0\sqrt{2a\pi}. \tag{4b}$$

Hierbei bedeuten σ_0 bzw. τ_0 die für die Rißfortpflanzung maßgebende Spannungs- bzw. Schubspannungskomponente, die an der Rißspitze ohne der dadurch bedingten Singularität auftreten würde.

Die Gl. (4a) und (4b) erwecken den Eindruck, als ob der SIF eng mit der Rißlänge verbunden wäre. Dies trifft jedoch im Falle von auf die Berandung des Bauteiles auslaufenden Rissen nicht zu, sofern der Riß, oder Teile davon gemäß der Abb. 2 praktisch spannungsfreie Bauteilpartieen durchlaufen. Dies wird auch durch den Umstand belegt, daß die Gleichungen der Gruppe (3) auch von einer Spannungsfunktion von der Form

$$Z = \frac{K}{\sqrt{2\pi z}} \tag{5}$$

abgeleitet werden können, in der die Rißlänge a nicht vorkommt. Der SIF K hängt von den Randbedingungen des Bauteiles ab, die ihrerseits im Falle großer Bauteil-

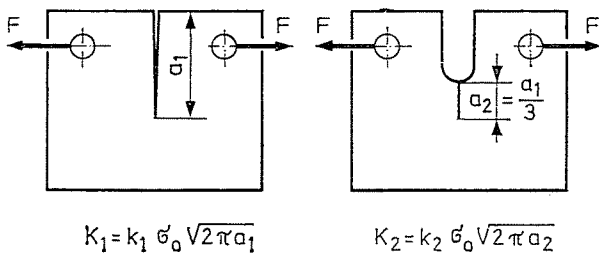


Abb. 2. Im Falle eines auf die Berandung der Scheibe auslaufenden Risses ist die Rißlänge nicht unbedingt charakteristisch für die Spannungsverteilung an der Rißspitze. Im Falle der gezeigten beiden Fälle ist die Spannungsverteilung und damit auch der Spannungsintensitätsfaktor (SIF) K für beide Fälle praktisch gleich. Daraus ergibt sich mit den Bezeichnungen der Formel

$$4a: k_1\sqrt{a_1} \cong k_2\sqrt{a_2}.$$

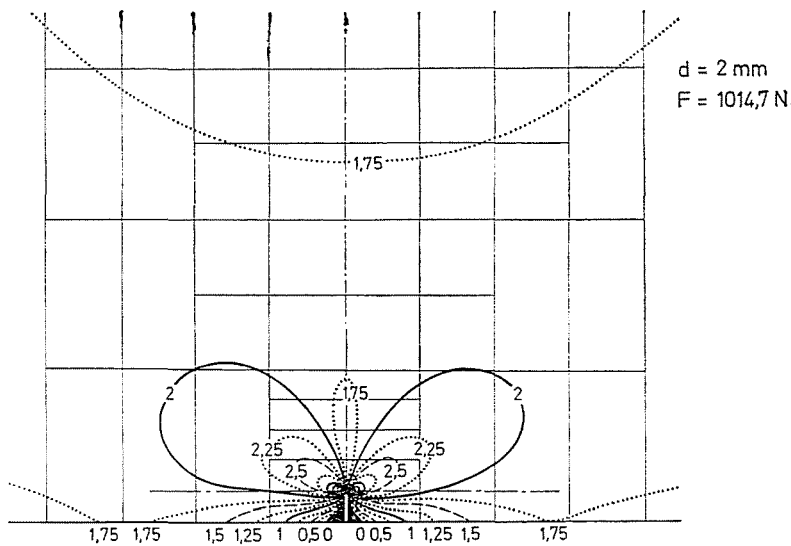


Abb. 4

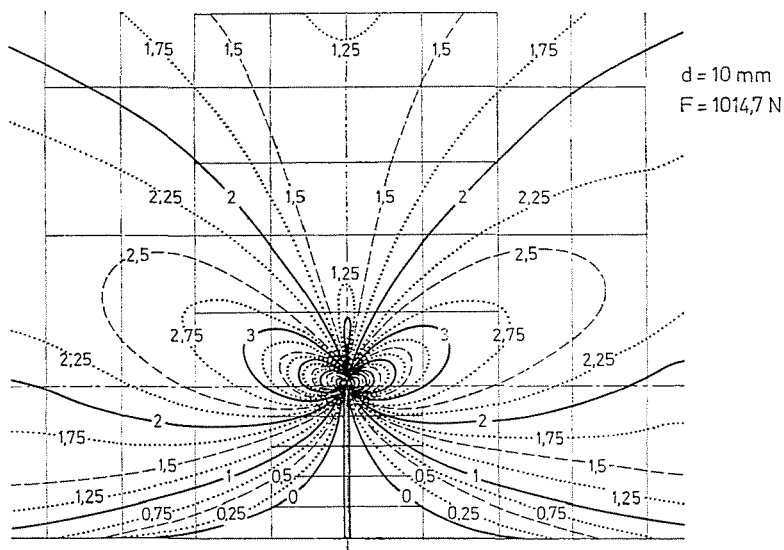


Abb. 5

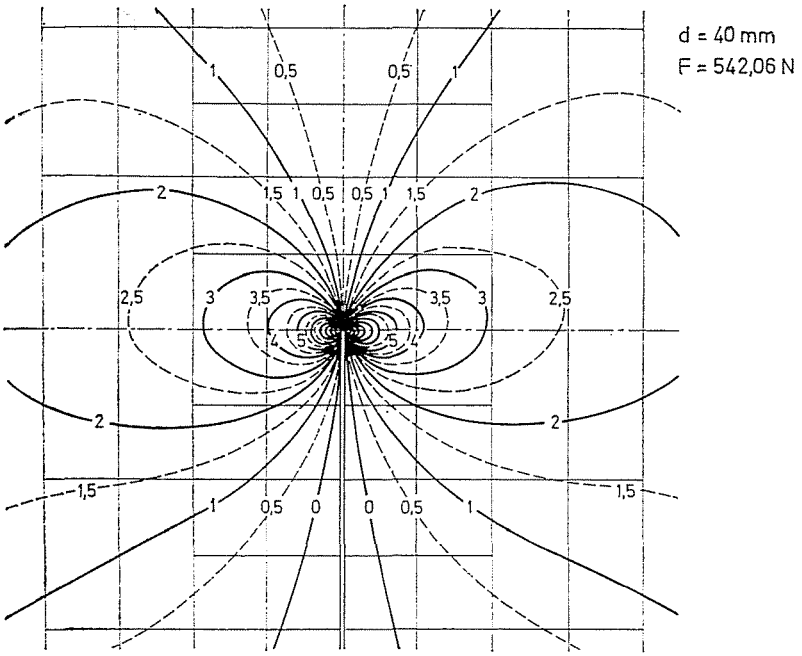


Abb. 6

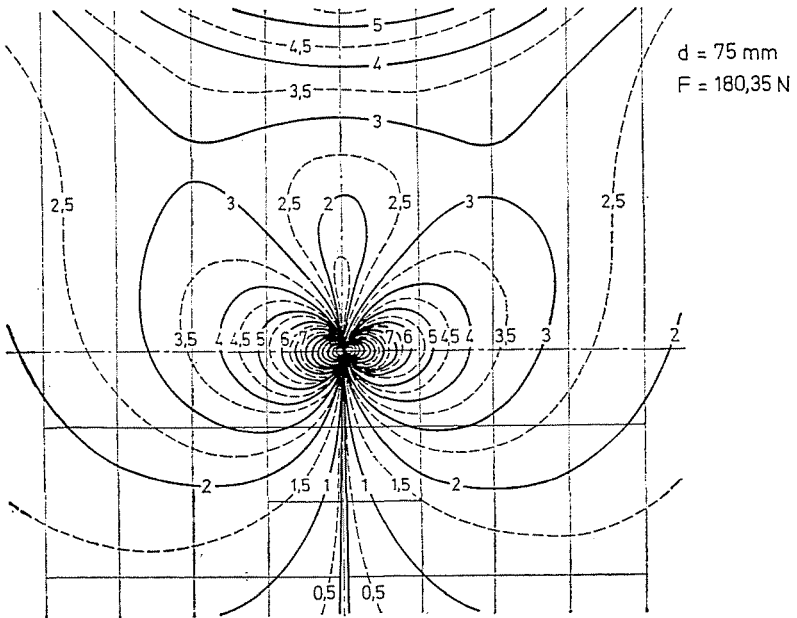


Abb. 7. Montierte Isochromatenbilder für verschiedene Rißtiefen d am Modell der Abb. 3 aufgenommen. An den einzelnen Isochromaten sind die Ordnungszahlen vermerkt

querschnitte zwischen der Rißspitze und der Berandung. Um nun den Gültigkeitsbereich und die Zuverlässigkeit dieser Methode zu prüfen, wurden spannungsoptische Untersuchungen durchgeführt, über die im folgenden berichtet werden soll.

Zunächst ist eine auf exzentrischen Zug belastete und mit einem einseitigen Riß versehene rechteckige Scheibe der Abb. 3 untersucht worden. Im Laufe der Untersuchung wurde die Rißlänge d stufenweise im Bereich bis $d=10$ mm in Schritten von je 2 mm, und anschließend bis $d=75$ mm in Schritten von je 5 mm erhöht. Bei jeder Rißtiefe wurde das Isochromatenbild aufgenommen von denen vier in den Abb. 4—7 zu sehen sind. Aufgrund der Isochromatenbilder wurde der SIF mittels

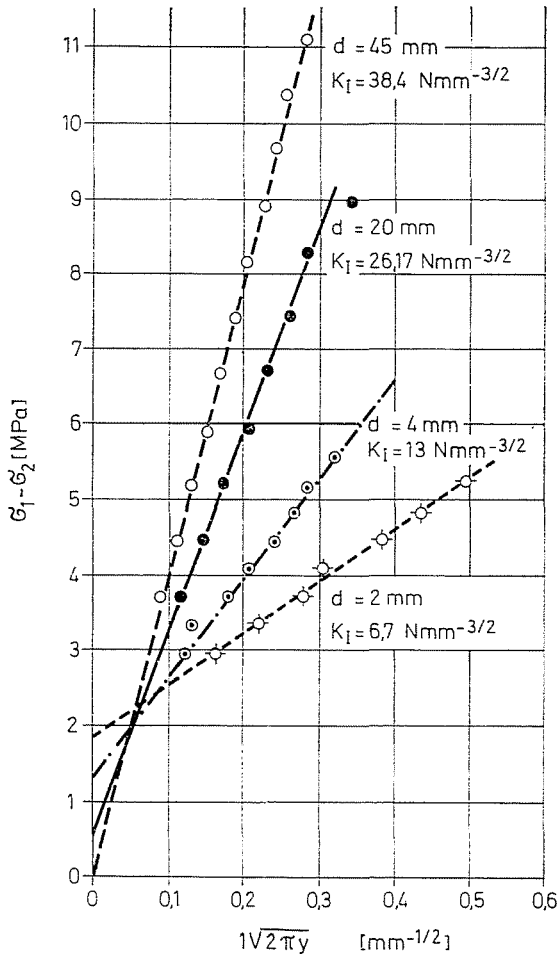


Abb. 8. Auswertegeraden für vier verschiedene Rißtiefen d . An die Geraden sind auch die Wert des SIF vermerkt

der sog. Tangentenmethode von Ruiz [7] ermittelt. Bei dieser Methode werden die längs einer durch die Rißspitze senkrecht zur Rißebebene verlaufenden Geraden auftretenden Isochromatenwerte als Funktion von $1/\sqrt{2\pi y}$ aufgezeichnet (y bedeutet die Entfernung der jeweiligen Isochromate von der Rißspitze). Die so erhaltenen Messpunkte liegen in guter Annäherung auf einer Geraden, wobei die Steigung dieser Geraden den Wert von K und die auf $y=\infty$ extrapolierte Ordinate jene, (in die Abb. 1 nicht eingezeichnete) Spannungskomponente σ_{x_0} ergibt, die an der Rißspitze keine Singularität besitzt. Für den Belastungsfall der Abb. 1 tritt diese Komponente

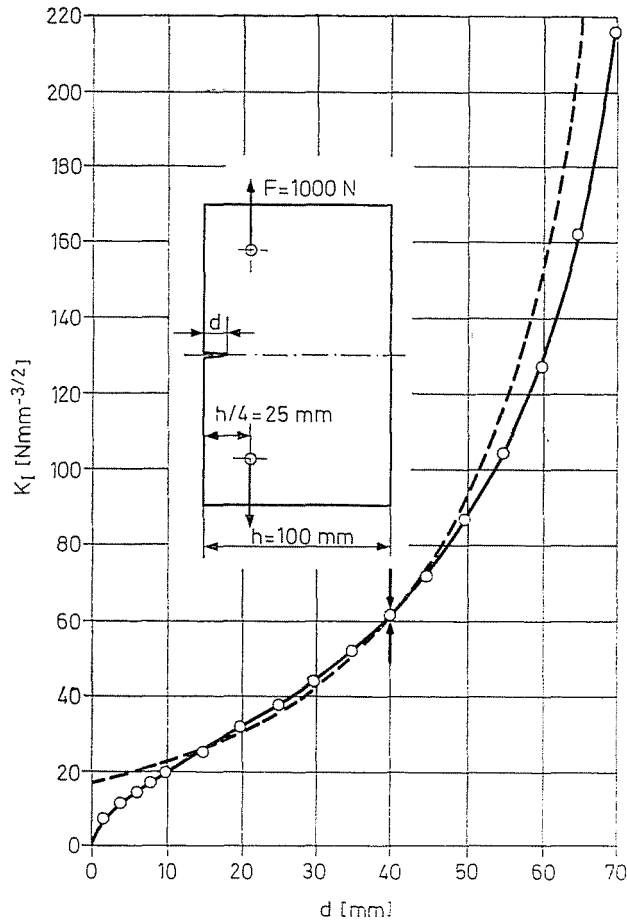


Abb. 9. Die gemessenen Werte des SIF auf die Belastung $F=1000$ N umgerechnet, als Funktion der Rißtiefe aufgezeichnet (voll ausgezogen). Extrapolierte Werte des SIF aufgebaut auf den Meßwert bei $d=40$ mm (gestrichelt)

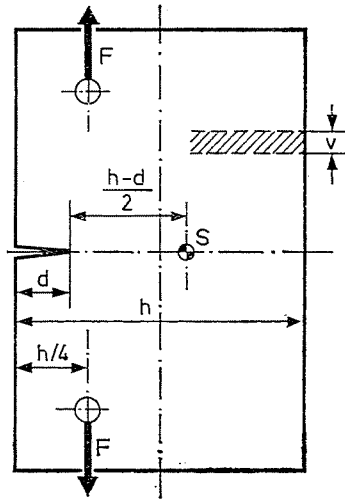


Abb. 10. Die zur Bestimmung von σ_0 benötigten Abmessungen

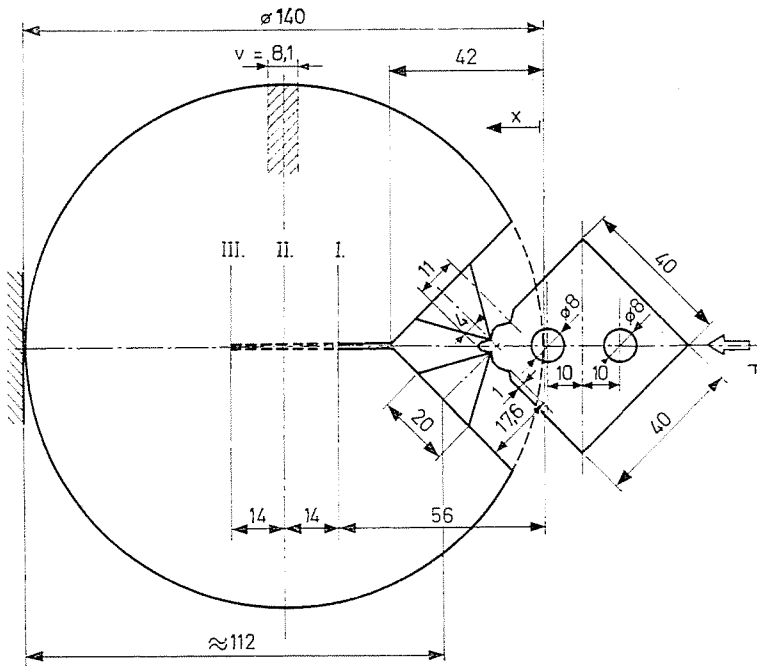


Abb. 11. Modellabmessungen zur spannungsoptischen Untersuchung des zylindrischen Probekörpers von Erisman und Prodan. Die Rißspitzen der untersuchten Riß-tiefen liegen bei I ($x/D=0,4$); II ($x/D=0,5$) und III ($x/D=0,6$)

tatsächlich nicht auf, muß aber im Falle anderer Randbedingungen berücksichtigt werden.

Abb. 8 zeigt vier Auswertegeraden. Die gemessenen SIF-en, auf eine Belastung von $F=1000$ N umgerechnet, sind in der Abb. 9 als Funktion der Rißtiefe d aufgezeichnet und durch eine voll ausgezogene Kurve verbunden worden. In die gleiche Abbildung wurde auch der aus dem bei $d=40$ mm bestimmten Wert extrapolierte Verlauf der SIF gestrichelt eingezeichnet. σ_0 wurde hierbei aufgrund der elementaren Formeln für den auf Zug und Biegung belasteten Stab mit den Bezeichnungen der Abb. 10 folgendermaßen berechnet

$$\sigma_0 = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot k}{J} \frac{h-d}{2}$$

mit $A=v(h-d)$; $J=v \frac{(h-d)^3}{12}$.

Wie aus der Abb. 9 ersichtlich, ergibt die Extrapolation im Bereich von $d=10-50$ mm recht gut brauchbare Werte,

Das gleiche Verfahren wurde zur bruchmechanischen Analyse des von Erisman und Prodan [8] entwickelten, mit einer Aussparung versehenen zylindrischen Probekörpers („Käseprobe“) angewendet. Über die Verwendung dieses Probekörpers

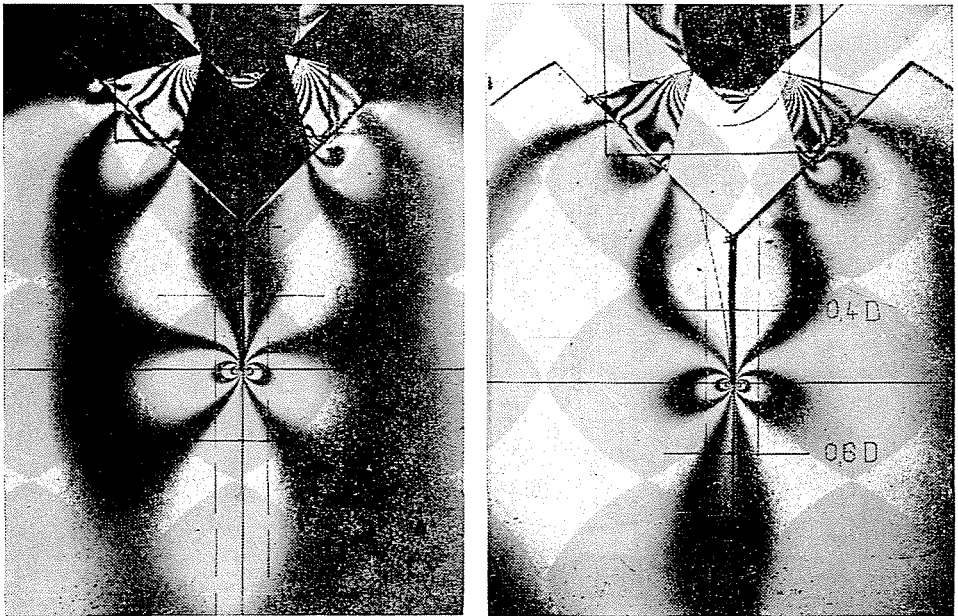


Abb. 12., 13. Lichtbilder desselben Modells mit der Rißspitze bei II. Abb. 12: gekreuzte Polarisatoren, Abb. 13: parallele Polarisatoren

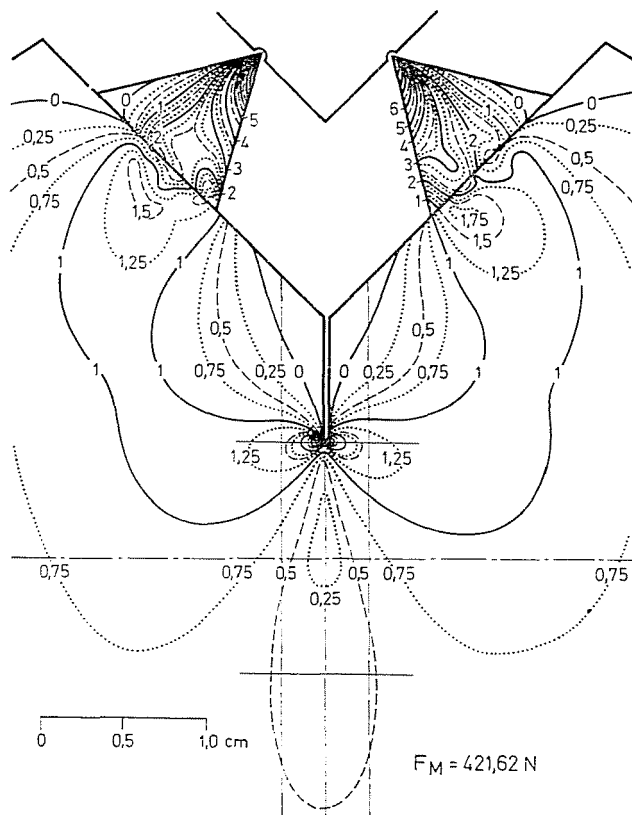


Abb. 14. Montiertes Isochromatenbild für $x/D=0,4$, mit an den Isochromaten vermerkten Ordnungszahlen

zur Untersuchung von Gesteinsproben ist bereits von Czoboly und Mitarbeitern [9] berichtet worden. Maßskizze und Belastung des im Maßstab 2:1 hergestellten Modells zeigt die Abb. 11. Die Untersuchung wurde bei drei, mit I: II und III bezeichneten Rißtiefen durchgeführt. Ein fotografiertes Isochromatenbild bei gekreuzter bzw. paralleler Polarisatorstellung zeigen die Abb. 12 und 13. Zwei montierte Isochromatenbilder mit den vermerkten Isochromaten—Ordnungszahlen zeigen die Abb. 14 und 15. Ein Beispiel für die Auswertegeraden zeigt die Abb. 16. Die auf die Hauptausführung umgerechneten Entfernungen auf der y-Achse wurden mit v_k bezeichnet. Der auf die Schnittkraft $[F]=F/v$ bezogene Isochromatenwert wurde mit $\langle \sigma_k \rangle$ bezeichnet. Damit ergibt auch die Steigung der Auswertegeraden den auf die Schnittkraft bezogenen Wert des SIF: $\alpha=K/[F]$. Die Untersuchung wurde bei zwei Stellungen t_F der kraftübertragenden Dreiecke durchgeführt. Die sich auf die Meßwerte „B“ (Risstiefe I) stützende Extrapolation für beide Werte von t_F wurde in der Abb. 17

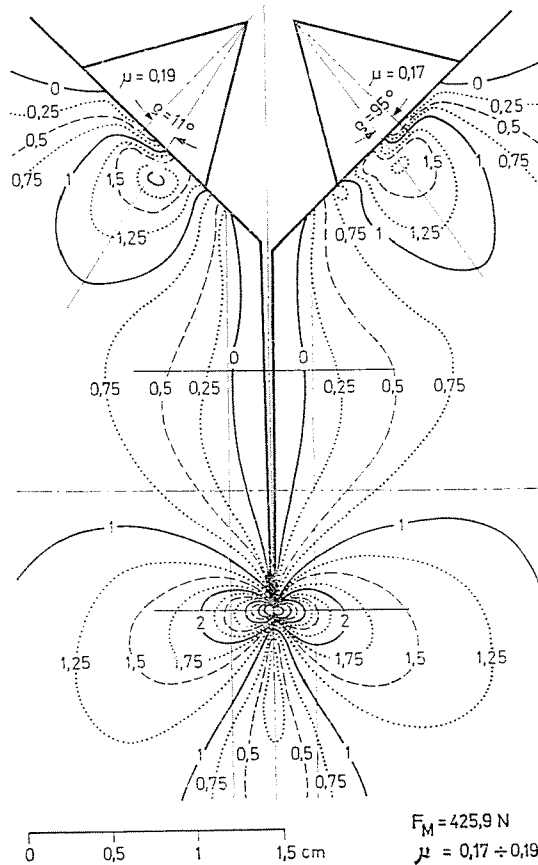


Abb. 15. Wie Abb. 14 jedoch für $x/D=0,6$. Das Isochromaten-Maximum unter der Auflagerfläche der kraftübertragenden Dreiecke ergibt die Richtung der übertragenen Kraft (strichpunktiert ausgezogen). Der zwischen der Oberflächen-normalen und der Krafrichtung eingeschlossene Winkel ist der Reibungswinkel ϱ , aus der die Reibungszahl μ bestimmt werden kann (s. auch die Abb. 18)

gestichelt bzw. voll ausgezogen. Die anderen Meßwerte dienen zur Kontrolle und zeigen eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den extrapolierten Werten.

Die Reibungskraft zwischen dem Probekörper und den kraftübertragenden Dreiecken kann nicht vernachlässigt werden. Die Reibungszahl μ ergibt sich aus dem in die Abb. 18 eingezeichneten Wert ζ des Reibungswinkels in bekannter Weise. Der Reibungswinkel selbst kann aus der Stellung des Isochromaten-Maximums unter der Auflagefläche der Dreiecke mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden. In Kenntnis der Reibungszahl μ ergibt sich die Nennspannung σ_0 im Punkte Q

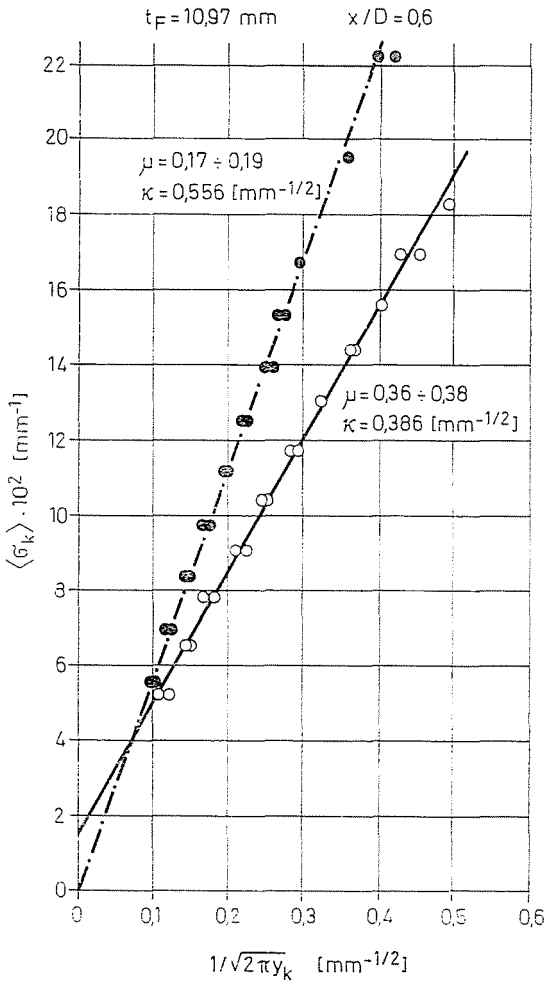


Abb. 16. Zwei Auswertegeraden bei gleicher Rißlänge jedoch unterschiedlicher Reibungszahl μ an der Kraftübertragungsstelle. Die Abmessungen y sind auf die Hauptausführung umgerechnet worden und werden deswegen mit y_k bezeichnet. $\langle \sigma_k \rangle$ ist der Isochromatenwert auf die Schnittkraft $[F] = F/v$ bezogen. Dadurch ergibt die Steigung der Auswertegeraden den bezogenen Wert des SIF $\kappa = K_I/[F]$ der an den Geraden vermerkt ist

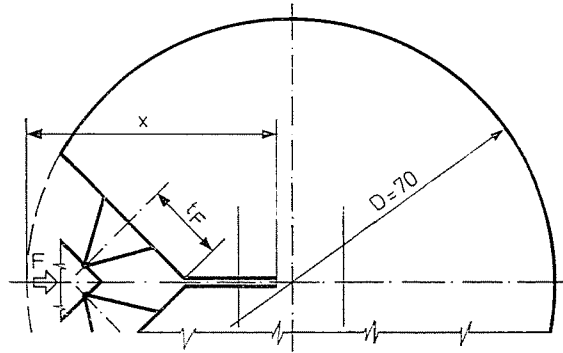
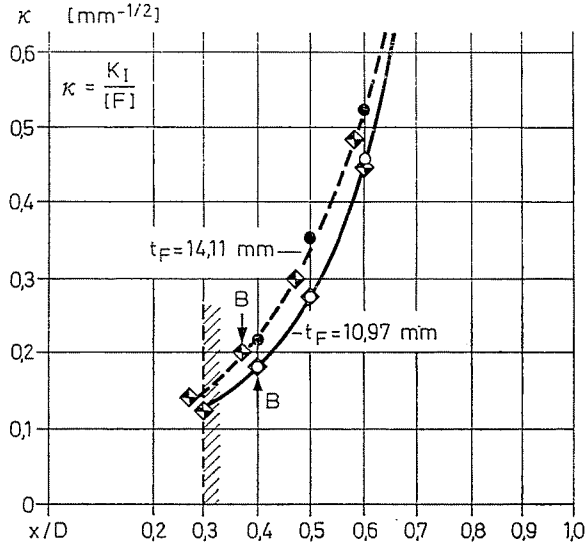


Abb. 17. Extrapolation des bezogenen SIF-s aufgrund des Meßwertes im Punkte "B" für beide Werte von t_F . Die anderen eingezeichneten Meßpunkte dienen lediglich als Kontrolle

wiederum auf Grund der Formeln der elementaren Festigkeitslehre wie folgt:

$$\sigma_{0Q} = \frac{M_h}{W} + \frac{N}{A} = \frac{F}{v(D-x)} \left[\frac{3}{D-x} \left\{ d + \frac{1-\mu}{1+\mu} \left(\frac{x+D}{2} + b \right) \right\} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \right] \quad (7)$$

hängt somit auch von der Reibungszahl μ ab. Die Bezeichnungen

$$\xi = \frac{x-b}{D-b}; \quad \delta = \frac{d}{D-b}; \quad v^* = \frac{1-\mu}{1+\mu}; \quad \Phi = \frac{F}{v(D-b)}$$

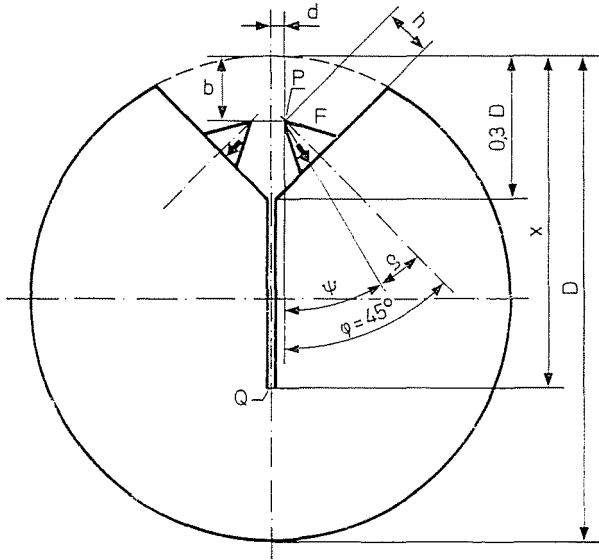


Abb. 18. Die zur Bestimmung der Nennspannung σ_0 benötigten Modellabmessungen

eingeführt, vereinfacht sich die Gl. (7) zu

$$\sigma_{0Q} = \frac{\Phi}{1-\xi} \left[2\nu^* + \frac{3}{1-\xi} (\delta + \xi\nu^*) \right]. \quad (8)$$

Dem als Basis für die Extrapolation angenommenem Punkt „B“ entspricht $\xi=1/3$. Diesen, und die Daten der Hauptausführung ($t_F=11$ mm; $h=8,8$ mm; $D=70$ mm) in Gl. (8) eingesetzt, ergibt

$$\sigma_{0B} = \Phi[5,25\nu^* + 0,1667] \quad (9)$$

woraus sich durch sinngemäße Anwendung der Gl. (6)

$$K_Q = K_B \frac{\sigma_{0Q}}{\sigma_{0B}} = K_B \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{2\nu^* + \frac{0,07407 + 3\xi\nu^*}{1-\xi}}{5,25\nu^* + 0,1667} \quad (10)$$

für den extrapolierten Wert des SIF ergibt. So ergibt sich z. B. für die Reibungszahl $\mu=0,36$ ($\nu^*=0,4706$) aus Gl. (10)

$$K_Q = K_B \left[\frac{0,3569}{1-\xi} + \frac{0,02809}{(1-\xi)^2} + 0,53532 \frac{\xi}{(1-\xi)^2} \right]. \quad (10a)$$

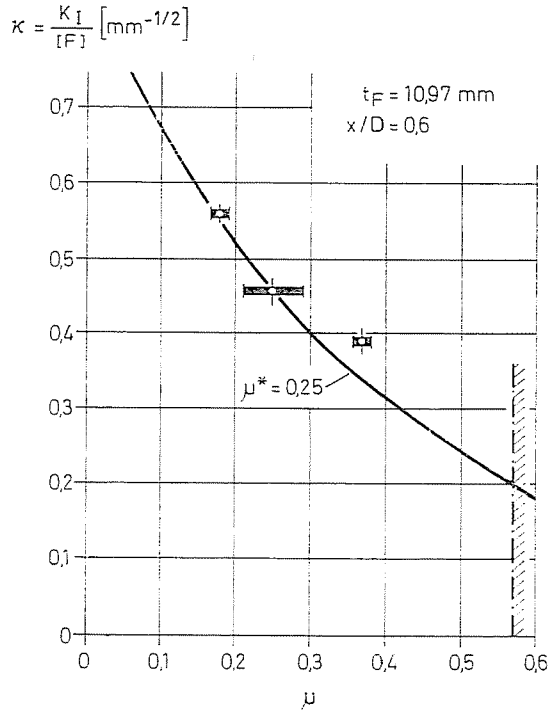


Abb. 19. Der auf die Schnittkraft bezogene SIF bei konstanter Rißtiefe als Funktion der Reibungszahl μ an der Krafteinleitungsstelle, extrapoliert aus dem Wert bei $\mu = \mu^* = 0,25$. Die dick ausgezogenen Linienstücke stellen den Streubereich der gemessenen Werte der Reibungszahl dar

Die Untersuchungen wurden für drei verschiedene Werte der Reibungszahlen durchgeführt, die durch Zwischenlagen verschiedener Rauigkeit zwischen den Belastungsdreiecken und dem Modell verwirklicht worden sind. Mit Hilfe der Gl. (10) wurde auch die Extrapolation bei gleichbleibender Rißtiefe jedoch veränderlicher Reibungszahl durchgeführt, wobei als Basis die Reibungszahl $\mu = \mu^* = 0,25$ gewählt worden war. Die Resultate der Untersuchung zeigt die Abb. 19. Da jede Untersuchung, bei der Reibungskräfte eine Rolle spielen, stets mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, kann die Extrapolation auch in diesem Fall als befriedigend angesehen werden.

Die vorliegenden Untersuchungen lassen den Einfluß der zunächst vernachlässigten Spannungskomponente σ_{x_0} vermuten und sind auch nicht auf die Bruchart II ausgedehnt worden. Sie sollen in dieser Richtung weiter verfolgt werden.

Literatur

1. GRIFFITH, A. A.: The phenomenon of rupture and flow of solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London. A 1920.
2. PARIS, P. C.—SIH, G. C. M.: „Stress Analysis of Cracks“ Fracture Toughness Testing and its Applications. ASTM Publication No. 381. 1965.
3. WESTERGAARD, H. M.: Bearing Pressures and Cracks. J. Appl. Mechanics. 1939. A—49—A—53.
4. SZABÓ, V.: Stav napätia v okolí šikmej trhliny pri drojosovom namohání. Staebnicky časopis 31 (1983) Nr. 3.
5. RICE, J. R.: Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture. In: Fracture (red. H. Liebowitz). Academic Press New York—London, 1968. Bd. II. S. 191—311.
6. ROSSMANITH, H. P.: Analysis of Mixed-Mode Isochromatic Crack-Tip Fringe Patterns. Acta Mechanica 34 (1980) S. 1—38.
7. RUIZ, C.: Experimental Determination of the Stress Distribution Around Notches and Slits in Cylindrical Pressure Vessels. Proc. 4. Int. Conf. on Experimental Stress Analysis. Cambridge. Inst. of Mechanical Engineers. S. 363—371.
8. ERISMAN, TH. H.—PRODAN, M.: Ein neuartiger Probekörper für bruchmechanische Untersuchungen. Materialprüfung. 18 (1976) Nr. 1. S. 4—8.
9. CZOBOLY, E.—GÁLOS, M.—HAVAS, I.—THAMM, F.: Appropriate Fracture Mechanics Specimens for Testing Rocks. Vortrag am 6. Kongress der EGF. Amsterdam. Juni. 15—20. 1986.

Dr. Frigyes THAMM, }
A. MANSARAY } H-1521, Budapest