ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА МАТЕРИАЛОВ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Михеев Ю. В., Банов А. М.

(СССР)

Поступило 8 апреля 1987 г.

Представлено проф. д-ром техн. наук И. Сабо

Abstract

A linear quadratic control problem is considered for optimal heating of periodic structure materials. It is shown, the problem can be reduced to a distributed parameter RICCATI equation in which the coefficients have fast oscillations. The method proposed for the analysis of this equation is based on the technic of asymptotic averaging.

Широкое внедрение в различных областях науки и техники слоистых материалов определяет актуальность анализа и оптимизации процессов нагрева материалов со случайной или периодической структурой. В дифференциальных уравнениях описывающих также процессы, как правило, присутствуют коэффициенты быстроосцилирующие по пространственным координатам, характеризующиеся теплофизические свойства материалов.

Задача граничного управления тепловым полем в неоднородном стержне имеет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, x) = \bar{A}x\theta(t, x), \quad x \in [0, 1], \ t \in [0, T], \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = \beta\big(\theta(1, t) - u(t)\big), \ \frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0, \tag{2}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \tag{3}$$

где $\theta_0(x)$ — заданное начальное состояние,

$$\bar{A}x\vartheta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)$$

— дифференциальный оператор второго порядка.

Функция $\lambda(x/\varepsilon)$ — в общем случае кусочно-гладкая, 1-периодическая по x функция $\forall x\in[0, 1]$ $\lambda(x/\varepsilon) > 0$, u — граничное управление, соответствующее температуре окружающей среды при конвективном нагреве.

Ниже будет отыскиваться управление обеспечивающее минимум следующего функционала:

$$I(u) = \int_0^T \left[G_1(t)u^2(t)\,dt + \int_0^1 \left(G_2(x, t)\,\theta^2(x, t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G_3(x, t)\left(\frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x}\right)^2\right)dx\right]dt + \int_0^1 G_4(x)\,\theta(T, x)\,dx, \tag{4}$$

где G_i $(i=1, 4)$ — положительно-определенные весовые функции. Нетрудно показать [1], что оптимальное управление системы (1—3) определяется следующим равенством:

$$u_0 = -\frac{\lambda_0\beta_i}{2G_1(t)}\int_0^1 K(1, t, s)\,\theta(s, t)\,ds,$$

где $\lambda_0=\lambda(0)$ функция, $K(x, t, s)$ является решением распределенного уравнения Риккати

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x, s, t) = -\bar{A}xK(x, s, t) - \bar{A}sK(x, s, t) -$$

$$-\frac{\lambda_0^2\beta_i^2}{2G_1(t)}K(1, t, s)\,K(x, 1, t) + F(x, s, t),$$

где

$$F(x, s, t) = -2G_2(s, t)\,\delta(x-s) + 2G_3(s, t)\,\delta''(x-s) \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$K(x, T, s) = -2G_4(s)\,\delta(x-s)$$

$$\beta_i\left(1 + \frac{\lambda_0\beta_i}{2G_1(t)}\right)K(1, t, s) - \frac{\partial K(1, t, s)}{\partial x} = -\frac{2G_3(1, t)\,\beta_i\,\delta(1-s)}{\lambda_0} \tag{6}$$

$$\frac{\partial K}{\partial s}(x, t, 0) = \frac{\partial K}{\partial x}(0, s, t) = 0,$$

$$\beta_i K(x, t, 1) - \frac{\partial}{\partial s}K(x, 1, t) = 0.$$

Наличие быстроосцилирующего коэффициента делает практически невозможным прямой счет таких систем т. к. накладывает жесткие ограничения на шаг дискретизации по координате, увеличивая время счета и приводя к накоплению ошибок округления. В этом случае удобно переходить к усредненным уравнениям, коэффициенты которых постоянны, а их решения близки к решениям исходных уравнений.

Асимптотическое разложение для коэффициента оптимального регулятора будем искать в виде:

$$K(x, s, t, \xi, \gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i K_i(s, t, x, \xi, \gamma), \ \gamma = s/\varepsilon, \ \xi = x/\varepsilon \tag{7}$$

$$K_i(x, t, s, \xi, \gamma) = K_i^{\xi}(x, t, s, \xi) + K_i^{\gamma}(x, s, t, \gamma),$$

где K_i — функции 1-периодические по ξ и γ.

Подставим разложение (6) в уравнение (4) и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$.

$$\varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K^{\xi}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K^{\gamma}}{\partial \gamma}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_0^{\gamma}}{\partial \gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_0}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_1^{\gamma}}{\partial \gamma}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_0^{\varepsilon}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_1^{\xi}}{\partial \xi}\right) = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{0} \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_0}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_1^{\gamma}}{\partial \gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_1}{\partial s}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_2^{\gamma}}{\partial \gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_1^{\xi}}{\partial \xi}\right) + \right. \\ + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_2^{\xi}}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial K_0}{\partial t} + \\ + \frac{\lambda_0^2 \beta_i^2}{2G_1(t)} K_0(1, s, t, \xi, \gamma) K_0(x, 1, t, \xi, \gamma) + F(x, s, t) = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Интегрируя равенство (8) по γ от 0 до 1 и учитывая периодичность функций $\lambda(\gamma)$, K_0^{γ} получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_0^{\xi}}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Откуда следует, что $\lambda(\xi)\dfrac{\partial K_0^\xi}{\partial \xi}$ не зависит от ξ т. е.

$$\frac{\partial K_0^\xi}{\partial \xi}=C(x,s,t)/\lambda(\xi),\quad (\lambda(\xi)>0).$$

Интегрируя последнее равенство по ξ от 0 до 1 и учитывая периодичность K_0^ξ по ξ имеем

$$0=\left[\int_0^1 \frac{ds}{\lambda(s)}\right]^{-1} C(x,s,t)$$

следовательно $C(x,s,t)=0$ и функция K_0^ξ не зависит от ξ. Меняя в приведенном рассуждении ξ и γ получим, что K_0^γ не завнсит от γ. Таким образом функция K_0 не зависит от ξ и γ т. е.

$$K_0=K_0(x,s,t). \tag{11}$$

С учетом (11) равенство (9) перепишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\lambda(\xi)\left(\frac{\partial K_0}{\partial x}+\frac{\partial K_1^\xi}{\partial \xi}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial \gamma}\left[\lambda(\gamma)\left(\frac{\partial K_0}{\partial \varrho}+\frac{\partial K_1^\gamma}{\partial \gamma}\right)\right]=0.$$

Как и в равенстве (8) легко показать, что каждое слагаемое здесь равно нулю.

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\lambda(\xi)\left(\frac{\partial K_0}{\partial x}+\frac{\partial K_1^\xi}{\partial \xi}\right)\right]=0,\quad \frac{\partial}{\partial \gamma}\left[\lambda(\gamma)\left(\frac{\partial K_0}{\partial \varrho}+\frac{\partial K_0^\gamma}{\partial \gamma}\right)\right]=0$$

откуда нетрудно получить, что

$$\frac{\partial K_1^\xi}{\partial \xi}=[\bar{P}_\xi-1]\frac{\partial K_0}{\partial x},\quad \frac{\partial K_1^\gamma}{\partial \gamma}=[\bar{P}_\gamma-1]\frac{\partial K_0}{\partial s}, \tag{12}$$

где

$$P_s=\hat{\lambda}/\lambda(s),\ \hat{\lambda}=\left[\int_0^1\frac{ds}{\lambda(s)}\right]^{-1}.$$

К равенству (10) применим оператор $\int_0^1\int_0^1[\cdot]\,d\xi\,d\gamma$ и учитывая периодичность по ξ и γ функций K_1, K_2 получим уравнение

$$\frac{\partial K_0}{\partial t}+\int_0^1\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_1^\xi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\xi)\frac{\partial K_0}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\gamma)+\frac{\partial K_1^\gamma}{\partial \gamma}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda(\gamma)\frac{\partial K_0}{\partial s}\right)\right]d\xi\,d\gamma+\frac{\lambda_0^2\beta_i^2}{2G_1(t)}K_0(1,s,t)K_0(x,1,t)+F(x,s,t)=0. \tag{13}$$

Данное уравнение является следствием уравнения (10) и представляет собой необходимое условие разрешимости (10) в классе 1-периодических функций. В [2, 3] показана и достаточность условия (13).

Учитывая (12) перепишем (13) в виде

$$\frac{\partial K_0}{\partial t}+\hat{\lambda}\left[\frac{\partial^2 K_0}{\partial s^2}+\frac{\delta^2 K_0}{\partial x^2}\right]+\frac{\lambda_0^2\beta_i^2}{2G(t)}K_0(1, s, t)K_0(x, 1, t)+F(x, s, t)=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) называется усредненным, $\hat{\lambda}$ — эффективным коэффициентом. В соответствии (1·) записываются краевые условия для $K_0(x, s, t)$

$$\frac{\partial K_0}{\partial s}(x, 0, t)=\frac{\partial K}{\partial x}(0, s, t)=0$$

$$\beta_i K_0(x, 1, t)-\frac{\partial K_0}{\partial s}(x, 1, t)=0$$

$$\beta_i\left(1+\frac{\lambda_0\beta_i}{2G_1(t)}\right)K(1, s, t)-\frac{\partial K(1, s, t)}{\partial x}=-\frac{2G_3(1, t)\beta_i\delta(1-s)}{\lambda_0}$$

$$K(x, T, s)=-2G_4(s)\delta(x-s).$$

Предложенная методика распространяется на стохастический случай. Приведенные алгоритмы реализованы микропроцессорной системой управления формования композиционных материалов.

Литература

1. Рей, У.: Метод управления технологическими процессами. Москва, «Мир», 1983 г.
2. Бахвалов, Н. С., Панасенко, Г. П.: Осреднение в периодических средах. Москва, «Мир», 1983 г.
3. Санчес-Паленсия, Э.: Неоднородные среды и теории колебаний. Москва, «Мир», 1984 г.

J. V. Mihejev, A. M. Banov, Kuybishev, USSR