# NUMERISCHE METHODE ZUR ERMITTLUNG VON SIMULTANEN FUNKTIONEN, DIE MIT INDIREKTER METHODE GEMESSEN WURDEN

K. WENZEL und G. SZÁSZ

Technische Universität H—1521 Budapest, Lehrstuhl für Feinmechanik-Optik

Eingegangen am 15 September 1986
Vorgelegt von Prof. Dr. O. Petrik

## Abstract

A new method for the calculation of color-functions was found by the authors. The applied computer programs give reasonable functions with the data measured on indirect ways.

## Einleitung

In der Meßtechnik werden oft indirekte Methoden verwendet, vor allem dann, wenn die Größe direkt nur umständlich gemessen werden kann. In solchen Fällen werden anstatt der schwer meßbaren Parameter spezielle Größen gewählt, die mit den Parametern in einem bekannten Verhältnis stehen. Aus diesen Größen werden dann die gesuchten Werte errechnet.

Indirekte Meßmethoden wurden im Jahre 1928—31 von Wright und Guild, und 1959 von Stiles, Burch und Speranskaya [1] verwendet, als sie, auf Anforderung der CIE, die Grundlagenmessungen für die Farbenmessung durchgeführt haben. Da auf dem gegebenen technischen Niveau die spektrale Empfindlichkeitskurve der Augen nicht festgestellt werden konnte, wurden statt dessen jene Proportionen der Farbmischung festgestellt, die bei Menschen mit normaler Farberkennung auftreten, wenn aus den drei Spektralfarben, eine wierte hergestellt werden soll. Die Mischungsproportionen hängen von den spektralen Empfindlichkeitskurven der drei farbempfindlichen Rezeptoren ab, so beinhaltet das obrige Meßergebnis indirekt die Daten der spektralen Farbempfindlichkeitskurven. Aus diesen Daten die Kurven bestimmen zu können, muß man Iterationsrechnungen mit sehr vielen Daten durchführen. Diese Rechnung wurde bis jetzt noch nicht durchgeführt, teils deshalb, weil es bis jetzt nicht nötig war, zum Teil aber auch deshalb, weil diese Rechnung ohne Rechner auch nicht möglich ist. Als Grundlagen zu der Farbmessung bieten sich auch heute noch die Proportionen der Farbenmischung an bzw. die aus diesen durch lineare Transformation gewonnene CIE Normfarbwertanteil funktionen [2].

Als die Ansprüche gegenüber der Farbmessung stiegen, sind in unseren Tagen einige Schwierigkeiten vorgetreten die unserer Meinung nach daraus resultieren, daß die Farben nicht nach den spektralen Farbempfindlichkeitskurven des Augen, sondern durch die Proportionen der Farbmischung bestimmt werden. Die Farbenräume, die durch die Proportionen der Farbmischung festgestellt wurden, sind der Empfindung nach nicht linear. Ein vorliegender Unterschied zweier Farben wird von den Rezeptoren in den verschiedenen Richtungen nicht gleich groß empfunden. Das bereitet echte Sorgen bei der Bestimmung der Farbtoleranzen, und regt die Forscher an, mit den Daten der Farbmischung, und durch verschiedene komplizierte Transformationen einen einheitlichen Farbenraum zu verwirklichen. Alle bisherige Versuche waren erfolglos [3].

Durch die heutigen Möglichkeiten der Rechentechnik ist es möglich, daß man an den Daten von Wright und Guild, bzw. Stiles, Burch und Speranskaya stützend, die spektralen Farbempfindlichkeitskurven des Augen bestimmt, ohne, daß dazu die noch immer schwere direkte Methode verwendet werden müßte.

Im weiteren geben wir eine Rechnungsmethode, und die dadurch gewonnene Daten bekannt. Zuerst aber fassen wir jene Forschung-, und Meßergebnisse zusammen auf die wir uns stützen werden.

## Indirekte Meßmethode

Wright und Guild verwendeten bei ihren Messungen ein Dreibereichs-Farbmeßgerät (Kolorimeter), das es ermöglichte, daß die Versuchspersonen eine additive Mischung von Spektralfarben herstellen, und diese Mischfarbe mit einer vierten, variierbaren Farbe vergleichen konnten [1]. Die Proportion der Intensität der verwendeten Spektralfarben konnte gemessen werden. Die Messungen wurden bei einem Sehfeld von 2°, im Wellenlängenbereich 400...700 nm durchgeführt. Als Primärvalenzen wurden rot 650 nm, grün 530 nm, blau 460 nm als monochromatisches Licht verwendet. Guild hat mit 7, Wright mit 36 Versuchspersonen mit normalem trichromatischem Farbenseher die Messungen durchgeführt. Die Ergebnisse wurden dann auf die Primärvalenzen rot 700,0 nm ($R$), grün 546,1 nm ($G$) und 435,8 nm blau ($B$) transformiert. (Diese Transformation ist bestimmt richtig, wenn in allen beiden Primärvalenzensystemen 4—4 solche, zur gleichen Wellenlängen gehörende Mischungsproportionen gefunden werden können, für die es besteht, daß eine gegebene Farbe nur aus den drei Primärvalenzen hergestellt werden kann, nicht aber aus zwei, oder nur eine [1].)

Diese transformierten Meßergebnisse, also die Spektralwertfunktionen $\bar{r}_\lambda, \bar{g}_\lambda, \bar{b}_\lambda$ bilden die Grundlagen des CIE 1931 Farbenmeßsystems [4] (Abb. 1.). In der Abbildung bedeuten $\bar{r}_\lambda, \bar{g}_\lambda, \bar{b}_\lambda$ jene Größen der Farben $R, G, B$, die zur Herstellung einer Farbe der Wellenlänge $\lambda$ verwendet werden sollten. Wir sind bei der Berechnung der spektralen Empfindlichkeitskurven des Augen von diesen Daten ausgegangen.

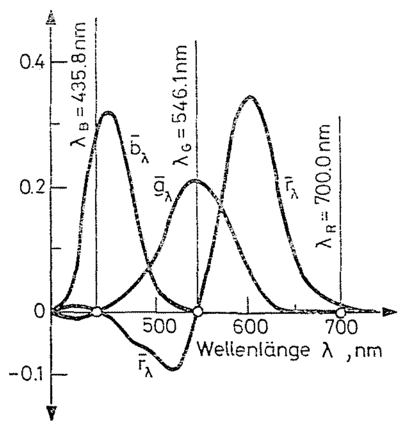


*Abb. 1.* Spektralwertfunktionen, die zum Sehfeld 2° gehören (Primärvalenzen: R = 700,0 nm, G = 526,1 nm, B = 435,8 nm)

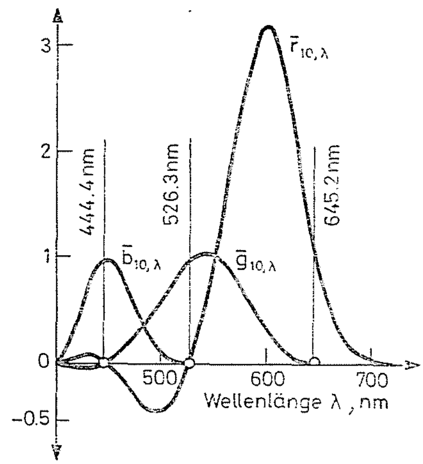


*Abb. 2.* Spektralwertfunktionen die zum Sehfeld 10° gehören (Primärvalenzen: R = 645,2 nm, G = 526,3 nm, B = 444,4 nm)

Stiles und Burch hatten zu den Farbmischversuchen 49 Versuchspersonen im Jahre 1959, Speranskaya hatte 18 Personen auch im Jahre 1959 zur Verfügung bei einem Sehfeld von 10°. Sie hatten verschiedene monochromatische Primärvalenzen verwendet, und dann rechneten sie die Ergebnisse auf die Farben Rot 645,2 nm ($R$), Grün 526,3 nm ($G$), Blau 444,4 nm ($B$) nm. Diese Meßdaten bilden die Grundlage des ergänzenden Farbmeßsystems CIE 1964 (Abb. 2.). Mit diesen Daten haben wir die Berechnungen noch nicht durchgeführt. Die bisher beschriebenen Messungen sind zur zahlenmäßigen Bestimmung von Spektralwertfunktionen $\bar{r}_\lambda, \bar{g}_\lambda, \bar{b}_\lambda$ nicht ausreichend, da sie nur die Mischungsproportionen angeben. Deswegen führten Guild und Wright weitere Messungen zur Bestimmung der relativen Helligkeit der Grundfarbmischung durch. Sie verwendeten dabei die Methode der heterochromatischen Photometrie, und verwendeten die Ergebnisse von Emerson (1918) dann Gibson und Tyndall (1923), und bestimmten die Werte der spektralen Hellempfindlichkeitskurve $V_\lambda$ für das Sehfeld von 2° (Abb. 3.) [1].

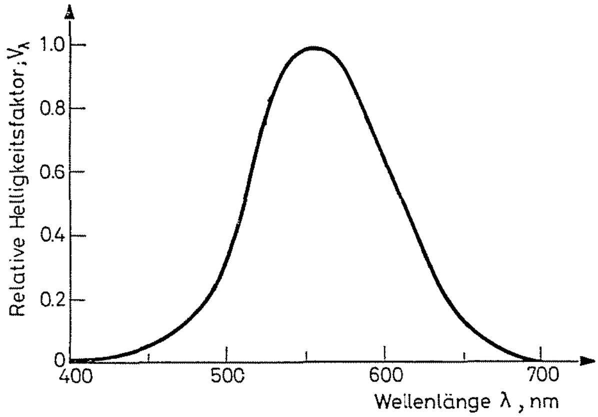


*Abb. 3.* $V_\lambda$ spektrale Hellempfindlichkeitsfunktion

Die Funktion $V_\lambda$ kann durch die lineare Kombination der Spektralwertfunktionen hergestellt werden:

$$V_\lambda = L_R \bar{r}_\lambda + L_G \bar{g}_\lambda + L_B \bar{b}_\lambda$$

wo $L_R$, $L_G$ und $L_B$ Proportionskonstanten sind:

$$L_R : L_G : L_B = 1 : 4.5907 : 0.0601.$$

Bei den Berechnungen wurden auch diese Werte verwendet.

Die Zahlenwerte für die Funktionen $\bar{r}_\lambda$, $\bar{g}_\lambda$, $\bar{b}_\lambda$, $V_\lambda$ haben wir aus [1] entnommen.

## Direkte Maßergebnisse

In den 1950-er Jahren hatten F. Mc. Nichol, Rushton und ihre Mitarbeiter die Absorptionskurven der drei farbempfindlichen Pigmente des Auges bestimmt [5], [6].

Ein mikroskopisch dünner, monochromatischer Lichtstrahl, mit kleiner Intensität, wurde durch das pigmententhaltende aussere Segment eines alleinstehenden Zapfens eines lebendigen Auges durchgelassen. Das reflektierte Licht wurde mit einem Sekundärelektronenvervielfacher gemessen. Eine große Schwierigkeit bedeutete die Tatsache, daß das Justieren des Gerätes nicht mit sichtbarem Licht durchgeführt werden konnte, da dies den optischen Zustand des Auges beeinflußt hatte. Eine weitere Schwierigkeit bedeutete weiterhin, daß der Meßstrahl eine so kleine Intensität besitzte, daß das Signal kaum vom Geräusch getrennt werden konnte. Trotz dieser Schwierigkeiten konnten drei spektrale Kurven bestimmt werden Messungen wurden nur in einigen Wellenlängen, für den roten- und den grünenempfindlichen Pigment bei

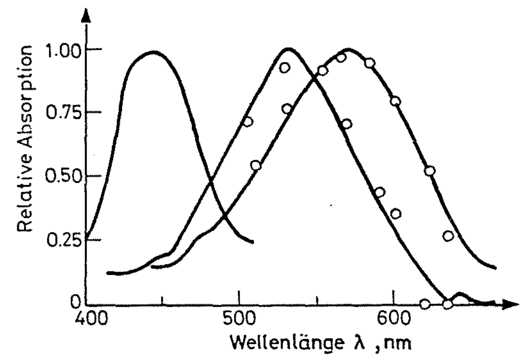


*Abb. 4.* Die relative Absorption der drei lichtempfindlichen Augenpigmente, nach den Messungen von F. Mc. Nichol und W. A. H. Rushton

Menschen, für den blauenempfindlichen Pigment bei Affen durchgeführt. Die unmittelbare Messung kann als nicht gelöstes Problem betrachtet werden. Soweit es aus den Daten feststellbar ist, sieht man, daß die Farbempfindlichkeitskurven ein Maximum besitzen und eine Glockenform haben.

## Der Zusammenhang zwischen den gesuchten Funktionen

Bei der Bestimmung der Spektralwertfunktionen der $\bar{r}_\lambda$, $\bar{g}_\lambda$, $\bar{b}_\lambda$ arbeitet man mit der additiven Mischung der Primärvalenzen rot, grün, blau. Die Grundgesetzte der additiven Farbmischung hat auf Gund der Beobachtungen von Newton der Mathematiker H. G. Grassman beschrieben.

Bei unseren Berechnungen haben wir an Hand der Gesetzmäßigkeiten der additiven Farbmischung folgendes angenommen: Bezeichnen wir die spektralen Empfindlichkeitskurven der empfindlichen Pigmente rot („Protos"), grün („Deuteros") und blau („Tritos") mit $P(\lambda)$, $D(\lambda)$ und $T(\lambda)$. Wenn man eine $Q_\lambda$ Farbe eines monokromatischen Lichtes, mit Wellenlänge $\lambda$ betrachtet, empfinden die Pigmente das Licht ihrer spektralen Empfindlichkeit entsprechend. So gilt also der Zusammenhang:

$$Q_\lambda = P(\lambda)+D(\lambda)+T(\lambda).$$

Wenn wir annehmen, daß die Protos-, Deuteros-, und Tritos Pigmente unabhängig funktionieren, kann $Q_\lambda$ als eine dreidimensionale Vektorgöße behandelt werden.

$Q_k$ soll eine Mischfarbe sein, die aus den Spektrumfarben $Q_{\lambda 1}$ und $Q_{\lambda 2}$, durch einer additiven Mischung entstand, wo $q_{\lambda 1}$ und $q_{\lambda 2}$ die Proportionalitätsfaktor von

$Q_{\lambda 1}$ und $Q_{\lambda 2}$ sind.

$$Q_k = q_{\lambda 1} Q_{\lambda 1} + q_{\lambda 2} Q_{\lambda 2}.$$

Die Mischfarbe $Q_k$ finden wir nur dann mit der $Q_{\lambda 3}$ Spektralfarbe identisch, wenn alle drei Pigmente dieselbe Lichtmenge empfinden. Es muß also bestehen:

$$P(\lambda_3) = q_{\lambda 1} P(\lambda_1) + q_{\lambda 2} P(\lambda_2)$$
$$D(\lambda_3) = q_{\lambda 1} D(\lambda_1) + q_{\lambda 2} D(\lambda_2)$$
$$T(\lambda_3) = q_{\lambda 1} T(\lambda_1) + q_{\lambda 2} T(\lambda_2).$$

Wir nehmen an, daß diese Zusammenhänge auch auf die additive Farbmischung von drei Spektralfarben gültig sind.

Wie können die gesuchten Verhältnisse aus den indirekten Messergebnissen bestimmt werden?

Wenn man die Proportionen der Farbmischung kennt, können die spektralen Empfindlichkeitskurven des Auges bestimmt werden und dazu muß man 7 Punkte kennen.

$$P(\lambda_x) = r_x \cdot P(\lambda_R) + g_x \cdot P(\lambda_G) + b_x \cdot P(\lambda_B)$$
$$D(\lambda_x) = g_x \cdot D(\lambda_G) + b_x \cdot D(\lambda_B)$$
$$T(\lambda_x) = g_x \cdot T(\lambda_G) + b_x \cdot T(\lambda_B)$$

wo

$$r_x = \frac{\bar{r}_{\lambda x}}{\bar{r}_{\lambda R}}, \quad g_x = \frac{\bar{g}_{\lambda x}}{\bar{g}_{\lambda G}}, \quad b_x = \frac{\bar{b}_{\lambda x}}{\bar{b}_{\lambda B}}.$$

Nach den oben gesagten setzt man voraus, daß

$$b_G = b_R = g_B = g_R = r_B = r_G = 0.$$

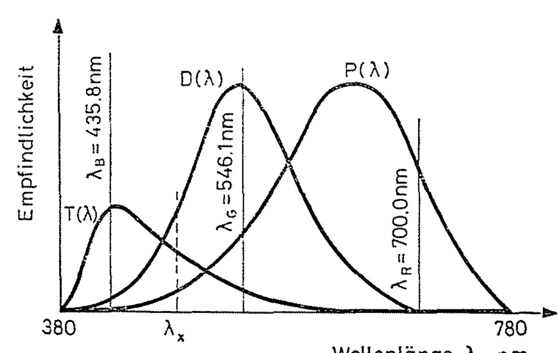


*Abb. 5.* Die gesuchten spektralen Empfindlichkeitsfunktionen für die Pigmente rot („Protos“ $P(\lambda)$), grün („Deuteros“ $D(\lambda)$), und blau („Tritos“ $T(\lambda)$)

Um die 7 nötigen Punkte bestimmen zu können nähern wir die Empfindlichkeitskurven mit den folgenden Funktionen:

$$T(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \geqq 660 \text{ nm} \\ a_T b_T c_T (660-\lambda)^{(b_T-1)} e^{-c_T(660-\lambda)^{b_T}} \end{cases} \tag{1}$$

wenn $\lambda < 660$ nm.

Für die Parameter besteht:

$$a_T = \int_{\lambda=660}^{-\infty} T(\lambda)\, d\lambda$$

$$b_T > 1 \quad \text{und} \quad c_T > 0.$$

$$D(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \geqq 700 \text{ nm} \\ a_D b_D c_D (700-\lambda)^{(b_D-1)} \cdot e^{-c_D(700-\lambda)^{b_D}} \end{cases} \tag{2}$$

wenn $\lambda < 700$ nm.

In diesem Fall wird:

$$a_D = \int_{\lambda=700}^{-\infty} D(\lambda)\, d\lambda$$

$$b_D > 1 \quad \text{und} \quad c_D > 0.$$

$$P(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \geqq 780 \text{ nm} \\ a_p b_p c_p (780-\lambda)^{(b_p-1)} \cdot e^{-c(780-\lambda)^{b_p}} \end{cases} \tag{3}$$

wenn $\lambda < 780$ nm.

Weiterhin:

$$a_p = \int_{\lambda=780}^{-\infty} P(\lambda)\, d\lambda$$

$$b_p > 1 \quad \text{und} \quad c_p > 0.$$

Man nimmt den Funktional des Types der minimaler Kosten, und damit erhält man die Zusammenhänge, wie folgt:

$$\frac{1}{T(\lambda_B)} \cdot \sum_{i=1}^{n_1} |T(\lambda_i) - b_i \cdot T(\lambda_B) - g_i T(\lambda_G)|$$

wovon $b_T$ und $c_T$ bestimmt werden können;

$$\frac{1}{D(\lambda_G)} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} |D(\lambda_i) - b_i D(\lambda_B) - g_i D(\lambda_G)|$$

wovon $b_D$ und $c_D$ bestimmt werden können;

$$\frac{1}{P(\lambda_R)} \cdot \sum_{i=1}^{n_3} |P(\lambda_i) - b_i P(\lambda_B) - g_i P(\lambda_G) - r_i P(\lambda_R)|$$

wovon $b_p$ und $c_p$ bestimmt werden können.

Mit der Hilfe des Zusammenhanges $V(\lambda)=P(\lambda)+D(\lambda)+T(\lambda)$ kann $a_T, a_D$ und $a_p$ bestimmt werden:

$$V(\lambda_B) = a_P c_P b_P \cdot 344{,}2^{(b_P-1)} \cdot e^{-c_P 344{,}2^{b_P}} +$$

$$+ a_D b_D c_D 264{,}2^{(b_D-1)} \cdot e^{-c_D 264{,}2^{b_D}} + a_T b_T c_T 224{,}2^{(b_T-1)} \cdot e^{-c_T 224{,}2^{b_T}}$$

$$V(\lambda_G) = a_P b_P c_P \cdot 233{,}9^{(b_P-1)} \cdot e^{-c_P 233{,}9^{b_P}} +$$

$$+ a_D c_D b_D 153{,}9^{(b_D-1)} \cdot e^{-c_D 153{,}9^{b_D}} + a_T b_T c_T 113{,}9^{(b_T-1)} \cdot e^{-c_P 113{,}9^{b_T}}$$

$$V(\lambda_R) = a_P c_P b_P 80^{(b_P-1)} \cdot e^{-c_P 80^{b_P}}$$

$$V(\lambda_B) = 0{,}017\,731\,164$$

$$V(\lambda_G) = 0{,}984\,582\,1$$

$$V(\lambda_R) = 0{,}004\,10$$

Zum Aufsuchen des Minimums haben wir einen komplexen Lernalgorithmus für den Kleinrechner ABC-80, in der BASIC Programsprache ausgearbeitet.

Die Einhaltung der Voraussetzungen wurde mittels Strafbedingungen gesichert. Die Laufzeit betrug 30 Minuten.

$$a_T = 0{,}7904$$

$$b_T = 6{,}7018$$

$$c_T = 2{,}193 \cdot 10^{-16}$$

Für den maximalen Wert von $T(\lambda)$ haben wir bei 448 nm 0,0091 erhalten.

$$a_D = 61{,}7754$$

$$b_D = 4{,}8495$$

$$c_D = 1{,}2067 \cdot 10^{-11}$$

Für den maximalen Wert von $D(\lambda)$ ergab sich bei 530 nm 0.6321.

$$a_p = 46{,}883$$

$$b_p = 6{,}7755$$

$$c_p = 1{,}318 \cdot 10^{-16}$$

Für den maximalen Wert von $P(\lambda)$ ergab sich bei 564,5 nm 0,5357.

Wir haben die Größe der Empfindlichkeit für die benötigten Punkte bestimmt,

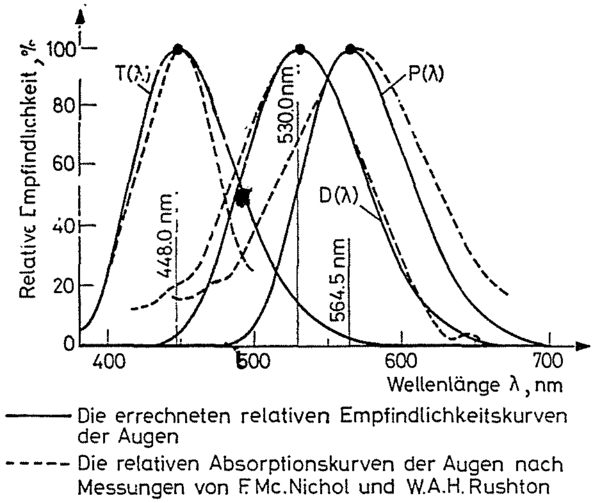


*Abb. 6.* Die durch Berechnung ermittelten Kurven für $P(\lambda)$, $D(\lambda)$, und $T(\lambda)$, im gleichen Masstab wie bei F. Mc. Nichol und W. A. H. Rushton dargestellt

und damit konnten wir mit den Verhältniszahlen die drei spektralen Empfindlichkeitskurven feststellen. Wir haben die Kurven auf das Maximum normiert in Rushtons Diagram eingezeichnet (Abb. 6.).

Die Ergebnisse sind vielversprechend.

## Zusammenfassung

Bis jetzt scheiterten die Versuche, mit welchen man die spektralen Empfindlichkeitsdaten der drei farbempfindlichen Augenpigmente messen wollte. Deshalb wurden die Spektralwertfunktionen $\bar{r}_\lambda$, $\bar{g}_\lambda$, $\bar{b}_\lambda$, die die Grundlagen der Farbmessung bedeuter, durch Farbmischungsmessungen bestimmt. Mit diesen Funktionen können zu jeder beliebigen Farbe drei Farbwerte $X, Y, Z$ zugeordnet werden. Der so definierte Farbraum ist aber nichtlinear. Das hat immer größere Schwierigkeiten zur Folge. Die von uns erarbeitete Methode soll ermöglichen, daß aus den Daten der Farbmischungsmessung mit der Hilfe eines Rechners die spektralen Empfindlichkeitskurven des Auges bestimmt werden.

## Literatur


1. WYSZECKI G., STILES W. S., Color Science (Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulas) New York 1966.
2. Commision Internationale de l'Eclairage COLORIMETRY Second Edition. (Official Recommendations of the International Comission on Illumination). Publication CIE № 15.2 (TC—1.3) 1982.
3. LUKÁCS, GY.: Színmérés, Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1982. (Ungarisch)
4. MSZ 2620/2—72 Fénytechnikai terminológia. A színmérés alapfogalmai és mennyiségei. (Ungarisch)
5. RUSHTON, W. A. H.: Visual Pigments and Color Blindness. (Scientific American) March 1975.
6. RUSHTON W. A. H., Visual Pigments in Man (Scientific American) November 1962.



Dr. Klára WENZEL } H—1521 Budapest
Dr. Gábor SZÁSZ }