DIE GEBROCHENE DIMENSIONSZAHL UND SEINE ANWENDUNG IN DER MIKROGEOMETRIE VON OBERFLÄCHEN IM MASCHINENBAU

B. LACZIK

Lehrstuhl für Fertigungstechnik,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 21. Mai 1985

Vorgelegt von Prof. Dr. M. Horváth

Abstract

The article demonstrates the generalized (fraction) dimension number and some characteristic fractals as objects with fractional dimension. It gives the closed expression of the dimension number according to Hausdorff, and the one of a simplified dimension number, which is suitable for the global qualification of the machined surfaces. The illustrations are the product of a self developed computer program.

Die Verallgemeinerung der Dimensionszahl

Für die natürliche Betrachtung ist der Begriff der Dimensionszahl eindeutig: sie ist gleich Null bei einem Punkt, Eins bei einer Gerade, Zwei bei einer Ebene und Drei bei einem Raum.

In der Algebra sind auch die Dimensionszahlen d der Menge M: $d(\mathrm{M}) = n > 3$ ganze Zahlen.

Die Entdeckung der stetigen, aber allerorts nichtdifferenzierbaren Funktionen warf die Neuinterpretation der Betrachtung der Dimensionszahl auf.

Die allgemeine Erklärung der Dimension stammt von F. Hausdorff [1.] und A. N. Kolmogorov [2.]. Die topologischen Axiome der Dimension sind die Folgenden:

I. Die Dimension der leeren Menge — und nur ihre — ist gleich -1,

II. Die Dimension der topologischen Menge T ist gleich mit $d_P(\mathrm{T}) \leqq n$ für den Punkt $P \in T$, wenn an der Grenze jedes willkürlich kleinen Gebietes ρ des Punktes P $d_\rho(T) \leqq n-1$.

III. $d_P(T) = n$, wenn $d_\rho(T) \leqq n-1$, aber $d_P(T) > n-1$.

IV. $d(T) = n$, wenn für alle $P \in T$ $d_P(T) = n$ ist.

V. $d(T) = \infty$, wenn $d(T) > N$ ist für beliebige Zahlen $N > 0$.

Dieses Axiomensystem gibt die Möglichkeiten für die gebrochene Dimensionszahl auf.

Die Bestimmung der Dimensionszahl der gegebene Form geschieht folgendermassen:

Es sei eine Folge der Länge $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$. Definieren wir die Abschnitte (Quadrate oder Würfel) mit der Länge a_i $(1 \leq i \leq n)$. Für die dichteste Deckung (oder Ausfüllung) der Form sind N_i Stücke der Abschnitte (Quadrate oder Würfel) erforderlich. Wenn a_i genügend klein ist, ist die Gleichung erfüllt

$$N_i = \left(\frac{1}{a_i}\right)^d \tag{1}$$

für $d = \text{const}$. Die Dimensionszahl von Hausdorff ist aus Gl. (1)

$$d = \frac{\log N_i}{\log \dfrac{1}{a_i}}. \tag{2}$$

Regelmässigen Fractaloberflächen

In Abb. 1. sind die erste drei Schritte der Konstruktion der Kurve von Koch dargestellt. Für die Deckung der Kurve sind die Abschnitte mit der Länge

$$a_i = \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

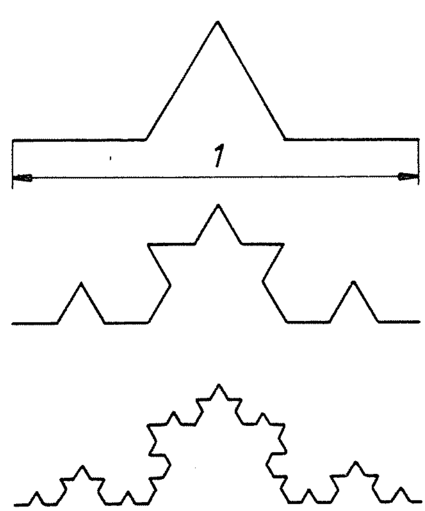

Abb. 1

nötig im i-ten Schritt. Die Zahl der Abschnitte für die völlige Deckung beträgt

$$N_i = 4^i.$$

Die Dimensionszahl ist also

$$d = \frac{i \cdot \log 4}{i \cdot \log 3} = 1{,}2619\ldots$$

unabhängig von i.

In Abb. 2. ist der erste und der zweite Schritt der Konstruktion des Schwammes von Menger dargestellt. Für die Ausfüllung des Körpers sind die Würfel mit der Länge

$$a_i = \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

nötig im i-ten Schritt. Die Zahl der Würfel für eine völlige Ausfüllung beträgt

$$N_i = 20^i.$$

Die Dimensionszahl ist also für den Schwamm von Menger

$$d = \frac{i \cdot \log 20}{i \cdot \log 4} = 2{,}7268\ldots$$

auch unabhängig von i.

Die ähnlichen, regelmäßigen Objekte bezeichnet die Geometrie als Fractalen [3.].

Nach Benoit Mandelbrot ist bekannt, daß sehr viele natürliche Objekte (z. B. die Oberflächen der Wolken, die alten Gebirge, usw.) Fractaleigenschaften haben.

Fractaldimension im Maschinenbau

Die Form der in üblicher Weise hergestellten Werkstücke weicht von der geometrisch idealen Oberfläche ab. Die Abweichungen sind nach DIN 4760 die Folgenden:

1. Formabweichungen
2. Welligkeit
3. Rillen
4. Riefen, Schuppen, Kuppen
5. Gefügestruktur
6. Gitterbau des Werkstoffes.

Die meßtechnisch erfaßte Oberfläche besteht aus der Überlagerung von Gestaltabweichungen der 1—4. Ordnung.

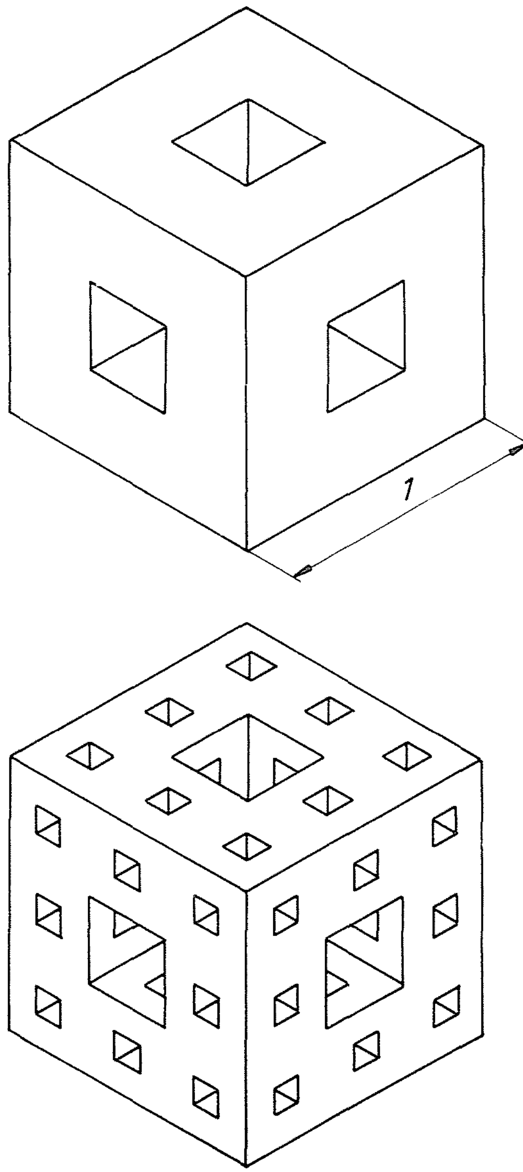

Abb. 2

Die das Werkstück umhüllende Oberfläche ähnelt einem Gebirge, das Taltiefen zwischen 0,02 und 100 µm, und Höhenabstände, die das 4- und 50-fache der Taltiefen betragen können, aufweist. Die Wellentiefen liegen in derselben Größenordnung, doch sind die Wellenabstände 100-bis mehr als 1000-fach größer. Die Absolute Größe der Gestaltabweichungen 1. und 2.

Ordnung ergibt sich dadurch, daß sie innerhalb der zugelassenen Toleranzgrenzen liegen müssen. Es müssen Vorschriften für die Beuerteilung aufgestellt werden, damit ein abgegebenes Urteil jederzeit und unabhängig von dem benutzten Meßgerät überprüft werden kann [4.].

Im Maschinenbau ist die Funktionalfähigkeit und die Mikrogeometrie der Oberfläche eine sehr bedeutende Frage. Viele und verschiedene Oberflächenparameter sind definiert, aber die ihre Eigenschaften (Rauhtiefe, Glättungstiefe, Wellentiefe, usw.) global charakterisierenden Parameter sind noch unbekannt.

Es scheint, daß die Fractaldimension für die Beschreibung der allgemeinen Gliederung der Oberflächen verwendbar ist.

Es sei auf der MeßlänGE L die Rauhigkeitskoordinaten $y_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, N)$ mit äquidistanscher Abstanz a gegeben. Es sei

$$a=\frac{L}{N}. \tag{3.a}$$

Der Mittelwert der Rauhigkeitskoordinaten y_i beträgt

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i. \tag{4.a}$$

Erfüllen sie die Bedingung

$$\bar{y}>a. \tag{5}$$

Für die Deckung des i-ten Punktes sind

$$n_i=\begin{cases} \operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a}, & \text{wenn} \quad \dfrac{y_i}{a}=\operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a} \\ \operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a}+1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.a}$$

zahlige Quadrate mit der Länge a nötig.

Die Fractaldimension des Profiles ist gleich mit

$$d=\frac{\log \sum_{i=1}^{N} n_i}{\log \dfrac{1}{a}}. \tag{7.a}$$

Wenn

$$n_i \cong \frac{y_i}{a} \tag{8}$$

aufgrund der Gl. (7.a)

$$\hat{d}=\frac{\log \sum_{i=1}^{N} y_i}{\log N-\log L}+1. \tag{9.a}$$

Weiter nach Gl. (4.a)

$$\hat{d}=\frac{\log \bar{y}+\log N}{\log N-\log L}+1. \tag{10.a}$$

Einzusehen, daß im Falle $a \to 0$

$$\lim_{a\to 0} d=\lim_{a\to 0.} \hat{d}$$

Wenn für alle y_i

$$0 \leqq y_i \leqq a$$

gilt, daß

$$d=\hat{d}=1$$

mit der Betrachtung übereinstimmen.

Es seien auf dem Bereich $L \times L$ die Rauhigkeitskoordinaten $y_i \geqq 0$ $(i=1, 2, \ldots, N^2)$, und

$$a=\frac{L}{N}. \tag{3.b}$$

Der Mittelwert der Rauhigkeitskoordinaten ist

$$\bar{y}=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N^2} y_i. \tag{4.b}$$

Für die Deckung des i-ten Gitterpunktes sind

$$n_i=\begin{cases} \operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a}, & \text{wenn } \dfrac{y_i}{a}=\operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a} \\[2ex] \operatorname{ent}\dfrac{y_i}{a}+1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.b}$$

zahlige Würfel von der Länge a nötig.

Die Fractaldimension ist analog zu Gl. (7.a)

$$d=\frac{\log \sum_{i=1}^{N^2} n_i}{\log \dfrac{1}{a}} \tag{7.b}$$

und zu Gl. (9.a) und (10.a) gibt es

$$\hat{d} = \frac{\log \sum_{i=1}^{N^2} y_i}{\log N - \log L} + 1 \tag{9.b}$$

$$\hat{d} = \frac{\log \bar{y} + 2 \log N}{\log N - \log L} + 1. \tag{10.b}$$

Für die Grenzwerte ist

$$\lim_{a \to 0} d = \lim_{a \to 0} \hat{d}$$

und im Falle

$$0 \leqq y_i \leqq a$$

$$d = \hat{d} = 2$$

stimmt auch mit der Betrachtung überein.

Herstellung der Fractalen mit Microcomputer

Der Autor entwickelte einige Programme zur Konstruktion und Darstellung der $1 < d < 2$ („Kurve") und $2 < d < 3$ („Oberflächen") Fractalen. Die Koordinaten y_i stellte das Programm mit Zufallszahlgenerator. Die Zufallszahlen sind gleichmäßig verteilt, die Ergebnisse sind im Abb. 3. und Abb. 4. dargestellt.

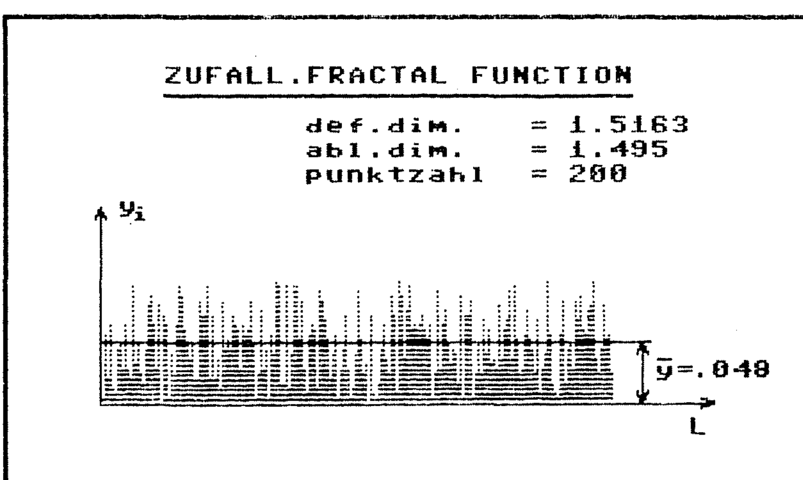

Abb. 3

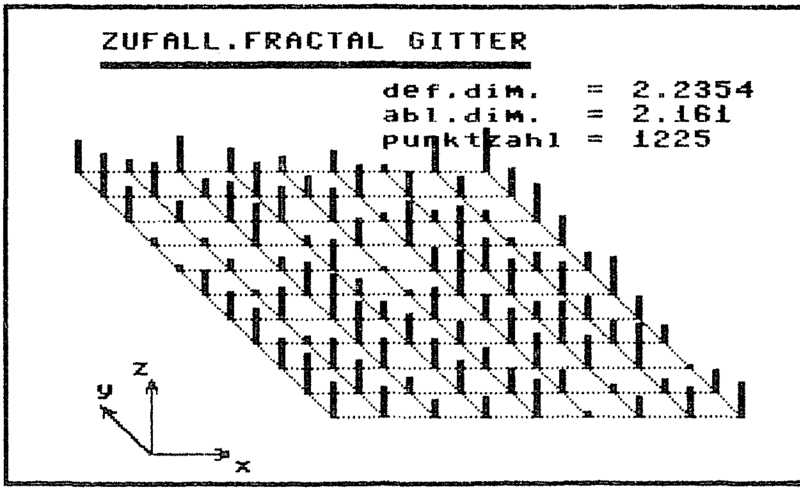

Abb. 4

Die Hausdorff'sche Dimensionszahl d charakterisiert topologisch die allgemeine Gliederung der Kurve bzw. der Oberfläche. Die ableitende Dimensionszahl $\hat{d}$ im Falle $a \rightarrow 0$ konvergiert zu d, aber seine Herstellung ist einfacher. Aus den in der Maschinenbautechnik angewandten Oberflächenprüfsmethoden und ihren Meßergebnissen wird die ableitete Dimensionszahl bestimmt.

Zusammenfassung

Der Artikel demonstrierte die allgemeine (gebrochene) Dimensionszahl und einige repräsentative Fractale, als Objekte mit gebrochener Dimensionszahl.

Er gibt die geschlossene Formel für die Bestimmung der Hausdorff'schen und einer vereinfachten Dimensionszahl von im Maschinenbau angewandten Oberflächen an.

Die Illustrationen stammen von einigen selbstentwickelten Microcomputerprogrammen.

Literatur

1. Hausdorff, F.: Mathem.Annalen *79*, 157, (1919).
2. Kolmogorov, A. N.: Dokl. Akad.Nauk. SSSR *119*, 861, (1958).
3. Mandelbrot, B.: Fractals: Form, Chanche and Dimension Freeman, San Francisco, 1977.
4. Perthen, J.: Werkstattstechn. *51*, 480, (1961).

Bálint Laczik H-1521 Budapest