

DIE BERECHNUNG DER KONTURGESCHWINDIGKEITEN IM EBENEN SPIRALGEHÄUSEMODELL EINER KAPLANTURBINE

O. FÜZY

Lehrstuhl für Strömungsmaschinen,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 29 März 1984

Summary

This paper deals with the calculation of contour-velocity distribution of an open partial spiral case. The changes of height are taken into account with the application of appropriate source distribution. For the calculation of the induced velocity field of source distribution special finite elements are used.

Einleitung

Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes einer offenen Spirale (Halbspirale) ist auch dann ein außerordentlich schwieriges Problem wenn die Voraussetzung idealer Flüssigkeit angenommen wird. Zum Entwurf einer solchen Spirale können aber wichtige Informationen auch schon von wesentlich einfacheren Modellen gewonnen werden. Ein solches Modell kann die ebene Strömung in der zur Achse des zentralen Kegels senkrecht liegenden Ebene sein. Bei einem solchen mathematischen Modell muß allerdings der Höhenkoordinaten entsprechend mit einer quellenbehafteten Strömung gerechnet werden.

Die vorgelegte Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes dieses ebenen Modells. Zur Erleichterung der Berechnung der Quelleninduktion werden speziell zu diesem Problemkreis definierte finite Elemente angewendet.

gegeben und bekannt und

$$\gamma(z_{K0})=0 \quad (1.5)$$

und für das einfach zusammenhängende Gebiet — wo G für diesen Zweck aufgeschlitzt wurde — ist

$$\oint_K \gamma(z_K) ds_K = 0 \quad (1.6)$$

wobei ds_K die Bogenlänge für ein beliebiges Bogenelement der Kurve K bezeichnet.

2. Die Integralgleichung die die Lösung gibt

Für die Untersuchung wird die Strömung im offenen Spiralgehäuse mit einer ebenen Quellströmung modelliert. Die Quellen-Verteilung ergibt sich aus der veränderlichen Schichtdicke des Gehäuses. Wenn in der Strömungsebene die Geschwindigkeitskomponenten mit c_r , bzw. c_φ bezeichnet werden — entsprechend den Polarkoordinaten r, φ — ist die Quellenintensität

$$\nabla \mathbf{c}(z) = - \left[c_r \frac{\partial}{\partial r} \ln \Delta z + \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \Delta z \right] \quad (2.1)$$

wo Δz die Schichtdicke im Punkt $z(z \in G + K)$ bezeichnet.

Entsprechend der Annahme (1.1) ist

$$\nabla \times \mathbf{c} = 0$$

im ganzen, geschlossenen Strömungsgebiet $G + K$. Das bedeutet aber, daß es ein skalares Potential $\chi(z)$ existiert, mit welchem die Geschwindigkeit in der Form

$$\mathbf{c} = \nabla \chi \quad (2.2)$$

aufgeschrieben werden kann. Entsprechend der Annahme (1.2) ist die Quellenintensität

$$\nabla \mathbf{c} = \nabla^2 \chi = f^*(z)$$

Das Problem führt also zu einer elliptischen Randwertaufgabe. Man sucht ihre Lösung unter den Annahmen (1.2), ..., (1.6). Die allgemeine Lösung des Problems vom obigen Typ gibt die Greensche Integralformel an. Sie dient zur Bestimmung des Potentialfeldes χ . Nach ihrer Ableitung nach dem Ortsvektor gelingt man zu einer Integralgleichung, die das Konjugierte

der Geschwindigkeit durch komplexen Funktionen unmittelbar angibt. Demnach kann das Konjugierte der Geschwindigkeit $\bar{c}(z_0)$ in inneren Punkten des Gebiets G mit der Formel

$$\bar{c}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{\bar{c}(z_K)}{z_K - z_0} dz_K + \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_0 - z} dA(z) \quad (2.3)$$

bestimmt werden. Im Fall ohne Quellen ist $\nabla \mathbf{c} = 0$ und es ergibt sich die wohlbekannte Cauchysche Integralformel, die für die Bestimmung von holomorphen Funktionen dient:

$$\bar{c}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{\bar{c}(z_K)}{z_K - z_0} dz_K.$$

Die Formel (2.3) gilt für die inneren Punkte des Gebiets G . Falls der Punkt z_0 den Rand K über allen Grenzen annähert ($z_0 \rightarrow z_{K0} \in K$), so wird die Formel (2.3) durch folgende ersetzt

$$\bar{c}(z_{K0}) = \frac{\bar{c}(z_{K0})}{2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_K^c \frac{\bar{c}(z_K)}{z_K - z_{K0}} dz_K + \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z)$$

Im Linienintegral auf der rechten Seite soll der Cauchysche-Hauptwert ausgerechnet werden. (Der Buchstabe C über dem Integralzeichen weist darauf hin.) Dieser Zusammenhang, zunächst noch ohne die Einzelheiten, enthält schon die allgemeine Form der Integralgleichung, auf der die Lösung beruht:

$$-\frac{\bar{c}(z_{K0})}{2} + \frac{1}{2\pi i} \oint_K^c \frac{\bar{c}(z_K)}{z_K - z_{K0}} dz_K + \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z) = 0 \quad (2.4)$$

In den beiden ersten Gliedern auf der linken Seite kommen die Randwerte des Konjugierten der Geschwindigkeit vor.

Es ist zweckmäßig die Geschwindigkeitskomponenten q , bzw. γ — die auch in den Annahmen (1.3, 1.6) auftreten — zu verwenden. Nach einfacher Umformung erhält man die Integralgleichung

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma(z_{K0}) - iq(z_{K0})}{2} + \frac{e^{i\theta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{q(z_K) + i\gamma(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| + \\ + \frac{e^{i\theta(z_{K0})}}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Der quellenfreie Fall, zweckmäßige Form der Integralgleichung

Für die quellenfreie Strömung läßt sich Gl. (2.5) vereinfachen. Dann ist nämlich

$$\frac{-\gamma(z_{K0}) + iq(z_{K0})}{2} + \frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{q(z_K) + i\gamma(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| = 0$$

Man spalte diese Gleichung auf den realen und imaginären Teil auf. Der reale Teil ist

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + \operatorname{Re} \left[\frac{-e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{i\gamma(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| \right] = \\ = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{q(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + \oint_K^c K_1(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K| = \\ - \oint_K^c K_2(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K| \end{aligned} \quad (3.1)$$

Der imaginäre Teil ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[\frac{-e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{i\gamma(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| \right] = \\ = \frac{q(z_{K0})}{2} - \operatorname{Im} \left[\frac{-e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \oint_K^c \frac{q(z_K)}{z_{K0} - z_K} |dz_K| \right] \end{aligned}$$

oder

$$\oint_K^c K_2(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K| = \frac{q(z_{K0})}{2} + \oint_K^c K_1(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K| \quad (3.2)$$

Die Kernfunktionen K_1 und K_2 der Integralgleichungen (3.1) und (3.2) sind in der Literatur [1] zu finden. Dementsprechend ist K_1 stetig und K_2 hat im Punkt $z_{K0} = z_K$ einen Pol.

Die Gl. (3.1) ist also eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art mit stetigem Kern, die Gl. (3.2) die von erster Art mit singulärem Kern.

Im weiteren braucht man nur die Gl. (3.1).

Es ist

$$K_1(z_K, z_{K0}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{K0} - x_K) \sin \vartheta(z_{K0}) - (y_{K0} - y_K) \cos \vartheta(z_{K0})}{(x_{K0} - x_K)^2 + (y_{K0} - y_K)^2}$$

und

$$K_2(z_K, z_{K0}) = \frac{-1}{2\pi} \frac{(x_{K0} - x_K) \cos \vartheta(z_{K0}) + (y_{K0} - y_K) \sin \vartheta(z_{K0})}{(x_{K0} - x_K)^2 + (y_{K0} - y_K)^2}$$

4. Das quellenbehaftete Feld

Das Flächenintegral in Gl. (2.5) wird diskutiert. Aus den Gleichungen (2.5) und (3.1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + \oint_K K_1(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K| &= - \oint_K K_2(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K| + \\ &+ \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Der Ausdruck

$$F^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z) \right\}$$

sei untersucht. Entsprechend (1.2) ist $\nabla \mathbf{c}(z) = f^*(z)$ reell. Dieses beachtend ist

$$F^* = - \int_G K_2(z_K, z_{K0}) f^*(z) dA(z)$$

und so gilt für das quellenbehaftete Problem die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + \oint_K K_1(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K| &= \\ &= - \int_K^c K_2(z_K, z_{K0}) \cdot q(z_K) |dz_K| - \int_G K_2(z, z_{K0}) f^*(z) dA(z) \end{aligned}$$

Das Problem in Zusammenhang mit dem Flächenintegral wird mit einem speziellen finiten Element gelöst. Der Grundgedanke der Methode ist folgendes: Das Gebiet G wird auf solche Teilgebiete G_i aufgeteilt, die drei Bedingungen erfüllen.

1. Das Argument des Integrals ist im G_i holomorph und so existiert ihre Stammfunktion.
2. Die Stammfunktion sei — durch annehmbare Näherungen — in geschlossener Form angegeben.
3. Die Stammfunktion sei — durch annehmbare Näherungen — als lineare Kombination der Randwerte von γ angegeben.

4.1. Finite Elemente für die Rechnung des Quellenfeldes

Gehen wir zum Beispiel vom mit den Eckpunkten A, B, C, D definierten Flächenelement aus. Es ist mit den geraden radialen Strecken CA und DB , mit der Spirale AB und dem Bogen CD berandet. Der Bogen CD ist die Schnittlinie

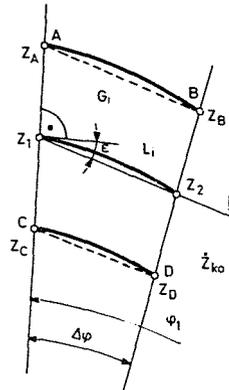


Abb. 2

des zentralen Kegels und der Schraubenfläche des Bodens. Untersuchen wir dieses Gebiet G_i mit Hilfe der Abb. 2.

Das Argument des Flächenintegrals ist $f^*(z)/(z_{K0} - z)$ und wenn $f^*(z)$ im geschlossenen Gebiet G_i holomorph ist, ferner z_{K0} außerhalb G_i liegt, dann ist das Argument des Integrals holomorph. Daraus folgt unmittelbar, daß der Wert

$$\int_L \frac{f^*(z)}{z_{K0} - z} dz = \Phi_2 - \Phi_1$$

der Differenz der Endpunkt-Werte der Stammfunktion Φ gleich ist.

Das vorgeschlagene finite Element sei im Weiteren mit den geraden Strecken \overline{AB} , \overline{BD} , \overline{DC} und \overline{CA} berandet. Dieses Element, als Näherung von G_i ist desto besser je kleiner der Winkel $\Delta\varphi$.

Der Definitionsbereich von z_1 sei die Gerade \overline{CA} , der von z_2 die Gerade \overline{DB} . Mit diesen Definitionen ist

$$z_2 = a_1 + a_2 e^{-i\varphi_A} z_1 \quad (4.2)$$

wo a_1 und a_2 komplex sind und

$$a_2 = \frac{|z_B| - |z_D|}{|z_A| - |z_C|} e^{i\varphi_B}$$

bzw.

$$a_1 = |z_D| e^{i\varphi_B} - a_2 |z_C|$$

Jetzt ist das Flächenintegral

$$\int_{G_i} \frac{f^*(z)}{z_{K0} - z} dA(z) = \int_{z_C}^{z_A} \int_{z_1}^{z_2} \frac{f^*(z)}{z_{K0} - z} \cos \varepsilon |d\zeta| |dz_1|$$

Mit der Einführung der Bezeichnung

$$f(z) = f^*(z) \cos \varepsilon(z) e^{i(\varepsilon + \frac{\pi}{2} - 2\varphi_A)} \quad (4.3)$$

kommt man auf die Form

$$\int_{G_i} \frac{f^*(z)}{z_{K0} - z} dA(z) = \int_{z_C}^{z_A} \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{z_{K0} - z} d\zeta dz_1$$

Wir beschäftigen uns noch im Folgenden mit der Verteilung $f^*(z)$. Da (siehe S.53)

$$f^*(z) = - \left[c_r \frac{\partial}{\partial r} \ln \Delta z + \frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \Delta z \right] \quad (4.4)$$

gehört zu $\Delta z = \text{konst}$ offensichtlich $f(z) = 0$. Aus der Abb. 1 ist ersichtlich, daß bezüglich $f(z)$ zwei charakteristische Gebiete zu unterscheiden sind. Das Gebiet T_1 befindet sich über der Schraubensfläche — die zwischen der Spirale und dem zentralen Kegel liegt —, das Gebiet T_2 befindet sich über dem zentralen Kegel. Im ersten ist

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln \Delta z = 0$$

im zweiten ist

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \Delta z = 0$$

also im T_1

$$f^*(z)_1 = -\frac{c_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \Delta z \quad (4.5)$$

und im T_2

$$f^*(z)_2 = -c_r \frac{\partial}{\partial r} \ln \Delta z \quad (4.6)$$

Bei beiden ist aber die Quellengröße die Funktion der gesuchten Geschwindigkeitsverteilung. Wegen der Komplexität des Problems kann eine Iterationsmethode (Prediktor-Korrektor) vorgeschlagen werden. Für die Güte der Methode hat die Anwendbarkeit des — bei der Berechnung des Flächenintegrals verwendeten — finiten Elementes eine ausgezeichnete Wichtigkeit. Wir versuchen die Funktion $f(z)$ über dem finiten Element zweckmäßig, durch Interpolationsformel, herzustellen. Von diesem Gesichtspunkt werden wir die zum T_1 , bzw. zum T_2 gehörenden finiten Elemente separat behandeln.

4.2. Die finiten Elemente T_1 und T_2 . Interpolationsformel

1. Im finiten Element bezeichnen wir die $f(z)$ Werte in den Punkten A, B, C, D, E mit f_A, f_B, \dots, f_E . Die im ersten Schritt verwendete Interpolationsformel (Prediktor-Gleichung) und das Interpolationspolynom (Korrektor-Gleichung), welches in den weiteren Schritten verwendet wird sind nicht gleich. Der Unterschied ergibt sich aus der Lage des Punktes E (s. Abb. 3). Bei der ersten Schätzung liegt der Punkt E auf der Kurve l_3 (s. Abb. 1), und wenn näherungsweise berechnete Geschwindigkeiten bereits zur Verfügung stehen, stellen wir E in den Halbierungspunkt der geraden Strecke AC . Dementsprechend gibt es je eine Prediktor- und eine Korrektor-Interpolationsformel. Die Formel ist:

$$f = A_0 + A_1 |z_A - z_1| + A_2 \left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_A|} \right) + \\ + \left(A_3 + A_4 \frac{|z_A - z_1|}{|z_A|} \right) |\zeta| \quad (4.7)$$

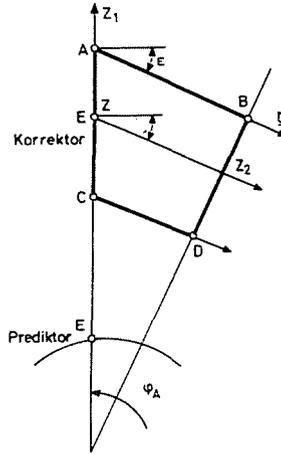


Abb. 3

wo $|z_1| = r$. Das Veränderliche ζ ist entlang der, durch den aktuellen Punkt laufenden und zum Radius unter der Neigung von $-(\pi/2 + \varepsilon)$ stehenden Geraden zu verstehen (s. Abb. 2). Es kann bewiesen werden, daß mit den Definitionen

$$f(f_A, f_B, f_C, f_D, f_E)$$

und

$$A(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$$

$$A = \Phi f \quad (4.8)$$

ist.

Beim **Prediktor-Schritt** ist

$$A_0 = \Phi_{0A} f_A$$

und

$$\Phi_{0A} = 1, \quad \Phi_{0B} = \Phi_{0C} = \Phi_{0D} = \Phi_{0E} = 0$$

$$A_1 = 0,$$

also

$$\Phi_{1A} = \Phi_{1B} = \Phi_{1C} = \Phi_{1D} = \Phi_{1E} = 0$$

$$A_2 = \Phi_{2A} f_A + \Phi_{2E} f_E$$

wo

$$\Phi_{2A} = \frac{|z_A| |z_E|}{|z_E| - |z_A|}$$

$$\Phi_{2E} = -\Phi_{2A}$$

$$\Phi_{2B} = \Phi_{2C} = \Phi_{2D} = 0$$

$$A_3 = \Phi_{3A} f_A + \Phi_{3B} f_B$$

$$\Phi_{3A} = \frac{-1}{|z_B - z_A|}$$

$$\Phi_{3B} = -\Phi_{3A}$$

$$\Phi_{3C} = \Phi_{3D} = \Phi_{3E} = 0$$

$$A_4 = 0,$$

$$\text{also} \quad \Phi_{4A} = \Phi_{4B} = \Phi_{4C} = \Phi_{4D} = \Phi_{4E} = 0$$

Bei den **Korrektor-Schritten** ist

$$A_0 = \Phi_{0A} f_A$$

$$\Phi_{0A} = 1, \quad \Phi_{0B} = \Phi_{0C} = \Phi_{0D} = \Phi_{0E} = 0$$

$$A_1 = \Phi_{1A} f_A + \Phi_{1C} f_C + \Phi_{1E} f_E$$

wo mit den Bezeichnungen

$$\lambda_1 = \frac{|z_A| - |z_C|}{|z_A| |z_C| |z_A - z_C|} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{|z_A| - |z_E|}{|z_A| |z_E| |z_A - z_E|}$$

$$\Phi_{1A} = \frac{1}{|z_A - z_C|} \left[-1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{|z_A - z_C|}{|z_A - z_E|} - 1 \right) \right],$$

$$\Phi_{1C} = \frac{1}{|z_A - z_C|} \left[1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right],$$

$$\Phi_{1E} = \frac{1}{|z_A - z_E|} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\Phi_{1B} = \Phi_{1D} = 0;$$

$$A_2 = \Phi_{2A} f_A + \Phi_{2C} f_C + \Phi_{2E} f_E$$

$$\Phi_{2A} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\frac{1}{|z_A - z_E|} - \frac{1}{|z_A - z_C|} \right],$$

$$\Phi_{2C} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{1}{|z_A - z_C|}$$

$$\Phi_{2E} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{-1}{|z_A - z_E|}$$

$$\Phi_{2B} = \Phi_{2D} = 0;$$

$$A_3 = \Phi_{3A} f_A + \Phi_{3B} f_B$$

wo

$$\Phi_{3A} = \frac{-1}{|z_A - z_B|}$$

$$\Phi_{3B} = -\Phi_{3A}; \quad \Phi_{3C} = \Phi_{3D} = \Phi_{3E} = 0;$$

zuletzt $A_4 = \Phi_{4A} f_A + \Phi_{4B} f_B + \Phi_{4C} f_C + \Phi_{4D} f_D$

wo

$$\Phi_{4A} = \frac{|z_A|}{|z_A - z_C| |z_B - z_A|}$$

$$\Phi_{4B} = -\Phi_{4A}$$

$$\Phi_{4C} = \frac{-|z_A|}{|z_A - z_C| |z_D - z_C|}$$

$$\Phi_{4D} = -\Phi_{4C}$$

$$\Phi_{4E} = 0$$

Die Elemente der Matrix Φ der Gl. (4.8) können also vorher berechnet werden und die Koeffizienten der Interpolationsformel hängen deshalb nur von den Komponenten des Vektors f ab. In der Prediktor-Formel treten nur zu den Punkten A, B, E gehörende f -Werte auf. A und B liegen auf der Spirale, also *am Rand* und E liegt auf der Kurve l_3 (s. Abb. 1) also *auch am Rand*. Wenn man die Prediktor-Formel verwendet bedeutet dies aber, daß die Lösung des quellenbehafteten Falls zu einer Integralgleichung selben Typs, als der des quellenfreien Falls führt. Der Kern der Integralgleichung ist jedoch in beiden Fällen unterschiedlich.

2. Was die Bezeichnungen betrifft, gehen wir bei dem finiten Element T_2 auch aus der Abb. 3 aus. Jetzt werden aber die Punkte E und D nicht gebraucht.

Die Interpolationsformel sei jetzt sowohl im Prediktor, als auch im Korrektor-Fall

$$f = A_0 + A_1 |\zeta| + A_2 \left[\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_A|} \right] \quad (4.9)$$

wo

$$A_0 = \Phi_{0A} f_A, \quad \Phi_{0A} = 1, \quad \Phi_{0B} = \Phi_{0C} = 0$$

$$A_1 = \Phi_{1A} f_A + \Phi_{1B} f_B$$

$$\Phi_{1A} = \frac{-1}{|z_A - z_B|}$$

$$\Phi_{1B} = -\Phi_{1A}, \quad \Phi_{1C} = 0$$

und
$$A_2 = \Phi_{2A} f_A + \Phi_{2C} f_C$$

wo
$$\Phi_{2A} = \frac{|z_A| |z_C|}{|z_C| - |z_A|}$$

$$\Phi_{2C} = -\Phi_{2A}, \quad \Phi_{2B} = 0$$

die Gl. (4.8) gilt also auch jetzt.

Die Prediktor- und die Korrektor-Formel unterscheiden sich jetzt nur im Folgenden. Im Prediktor-Fall ist die Geschwindigkeitskomponente in der Gl. (4.6) für die einzelnen Komponenten von f — bei einem Volumenstrom Q durch das Spiralgehäuse —

bei f_A

$$-c_{rA} = \frac{Q}{2\pi |z_A| \Delta z_A}$$

bei f_B

$$-c_{rB} = \frac{Q}{2\pi |z_B| \Delta z_B}$$

im Punkt C

$$-c_{rC} = \frac{Q}{2\pi |z_C| \Delta z_C}$$

und in D

$$-c_{rD} = \frac{Q}{2\pi |z_D| \Delta z_D}$$

Im Fall des Korrektors werden die Ergebnisse des vorigen Schrittes für die Berechnung der Geschwindigkeiten verwendet.

3. Ausgangspunkt für das Element T_3 ist Abb. 1. Laut Abbildung ist das element T_3 ein Rechteck in der Einlaufstrecke des Spiralgehäuses das mit seinen Eckpunkten A, B, C, D an den Linien l_1 und l_2 ruht.

Im Gebiet T_3 (s. Abb. 1) ist

$$\nabla c(z) = - \left[c_x \frac{\partial}{\partial x} \ln \Delta z + c_y \frac{\partial}{\partial y} \ln \Delta z \right]$$

wo wegen

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \Delta z = 0$$

$$\nabla c(z) = -c_x \frac{\partial}{\partial x} \ln \Delta z = f^*(z)_3$$

Damit ist das Integral F für das Element T_3 mit den Bezeichnungen der Abb. 4.:

$$F = \int_{T_3} \frac{f^*(z)_3}{\zeta_0 - z} dA(z) = \int_{z_A}^{z_C} \int_{z_1}^{z_2} -i \frac{f^*(z)_3}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1 =$$

$$= \chi \int_{z_A}^{z_C} \int_{z_1}^{z_2} \frac{g(z)}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1$$

$$\text{und } g(z) = c_x$$

$$\text{bzw. } \chi = i \frac{\partial}{\partial x} \ln \Delta z |_A$$

wenn die Näherung

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \ln \Delta z = 0 \quad \text{angenommen wird.}$$

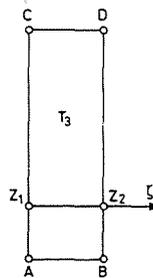


Abb. 4

Da die Eckpunkte des Elements T_3 an den Linien l_1 , bzw. l_2 liegen, braucht man nicht extra Prediktor- und Korrektor-Formel zu wählen. Das obige Integral — welches auf der entsprechenden Interpolationsformel beruht und in geschlossener Form aufgeschrieben werden kann — läßt sich unmittelbar in die Gl. 4.1 einsetzen.

Die Interpolationsformel sei

$$g(z) = A_0 + A_1 |z_1 - z_A| + A_2 |z_1 - z_A|^2 +$$

$$+ \left(A_3 + A_4 \frac{|z_1 - z_A|}{|z_C - z_A|} \right) |\zeta|$$

Anstatt der Gl. 4.8 gilt jetzt die Gl.

$$A = \Phi g$$

wo Φ sich von jenem in Gl. 4.8 nur in der ersten Kolonne unterscheidet:

$$\Phi_{0,0}, \Phi_{1,0}, \Phi_{2,0}, \Phi_{3,0}, \Phi_{4,0}$$

und der Vektor g hat die Form:

$$g(1, g_A, g_B, g_C, g_D).$$

So gelten jetzt folgende Zusammenhänge:

$$A_0 = g_A$$

d. h.

$$\Phi_{0,0} = \Phi_{0,B} = \Phi_{0,C} = \Phi_{0,D} = 0$$

und

$$\Phi_{0,A} = 1$$

Für die Schluckfähigkeit gilt die Gleichung

$$\frac{Q}{\Delta z_A} = \int_{z_A}^{z_C} c_x dz_1 = \int_{z_A}^{z_C} g dz_1 = \int_0^{|z_C - z_A|} g |_{|\zeta|=0} d(|z_1 - z_A|)$$

d. h.

$$\frac{Q}{\Delta z_A} = A_0 |z_C - z_A| + A_1 \frac{|z_C - z_A|^2}{2} + A_2 \frac{|z_C - z_A|^3}{3}.$$

$$A_1 = \Phi_{1,0} + \Phi_{1,A} g_A + \Phi_{1,C} g_C$$

wobei

$$\Phi_{1,0} = \frac{6Q}{\Delta z_A |z_C - z_A|^2}$$

$$\Phi_{1,A} = \frac{-4}{|z_C - z_A|}, \quad \Phi_{1,C} = \frac{-2}{|z_C - z_A|}$$

und

$$\Phi_{1,B} = \Phi_{1,D} = 0$$

$$A_2 = \Phi_{2,D} + \Phi_{2,A} g_A + \Phi_{2,C} g_C$$

d. h.

$$\Phi_{2,B} = \Phi_{2,D} = 0$$

und

$$\Phi_{2,0} = \frac{-6Q}{\Delta z_A |z_C - z_A|^3}$$

$$\Phi_{2,A} = \Phi_{2,C} = \frac{3}{|z_A - z_C|^2}$$

$$A_3 = \Phi_{3,A} g_A + \Phi_{3,B} g_B$$

d. h.

$$\Phi_{3,0} = \Phi_{3,C} = \Phi_{3,D} = 0$$

und

$$\Phi_{3,A} = \frac{-1}{|z_B - z_A|}$$

$$\Phi_{3,B} = -\Phi_{3,A}$$

$$A_4 = \Phi_{4,A} g_A + \Phi_{4,B} g_B + \Phi_{4,C} g_C + \Phi_{4,D} g_D$$

d. h.

$$\Phi_{4,0} = 0$$

$$\Phi_{4,A} = \Phi_{4,D} = \frac{1}{|z_B - z_A|}$$

und

$$\Phi_{4,B} = \Phi_{4,C} = -\Phi_{4,A}$$

Die Matrix Φ ändert sich jetzt während der Iteration nicht und hat die Form:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{1,0} & \Phi_{1,A} & 0 & \Phi_{1,C} & 0 \\ \Phi_{2,0} & \Phi_{2,A} & 0 & \Phi_{2,C} & 0 \\ 0 & \Phi_{3,A} & \Phi_{3,B} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{4,A} & \Phi_{4,B} & \Phi_{4,C} & \Phi_{4,D} \end{bmatrix}$$

4.3 Die durch das finite Element induzierte Geschwindigkeit

Das Interpolationspolynom im Gebiet T_1 ist

$$f = f_A + A_1 |z_A - z_1| + A_2 \left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_A|} \right) + \left(A_3 + A_4 \frac{|z_A - z_1|}{|z_A|} \right) |\zeta|$$

Die ersten drei Glieder auf der rechten Seite hängen von ζ nicht ab, sind bei festem z_1 konstant:

$$K_1 = f_A + A_1 |z_A - z_1| + A_2 \left(\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_A|} \right)$$

Das zweite Integral in Gl. (4.1) ist

$$2\pi \bar{c}_i(z_{K0}) = \int_G \frac{f^*(z)}{z_{K0} - z} dA(z)$$

Der feste Punkt sei jetzt $\zeta_0 = z_{K0}$, dann handelt es sich nur um das Integral

$$\int_G \frac{f^*(z)}{\zeta_0 - z} dA(z)$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist für T_1

$$\begin{aligned} F &= \int_G \frac{f^*(z)_1}{\zeta_0 - z} dA(z) = \int_{z_C}^{z_A} \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)_1}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1 = \\ &= \int_{z_C}^{z_A} \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + \left(A_3 + A_4 \frac{|z_A - z_1|}{|z_A|} \right) |\zeta|}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1 \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir das innere Integral. Mit den Bezeichnungen der Abb. 2 und mit

$$K_2 = \left(A_3 + A_4 \frac{|z_A - z_1|}{|z_A|} \right) e^{i(\varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varphi_1)}$$

da

$$\zeta = z - z_1 \text{ ist}$$

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + K_2 \zeta}{\zeta_0 - z} d\zeta &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + K_2(z - z_1)}{\zeta_0 - z} dz = \\ &= (K_1 - K_2 z_1) \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\zeta_0 - z} + K_2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{\zeta_0 - z} dz = \\ &= (K_1 - K_2 z_1) \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2} + K_2 \left(z_1 - z_2 + \zeta_0 \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2} \right) \end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck ist schon das Argument des äußeren Integrals, für das i -te finite Element ist also

$$\begin{aligned}
 F_i = & \int_{z_C}^{z_A} \left[(K_1 - K_2 z_1) \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2(z_1)} + \right. \\
 & \left. + K_2 \left(z_1 - z_2(z_1) + \zeta_0 \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2(z_1)} \right) \right] dz_1 = \\
 = & - \sum_j \left[(C_4 \Phi_{0,j} - C_{40} \Phi_{2,j} + C_{41} \Phi_{1,j} + C_{61} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j})) \Psi_0 + \right. \\
 & + (C_{42} \Phi_{1,j} + C_{62} \Phi_{4,j} + (C_{80} + C_{43}) (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j})) \Psi_1 - \\
 & - (C_8 + C_4) C_9 \Phi_{4,j} \Psi_2 + C_{44} \Phi_{2,j} \Psi_3 + \\
 & + \left(\Phi_{0,j} - \frac{1}{|z_A|} \Phi_{2,j} + |z_A| \Phi_{1,j} + \zeta_0 C_{60} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j}) \right) (\Psi_4 - \Psi_5) + \\
 & + (C_{30} \Phi_{1,j} + C_{60} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j}) + \zeta_0 C_9 \Phi_{4,j}) \cdot (\Psi_7 - \Psi_6) + \\
 & \left. + C_{31} \Phi_{2,j} (\Psi_8 - \Psi_9) + C_9 \Phi_{4,j} \Psi_{10} \right] \cdot e^{i(\epsilon_j + \frac{\pi}{2} - 2\varphi_A)} \cos \epsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \Delta z \cdot c_{xj},
 \end{aligned}$$

wo $j = A, B, C, D, E$

Für das Typ T_2 gültige Ausdrücke sind nach einfacher Umformung der Vorigen zu bekommen. Folgende Substitutionen führen zum Ergebnis:

$$\Phi_{1,j} = \Phi_{4,j} = 0$$

und an die Stelle von $\Phi_{3,j}$ soll $\Phi_{1,j}$ geschrieben werden. Dies versteht man gleich, wenn man die Interpolationsformeln (4.7) und (4.9) vergleicht.

Beim Element T_1 ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$$

und

$$c_{xj} = c_{\varphi j}$$

bzw. bei T_2 ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial r_j}$$

und

$$c_{xj} = c_{rj}$$

Mit kompakter Bezeichnung ist

$$F_i = - \sum_j K_{T,j} c_{x,j}$$

Die Koeffizienten und Funktionen der Gl. für F_i sind folgende

$$C_4 = \ln a_2 - i\varphi_A, \quad C_{40} = \frac{C_4}{|z_A|}, \quad C_{41} = |z_A| C_4$$

$$C_{42} = e^{-i\varphi_A} C_4, \quad C_{43} = e^{i((\varepsilon_A + \varepsilon_C)/2 + \pi/2 - \varphi_A)} C_4$$

$$C_{44} = e^{i\varphi_A} C_4, \quad C_{30} = e^{-i\varphi_A}, \quad C_{31} = 1/C_{30}$$

$$C_{60} = e^{i((\varepsilon_A + \varepsilon_C)/2 + \pi/2 - \varphi_A)}, \quad C_{61} = C_{60}(a_1 + \zeta_0 C_4)$$

$$C_{62} = \frac{C_{61}}{z_A}, \quad C_5 = (\zeta_0 - a_1)/(a_2 e^{-i\varphi_A})$$

$$C_8 = 1 - a_2 e^{-i\varphi_A}, \quad C_{80} = C_{60} \cdot C_8, \quad C_9 = \frac{1}{z_A} C_{60}$$

$$\Psi_0 = z_C - z_A$$

$$\Psi_1 = \frac{z_A^2 - z_C^2}{2}$$

$$\Psi_2 = \frac{z_A^3 - z_C^3}{3}$$

$$\Psi_3 = -\ln \frac{z_A}{z_C}$$

$$\Psi_4 = (z_A - \zeta_0) \ln (\zeta_0 - z_A) - (z_C - \zeta_0) \ln (\zeta_0 - z_C)$$

$$\Psi_5 = (z_A - C_5) \ln (C_5 - z_A) - (z_C - C_5) \ln (C_5 - z_C)$$

$$\Psi_6 = \frac{z_A^2 - \zeta_0^2}{2} \ln (\zeta_0 - z_A) - \frac{z_C^2 - \zeta_0^2}{2} \ln (\zeta_0 - z_C) +$$

$$+ \frac{1}{2} \zeta_0 (z_C - z_A) + \frac{1}{4} (z_C^2 - z_A^2)$$

$$\Psi_7 = \frac{z_A^2 - C_5^2}{2} \ln (C_5 - z_A) - \frac{z_C^2 - C_5^2}{2} \ln (C_5 - z_C) +$$

$$+ \frac{1}{2} C_5 (z_C - z_A) + \frac{1}{4} (z_C^2 - z_A^2)$$

$$\Psi_8 = \left\{ \begin{array}{l} \left[\ln \zeta_0 \ln(-z_A) - \sum_{n=1}^K \frac{z_A^n}{\zeta_0^n n^2} \right] \\ \left[\frac{\ln^2(-z_A)}{2} + \sum_{n=1}^K \frac{\zeta_0^n}{z_A^n n^2} \right] \end{array} \right\} -$$

wenn:

$$- \left\{ \begin{array}{l} \left[\ln \zeta_0 \ln(-z_C) - \sum_{n=1}^K \frac{z_C^n}{\zeta_0^n n^2} \right] \\ \left[\frac{\ln^2(-z_C)}{2} + \sum_{n=1}^K \frac{\zeta_0^n}{z_C^n n^2} \right] \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{z_A}{\zeta_0} \right| < 1, \quad \left| \frac{z_C}{\zeta_0} \right| < 1 \\ \left| \frac{\zeta_0}{z_A} \right| < 1, \quad \left| \frac{\zeta_0}{z_C} \right| < 1 \end{array} \right.$$

$$\Psi_9 = \left\{ \begin{array}{l} \left[\ln C_5 \ln(-z_A) - \sum_{n=1}^K \frac{z_A^n}{C_5^n n^2} \right] \\ \left[\frac{\ln^2(-z_A)}{2} + \sum_{n=1}^K \frac{C_5^n}{z_A^n n^2} \right] \end{array} \right\} -$$

wenn:

$$- \left\{ \begin{array}{l} \left[\ln C_5 \ln(-z_C) - \sum_{n=1}^K \frac{z_C^n}{C_5^n n^2} \right] \\ \left[\frac{\ln^2(-z_C)}{2} + \sum_{n=1}^K \frac{C_5^n}{z_A^n n^2} \right] \end{array} \right\} \left| \begin{array}{l} \left| \frac{z_A}{C_5} \right| < 1, \quad \left| \frac{z_C}{C_5} \right| < 1 \\ \left| \frac{C_5}{z_A} \right| < 1, \quad \left| \frac{C_5}{z_C} \right| < 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Psi_{10} = & \frac{1}{3} \left\{ (z_A^3 - \zeta_0^3) \ln(\zeta_0 - z_A) - (z_C^3 - \zeta_0^3) \ln(\zeta_0 - z_C) - \right. \\ & - (z_A^3 - C_5^3) \ln(C_5 - z_A) - (z_C^3 - C_5^3) \ln(C_5 - z_C) - \\ & - \zeta_0^3 \left[\frac{z_A - z_C}{\zeta_0} + \frac{z_A^2 - z_C^2}{2\zeta_0^2} + \frac{z_A^3 - z_C^3}{3\zeta_0^3} \right] + \\ & \left. + C_5^3 \left[\frac{z_A - z_C}{C_5} + \frac{z_A^2 - z_C^2}{2C_5^2} + \frac{z_A^3 - z_C^3}{3C_5^3} \right] \right\} \end{aligned}$$

wo allerdings zu beachten ist, daß bei den mehrwertigen Funktionen Werte von der selben Riemannschen Fläche zu entnehmen sind.

Die Interpolationsformel für das Element T_3 ist:

$$g(z) = g_A + A_1 |z_1 - z_A| + A_2 |z_1 - z_A|^2 + \left(A_3 + A_4 \frac{|z_1 - z_A|}{|z_C - z_A|} \right) |\zeta|$$

Mit den Bezeichnungen

$$K_1 = g_A + A_1 |z_1 - z_A| + A_2 |z_1 - z_A|^2$$

und

$$K_2 = A_3 + A_4 \frac{|z_1 - z_A|}{|z_C - z_A|}$$

ist

$$\begin{aligned} \int_{T_3} \frac{f^*(z)_3}{\zeta_0 - z} dA(z) &= \chi \int_{z_A}^{z_C} \int_{z_1}^{z_2} \frac{g(z)}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1 = \\ &= \chi \int_{z_A}^{z_C} \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + K_2 \zeta}{\zeta_0 - z} d\zeta dz_1 \end{aligned}$$

Wie es gezeigt wurde, ist

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + K_2 \zeta}{\zeta_0 - z} d\zeta = (K_1 - K_2 z_1) \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2} + K_2 \left(z_1 - z_2 + \zeta_0 \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - z_2} \right).$$

In diesem Fall ist jetzt

also

$$z_2 = z_1 + |z_B - z_A|$$

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_2} \frac{K_1 + K_2 \zeta}{\zeta_0 - z} d\zeta &= (K_1 - K_2 z_1) \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - |z_B - z_A| - z_1} + \\ &+ K_2 \left(-|z_B - z_A| + \zeta_0 \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - |z_B - z_A| - z_1} \right) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{F}{\chi} \Big|_{T_3} &= \int_{z_A}^{z_C} \left[(K_1 - K_2 z_1) \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - |z_B - z_A| - z_1} + \right. \\ &\left. + K_2 \left(-|z_B - z_A| + \zeta_0 \ln \frac{\zeta_0 - z_1}{\zeta_0 - |z_B - z_A| - z_1} \right) \right] dz_1 \end{aligned}$$

Mit der Einführung von

$$C_{21} = -A_3 |z_B - z_A| - iA_4 z_A \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|},$$

$$C_{22} = iA_4 \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|}$$

$$C_{23} = g_A + iA_1 z_A - A_2 z_A^2 + A_3 \zeta_0 + iA_4 \frac{z_A \zeta_0}{|z_C - z_A|}$$

$$C_{24} = -iA_1 + 2A_2 z_A - A_3 - iA_4 \frac{z_A}{|z_C - z_A|} - iA_4 \frac{\zeta_0}{|z_C - z_A|}$$

$$C_{25} = -A_2 + iA_4 \frac{1}{|z_C - z_A|}$$

bzw.

ist

$$C_5^* = \zeta_0 - |z_B - z_A|$$

$$\begin{aligned} \frac{F}{\chi} = & C_{21} \Psi_0 - C_{22} \Psi_1 + C_{23} (\Psi_5 - \Psi_4) + C_{24} (\Psi_7 - \Psi_6) + C_{25} \Psi_{11} - \\ & - C_{25} \frac{|z_B - z_A|}{3} (\zeta_0 + C_5^*) \Psi_0 + C_{25} \frac{|z_B - z_A|}{3} \Psi_1 \end{aligned}$$

Wenn die Bezeichnung C_5^* verwendet wird, können die Funktionen Ψ_5 und Ψ_7 in die Gleichung eingesetzt werden. Dabei muß man darauf achten, daß jetzt C_5^* an Stelle von C_5 tritt.

Nach Substitutionen und Umordnung gilt für das i -te Element vom Typ T_3 :

$$\begin{aligned} F_i = & \chi_i \sum_{j=0}^D \{ [(D_2 \zeta_0 + D_3) \Phi_{2,j} - D_1 \Phi_{3,j} - (D_4 \zeta_0 + D_5) \Phi_{4,j}] \Psi_0 + \\ & + [D_6 \Phi_{2,j} - D_4 \Phi_{4,j}] \Psi_1 + \\ & + [\Phi_{0,j} + D_{11} \Phi_{1,j} + D_{12} \Phi_{2,j} + \zeta_0 \Phi_{3,j} + D_{13} \zeta_0 \Phi_{4,j}] (\Psi_5 - \Psi_4) + \\ & + [D_{14} \Phi_{1,j} + D_{15} \Phi_{2,j} - \Phi_{3,j} + (D_{16} \zeta_0 - D_{13}) \Phi_{4,j}] (\Psi_7 - \Psi_6) + \\ & + [-\Phi_{2,j} - D_{16} \Phi_{4,j}] \Psi_{11} \} g_j = \chi_i K_{3T} g_0 + \chi_i \sum_{j=A}^D K_{3Tj} c_{xj} \end{aligned}$$

wo

$$g_0 = 1$$

$$c_{xA} = \gamma_A, \quad c_{xC} = -\gamma_C$$

$$c_{xB} = \gamma_B, \quad c_{xD} = -\gamma_D$$

und

$$\begin{aligned}
 D_1 &= |z_B - z_A|, & D_2 &= \frac{2}{3} D_1 \\
 D_3 &= -\frac{1}{3} D_1^2, & D_4 &= -D_2 D_{16} \\
 D_5 &= D_1 D_{13} - D_3 D_{16}, & D_6 &= -\frac{1}{3} D_1 \\
 D_{11} &= iz_A, & D_{12} &= -z_A^2 \\
 D_{13} &= i \frac{z_A}{|z_C - z_A|}, & D_{14} &= -i \\
 D_{15} &= 2z_A, & D_{16} &= \frac{-i}{|z_C - z_A|}
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_4, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_7$ sind auf Seite 69 zu finden. Jetzt enthalten aber die Funktionen Ψ_5 und Ψ_7 die Funktion C_5^* statt $C_5 \cdot C_5^*$ ist auf S.72 definiert. Eine neue Funktion Ψ_{11} ist auch eingeführt worden:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{11} &= \frac{1}{3} [(z_C^3 - \zeta_0^3) \ln(\zeta_0 - z_C) - (z_A^3 - \zeta_0^3) \ln(\zeta_0 - z_A) - \\
 &\quad - (z_C^3 - C_5^{*3}) \ln(C_5^* - z_C) + (z_A^3 - C_5^{*3}) \ln(C_5^* - z_A)]
 \end{aligned}$$

Beim Element vom Typ T_3 ist also

$$F^* = \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\theta(z_{K0})}}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_3} \left(\chi_i K_{3T} g_0 + \chi_i \sum_{j=A}^D K_{3Tj} g_j \right) \right] = F_1^* + F_2^*$$

n_3 ist die Zahl der Elemente vom Typ T_3 , und — wie bereits definiert —

$$g_0 = 1$$

$$g_A = \gamma_A, \quad g_C = -\gamma_C$$

$$g_B = \gamma_B, \quad g_D = -\gamma_D$$

Das letzte Glied der Gl. (4.1) — wobei $\zeta_0 = z_{K0}$ eingesetzt wird — unter Berücksichtigung aller finiten Elemente (ihre Zahl sei $n_0 = n_1 + n_2 + n_3$) ist

$$\begin{aligned}
 F^* &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \int_G \frac{V\mathbf{c}(z)}{z_{K0} - z} dA(z) = \right. \\
 &= \operatorname{Re} \left[- \frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \lim_{\zeta_0 \rightarrow z_{K0}} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=A}^E K_{1Tj} c_{xj} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A}^C K_{2Tj} c_{xj} + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i \left(K_{3T} + \sum_{j=A}^D K_{3Tj} c_{xj} \right) \right\} \right] \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Beim Grenzübergang $\zeta_0 \rightarrow z_{K0}$ verschwinden diejenige logarithmischen Glieder der Funktionen $\Psi_4, \Psi_5, \Psi_6, \Psi_7, \Psi_{10}, \Psi_{11}$, bei denen das Argument des logarithmischen Ausdrucks gleich Null ist. Sonst muß einfach $\zeta_0 = z_{K0}$ eingesetzt werden.

5. Das Iterationsverfahren

Die Geschwindigkeitskomponenten c_{xj} in den Randpunkten — beim Element T_1 z. B. im Punkt A — sind

$$c_{xA} = c_{\varphi A} = \gamma_A \cos \varepsilon_A \quad (5.1)$$

im Allgemeinen ist also

$$c_{xj} = c_{\varphi j} = \gamma_j \cos \varepsilon_j$$

Beim Element T_2

$$c_{xj} = c_{rj}$$

Im ersten Schritt des Iterationsverfahrens werden die Prediktor-Formel verwendet. In diesem Fall für das Typ T_1 ist

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{2A} & 0 & 0 & 0 & \Phi_{2E} \\ \Phi_{3A} & \Phi_{3B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

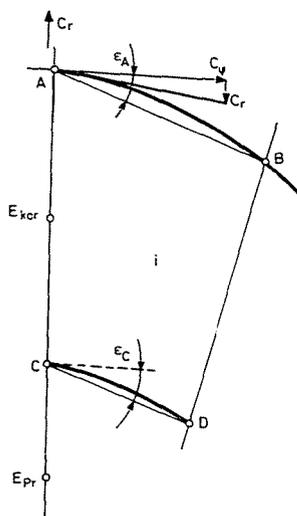


Abb. 5

Daraus folgt, daß jetzt in der Gl. (4.10) nur die Punkte A , B und E_{pr} eine Rolle spielen. Wie aus Abb. 1 und 5 zu sehen ist, liegen A und B auf der Kurve l_2 und E_{pr} liegt auf l_3 . Hier ist also

$$c_{xj} = \gamma_j \cos \varepsilon_j$$

Beim Typ T_2 ist aber

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Phi_{1A} & \Phi_{1B} & 0 \\ \Phi_{2A} & 0 & \Phi_{2C} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

da hier f_D nicht mehr auftritt.

Aus Gl. (4.10) für Elemente T_1 — ihre Anzahl sei n_1 — ist

$$F^* = \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{k0})}}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=A,B,E} K_{T1j} \cos \varepsilon_j \gamma_j \right]$$

wo $j = A, B, E$ und Φ ist mit (5.2) gegeben.

Bei den Elementen T_2 — ihre Anzahl sei n_2 — ist

$$F^* = \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{k0})}}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A,B,C} K_{T2j} c_{rj} \right]$$

wo $j = A, B, C$ und Φ ist in (5.3) erklärt. Die c_{rj} Werte findet man auf der Seite 63. Die entsprechenden Ausdrücke für T_3 sind auf den Seiten 66 (Φ), bzw. 73 (F^*) zu finden.

Die Integralgleichung (4.1) führt zur Lösung:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + K_1(z_K, z_{K0})\gamma(z_K)|dz_K| - \\ & - \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\theta(z_{K0})}}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=A,B,E} K_{T1j} \cos \varepsilon_j \gamma_j(z_K) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i \sum_{j=A}^D K_{T3j} |\gamma_j(z_K)| \right\} \right] = \\ & = - \oint_K K_2(z_K, z_{K0})q(z_K)|dz_K| + \\ & + \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\theta(z_{K0})}}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A,B,C} K_{2Tj} c_{rj} + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i K_{3T} g_0 \right\} \right] \quad \text{I.} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert eine $\gamma(z_K)$ Verteilung, die als erste Näherung zu betrachten ist. Diese Näherung kann durch die Verwendung der Korrektor-Formeln verbessert werden. Dazu braucht man aber die Geschwindigkeitskomponenten c_r und c_φ in jenen Eckpunkten der finiten Elemente, die nicht am Rande liegen. Ihre erste Näherung gewinnt man aus dem Ergebnis der Lösung der Gl. (I).

Die Gl. (2.3) ist (s. S.54):

$$\bar{c}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{\bar{c}(z_K)}{z_K - \zeta_0} dz_K + \frac{1}{2\pi} \int_G \frac{\nabla \mathbf{c}(z)}{\zeta_0 - z} dA(z)$$

wo $\zeta_0 \notin K$, so gibt es kein besonderes Problem im ersten Integral. Das zweite Integral wird mit der erklärten Methode behandelt. Es ist also

$$\bar{c}(\zeta_0) = c_\xi - ic_\eta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint \frac{q(z_K) + i\gamma(z_K)}{\zeta_0 - z_K} |d\zeta_K| + \int_G \frac{f^*(z)}{\zeta_0 - z} dA(z) \right\}$$

bzw. unter Berücksichtigung der Literaturangabe [1] und nach Substitution (s. auch S.75):

$$\begin{aligned} \bar{c}(\zeta_0) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \oint_K (q(z_K) + i\gamma(z_K)) \frac{\zeta_0 - x_K - i(\eta_0 - y_K)}{(\zeta_0 - x_K)^2 + (\eta_0 - y_K)^2} |dz_K| - \right. \\ & - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=A,B,E} K_{T1j} \cos \varepsilon_j \gamma_j - \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A,B,C} K_{T2j} c_{rj} - \\ & \left. - \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i \left(K_{T3} g_0 + \sum_{j=A}^D K_{T3j} |\gamma_j| \right) \right\} \quad (5.4) \end{aligned}$$

ζ_0 gehört bei den Elementen T_1 zu den Punkten C und E , bei T_2 zu A, B, C , bei T_3 gibt es keine ζ_0 Punkte, da alle Eckpunkte an K liegen. Nach Durchführung der Operationen bekommt man schon

$$c(\zeta_0) = c_\xi + ic_\eta$$

und daraus kann auch c_r und c_φ berechnet werden (s. Abb. 6):

$$c_r = c_\xi \cos \varphi + c_\eta \sin \varphi \quad (5.5)$$

$$c_\varphi = c_\xi \sin \varphi - c_\eta \cos \varphi$$

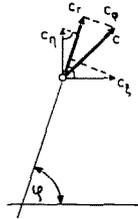


Abb. 6

Die Gl. (I) wird nun mit einer Gl. (II) — wie folgt — ersetzt. Für das Element vom Typ T_1 ist jetzt

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{1A} & 0 & \Phi_{1C} & 0 & \Phi_{1E} \\ \Phi_{2A} & 0 & \Phi_{2C} & 0 & \Phi_{2E} \\ \Phi_{3A} & \Phi_{3B} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{4A} & \Phi_{4B} & \Phi_{4C} & \Phi_{4D} & 0 \end{bmatrix}$$

In den Punkten A und B ist

$$c_\varphi = \gamma \cos \varepsilon$$

in den weiteren Punkten verwendet man die Formeln 5.4.

Bei den Elementen vom Typ T_2 und T_3 ändert sich nichts, (5.3) und (5.4) sind auch weiterhin gültig. Mit ihrer Anwendung gibt jetzt die Lösung folgende Integralgleichung an:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(z_{K0})}{2} + \oint_K K_1(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K| - \\ & - \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=A, B} K_{T1j} \cos \varepsilon_j \gamma_j(z_K) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i \sum_{j=A}^D K_{T3j} |\gamma_j(z_K)| \right\} \right] = \\ & = - \oint_K K_2(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K| + \\ & + \operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=C, D, E} K_{T1j} c_{\varphi j} + \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A, B, C} K_{T2j} c_{r, j} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i K_{T3} \theta_0 \right\} \right] \quad \text{II.} \end{aligned}$$

In der Kenntnis der berechneten $\gamma(z_K)$ Verteilung und mit der wiederholten Anwendung von (5.3) und (5.4), bzw. (II) kann die Näherung verbessert werden.

Ein feineres Elementen-Netz dient zur weiteren Verbesserung der Näherung.

6. Die Numerische Lösung

Während der numerischen Lösung der Aufgabe müssen mehrere Teilprobleme behandelt werden. Folgende sind die wichtigsten Teilprobleme:

1. Die Herleitung der Gleichung der Randkurve, die Berechnung der Bogenlänge, Bestimmung der Rechnungspunkte.
2. Die numerische Berechnung des Integrals, die die Kernfunktion enthält.

3. Die numerische Berechnung des uneigentlichen Integrals.
4. Das Flächenintegral.
5. Die Zusammenstellung des numerischen Algorithmus.

6.1. Die Gleichung der Randkurve, Bogenlänge, Rechnungspunkte

Die im 1. Kapitel definierten Randkurven, bzw. Randkurvenstrecken werden mit Spline-Funktionen angegeben. Das gilt jedoch nicht für die beiden Kurven l_0 und l_3 . l_0 ist eine Gerade, l_3 ist ein Kreis, sie werden als solche angegeben. Alle andere Kurven — auch die geschlossenen — werden als offene Splines angegeben.

Eine Spline-Funktion kann mit einer Anzahl m von Hauptpunkten definiert werden so daß sie aus $m-1$ Bögen besteht. Jeder Bogen ist ein kubisches Parabel. Die Bögen schließen in den Hauptpunkten bis zur zweiten Abteilung stetig aneinander.

Die Zahl m wird von zwei Bedingungen beeinflußt, also wird durch die Erfüllung beider Bedingungen bestimmt.

Erstens müssen die Hauptpunkte so dicht liegen, daß die so erhaltene Spline-Funktion eine befriedigende Näherung der tatsächlichen Randkurve sei. Zweitens müssen die Hauptpunkte so dicht liegen, daß die zu erwartende γ -Verteilung mit einem, durch die Hauptpunkte gezogenen Polynom gut angenähert sei. Es ist zu erwarten, daß wegen beider Bedingungen die Hauptpunkte bei größter Krümmung der Randkurve am dichtesten liegen.

Im Koordinatensystem $x-y$ kann die i -te kubische Parabel mit dem Parameter t in der Form $x_i(t) = a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i$

$$y_i(t) = \alpha_i t^3 + \beta_i t^2 + \gamma_i t + \delta_i \quad (6.1)$$

angegeben werden. Das Parameter t bedeutet die dimensionlose Bogenlänge der i -ten Parabel.

Die Koeffizienten werden mit den Koordinaten der Hauptpunkte (x_i, y_i) und mit den dortigen ersten Ableitungen (\dot{x}_i, \dot{y}_i) bestimmt. Es sind also

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(2t^3 - 3t^2 + 1) + x_{i+1}(-2t^3 + 3t^2) + \\ &\quad + \dot{x}_i(t^3 - 2t^2 + t) + \dot{x}_{i+1}(t^3 - t^2), \\ y_i(t) &= y_i(2t^3 - 3t^2 + 1) + y_{i+1}(-2t^3 + 3t^2) + \\ &\quad + \dot{y}_i(t^3 - 2t^2 + t) + \dot{y}_{i+1}(t^3 - t^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

also $y_i(t)$ hat dieselbe Form, wie $x_i(t)$.

Das Kriterium der Stetigkeit der Spline-Funktionen und ihrer ersten Ableitung in den Hauptpunkten ist automatisch erfüllt, da wir in den Hauptpunkten je ein x_i , y_i , bzw. \dot{x}_i , \dot{y}_i -Wert definiert haben.

Die Stetigkeit der zweiten Ableitung führt zur Bestimmungsgleichung:

$$\dot{x}_i + 4\dot{x}_{i+1} + \dot{x}_{i+2} = -3x_i + 3x_{i+2} \quad (6.3)$$

und zur analogen Gleichung in der y -Koordinate. Entlang einer offenen Linie, die mit m Punkten bestimmt ist, können für die $2m$ unbekanntes x_i , y_i -Werte $2(m-2)$ solche Gleichungen aufgeschrieben werden. Die fehlenden 2×2 Gleichungen werden mit den Randbedingungen in den Endpunkten der offenen Splines bestimmt.

Die Krümmung in den Endpunkten sei Null,

d. h.

$$\ddot{x}_1(t=0) = 0, \quad \ddot{y}_1(t=0) = 0$$

und

$$\ddot{x}_{m+1}(t=1) = 0 \quad \ddot{y}_{m+1}(t=1) = 0$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 &= -3x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_{m-1} + 2\dot{x}_m &= -3x_{m-1} + 3x_m \end{aligned} \quad (6.4)$$

und analog für das y . Damit ist das Gleichungssystem vollständig.

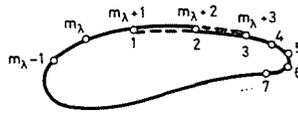


Abb. 7

Die im 1. Kapitel definierten Linien l_1 und l_2 werden als eine betrachtet und um den Schnittpunkt beider Linien (bei der Zunge) stetig abgerundet. Die Endpunkte sind Hauptpunkte, die mit den Nachbar-Hauptpunkten die Richtung der l_1 und l_2 Linien bestimmen. So kann es erreicht werden, daß l_1 , bzw. l_2 die Linie l_0 senkrecht schneidet.

Die Kurven l_4, l_5, \dots, l_n sind geschlossene Linien. Es wird also die Spline-Funktion mit sich selbst überdeckt. Wenn auf der Randkurve $l_\lambda (4 \leq \lambda \leq n)$ m_λ Hauptpunkte liegen, dann wird diese Kurve mit einer, über $m_\lambda + 3$ Hauptpunkte durchlaufende Spline-Funktion angenähert. Dabei sind die Punkte $m_\lambda + 1$, $m_\lambda + 2$, $m_\lambda + 3$ identisch mit den ersten drei Punkten. Nach der Lösung des Gleichungssystems (6.3), (6.4) werden nur die Spline-Strecken $2 \leq i \leq m_\lambda + 1$ beibehalten (s. Abb. 7).

Die Tangenten im Punkt 2 werden als

$$\frac{\dot{x}_2 + \dot{x}_{m\lambda+2}}{2}, \quad \frac{\dot{y}_2 + \dot{y}_{m\lambda+2}}{2}$$

definiert. Die so erhaltene Spline-Funktion ist im Spaltpunkt 2 *praktisch* stetig, obwohl sie in der zweiten Ableitung in diesem Punkt die Stetigkeitsbedingung nicht erfüllt. Das Gleichungssystem (6.3), (6.4) hat eine Tridiagonalmatrix. Dieser Vorteil würde wegfallen, wenn die Erfüllung der exakten Stetigkeitsbedingungen auch im Spaltpunkt erfordert wäre.

Es soll nun die *Bogenlänge* berechnet werden. Die i -te Spline-Strecke wird mit den Teilpunkten $k(1 \leq k \leq 2n_k + 1)$ in $2n_k$ Stücken geteilt. Die Teilpunkte seien so gewählt, daß sie die ganze Bogenlänge der i -ten Strecke in gleiche Längen teilen. Die Teilpunkte liegen also bei den s_k -Werten $s_1 = 0, s_2 = t, s_3 = 2t, \dots, s_{2n_k+1} = 2n_k t$. Aus den Formeln (6.2) können die entsprechenden x_k, y_k Koordinaten genommen werden. Die Bogenlänge der i -ten Spline-Strecke ist

$$\Delta s_i = \int_{t=0}^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (6.5)$$

Hier ist \dot{x}, \dot{y} nach der Ableitung der Formeln (6.2) in den Punkten s_k ($k = 1, 2, \dots, 2n_k - 1$) zu bestimmen, die Integration wird dann mit der Simpson-Regel durchgeführt.

Die numerisch ermittelte Näherung der Bogenlänge sei auch mit Δs_i bezeichnet ($i = 1, 2, \dots, m$) nach Umnumerierung der Indizen die bisher von 2 bis $m_\lambda + 1$ liefen.

Es ist nun jede *offene* Spline-Funktion mit m_λ Hauptpunkten in $m_\lambda - 1$ Strecken, jede *geschlossene* Spline-Funktion in m_λ Strecken geteilt. Die i -te Strecke ist mit n_i Hilfspunkten auf $n_i - 1$ Bögen geteilt. Der Grund für die Wahl von Hilfspunkten ist folgendes. Die in den Hauptpunkten konzentrierten Wirbel induzieren ein Geschwindigkeitsfeld, die in der Kernfunktion des Integrals der Grundgleichung (4.1) enthalten ist. Wenn die, dem Wirbel gegenüberliegende Randstrecke nahe am Wirbel läuft, hat die induzierte Geschwindigkeitsverteilung entlang dieser Strecke ein lokales Maximum und fällt dann in beiden Richtungen stark ab. Um bei der Integration große Fehler zu vermeiden, wird über Hilfspunkte integriert. Die gewünschte relative Fehlerschranke von der Größenordnung vom 1% wird dann erreicht, wenn die Hilfspunkte nicht weiter voneinander, als $0,25 v$ liegen. Hier bezeichnet v die Profilstärke an dieser Stelle. Die Zahl wird also dementsprechend gewählt. Auf den Kurven l_1 und l_2 braucht man gar keine Hilfspunkte aufzunehmen. Der Hilfspunkt j liegt bei der dimensionlosen Bogenlänge s_j ($0 \leq s_j \leq 1$). Wenn sie als Parameter in die Formeln (6.2) eingesetzt wird, bekommt man die x und y

Koordinaten dieses Punktes. Die Entfernung dieses Hilfspunktes vom Streckenbeginn — in Bogenlänge gemessen — ist

$$\sigma_j = \Delta s_i \cdot s_j$$

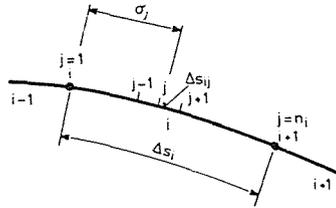


Abb. 8

Δs_i ist aus der Formel (6.5) bekannt (s. Abb. 8.). Wenn die Länge des zwischen den Hilfspunkten j und $j+1$ liegenden Bogens mit Δs_{ij} bezeichnet wird, gilt die Gleichung

$$\Delta s_i = \sum_{j=1}^{n_i-1} \Delta s_{i,j}$$

6.2 Numerische Berechnung des Integrals, die die Kernfunktion enthält

Im Folgenden betrachten wir die numerische Behandlung des Gliedes

$$\int_K = \oint_K K_1(z_K, z_{K0}) \gamma(z_K) |dz_K|$$

der Gl. (I) (s. S. 76).

Die Kernfunktion $K_1(z_K, z_{K0})$ hat — wie es im Kapitel 3 zu finden ist (s. S. 56) — die Form

$$K_1(z_K, z_{K0}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{K0} - x_K) \sin \vartheta(z_{K0}) - (y_{K0} - y_K) \cos \vartheta(z_{K0})}{(x_{K0} - x_K)^2 + (y_{K0} - y_K)^2}$$

Hier bezeichnet z_{K0} den festen, z_K den laufenden Punkt der Integration. Im 1. Kapitel wurde die Randkurve

$$K = \{l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_n\}$$

des untersuchten Gebiets in mehreren Strecken geteilt (s. Abb. 1). Entlang dieser Strecken sind die im vorigen Kapitel definierten Hauptpunkte (mit dem Index i bezeichnet) und, wenn nötig, die Hilfspunkte (mit j bezeichnet) verteilt.

Voraussichtlich werden die Hilfspunkte bei den Linien l_4, l_5, \dots, l_n gebraucht. Auf den Linien l_0, l_1, l_2, l_3 werden vorläufig keine Hilfspunkte aufgenommen. Dies schließt aber die Möglichkeit keinesfalls aus, daß eventuell auch auf diesen Linien Hilfspunkte aufgenommen werden müssen.

Eine für alle Linien erforderliche Regel ist jedoch, daß ein fester Punkt nur ein Hauptpunkt sein kann. Da Gl. (I) immer für einen festen Punkt gilt, können solche Gleichungen genau so viele, wie es Hauptpunkte gibt aufgeschrieben werden.

Nach den Bezeichnungen des vorigen Kapitels wird für die numerische Integration entlang der Linie 1 folgende Formel vorgeschlagen.

$$\int_{K1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m\lambda} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{1i} \gamma_i \quad (\text{I/A})$$

wo

$$e_0 = e_{m\lambda} = 0$$

sonst

$$e_i = 1$$

Die Formel enthält natürlich so viele γ_i Geschwindigkeits-Werte, wie viele Hauptpunkte es gibt. Unbekannt sind aus diesen nur jene, die zu Hauptpunkten der Linien $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ gehören. An der Linie l_3 wird in allen Hauptpunkten der selbe Wert angenommen. Weitere Beschränkungen sind im Kapitel 6,5 erklärt.

Die Verwendung der Formel (I/A) ist für die Stützschaufel nicht vorgeschlagen. Zum Zweck der größeren Genauigkeit müssen an den Linien l_4, l_5, \dots, l_n auch Hilfspunkte gewählt werden. Die Formel (I/A) wird auf die, mit den Hilfspunkten definierten Bögen-Teilen bezogen.

Da γ_i -Werte auch weiterhin nur zu Hauptpunkten gehören, braucht man in den Hilfspunkten interpolieren. Um es zu erreichen, daß die Gln. (I) — die auf Hauptpunkte als feste Punkte aufgeschrieben wurden — nach der numerischen Auflösung zu linearen Gleichungen führen, wird die γ -Verteilung zwischen zwei Hauptpunkten mit der linearen Interpolationsformel

$$\gamma_j = (1 - s_j) \gamma_i + s_j \gamma_{i+1}$$

definiert. Es gilt nun für die i -te (beliebige) Hauptstrecke

$$\int_i = \sum_{j=1}^{n_i} (e_{j-1} \Delta s_{i,j-1} + e_j \Delta s_{i,j}) K_{1i,j} [(1 - s_j) \gamma_i + s_j \gamma_{i+1}]$$

wo mit der Nomenklatur des Kapitels 6.1

$$\Delta s_i = \sum_{j=1}^{n_i-1} \Delta s_{i,j}$$

$$s_j = \frac{\sigma_j}{\Delta s_i}$$

und

$$e_0 = e_{n_i} = 0$$

sonst

$$e_j = 1$$

Den für \int_i erhaltenen Ausdruck verwendet gilt zuletzt für l_λ die Formel

$$\int_{K_1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_\lambda-1} \sum_{j=1}^{n_i} (e_{j-1} \Delta s_{i,j-1} + e_j \Delta s_{i,j}) K_{1i,j} [(1-s_j) \gamma_i + s_j \gamma_{i+1}] \quad (\text{I/B})$$

die (I/A) ersetzt.

6.3 Berechnung des uneigentlichen Integrals

Hier wird die numerische Behandlung des Integrals

$$\int_{K_2} = \oint_K^c K_2(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K|$$

diskutiert. Eine Besonderheit dieses Integrals ist, daß die Verteilung

$$q(z_K)$$

nur entlang der Linien l_0 und l_3 ungleich Null ist. So ist — mit den Bezeichnungen

$$K' = \{l_0, l_3\}, \quad K'' = \{l_1, l_2, l_4, \dots, l_n\}$$

$$\int_{K_2} = \oint_{K'}^c K_2(z_K, z_{K0}) q(z_K) |dz_K|,$$

wobei der feste Punkt sich auf einer beliebigen Linie l_λ befinden kann. Wenn

$$z_K \in K''$$

dann ist

$$\int_{K_2} \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_\lambda} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{2i} q_i \quad (\text{I/C})$$

und

$$e_0 = e_{m\lambda} = 0$$

sonst ist

$$e_i = 1$$

Der Fall unterscheidet sich von diesem, wenn

$$z_{K0} \in K'$$

In diesem Fall spielt eine Besonderheit des Integrals eine Rolle, nämlich die Kernfunktion K_2 hat bei $z_K = z_{K0}$ einen Pol erster Ordnung. Man braucht also den Cauchyschen-Hauptwert zu berechnen.

Die Abbildung 9 stellt eine Strecke von K' dar — in der Umgebung des Punktes z_{K0} . Die Kernfunktion K_2 hat an der Stelle $z_K = z_{K0}$ einen Pol erster Ordnung. Die Funktion K_2 wird mit der — auf die, unter der Neigung $\vartheta(z_{K0})$ laufende Tangente aufgeschriebenen — Funktion K_{2a} in der Umgebung von z_{K0} asymptotisch ungenähert. Letzte sei mit K_{2a} bezeichnet. So hat die Funktion $K_2 - K_{2a}$ auf der Strecke $i-1 \sim i+1$ keinen Pol mehr.

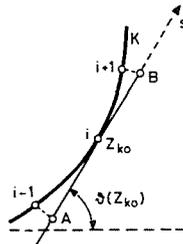


Abb. 9

Der feste Punkt sei auf der Stelle $i=n$, dann wird das zu berechnende Integral folgender Weise aufgeschrieben:

$$\int_{K_2} \cong \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{2i} q_i + \sum_{i=n+1}^{m_2} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{2i} q_i + \right. \\ \left. + (\Delta s_{n-1} + \Delta s_{n+1}) (K_{2n} - K_{2an}) q_n \right\} + \int_A^B K_{2a} q(s) ds$$

wo in der ersten Summe

$$e_0 = e_{n-1} = 0$$

sonst

$$e_i = 1$$

in der zweiten

$$e_n = e_{m\lambda} = 0$$

sonst

$$e_i = 1$$

und

$$ds = |dz|$$

Fraglich ist noch das uneigentliche Integral mit der Kernfunktion K_{2a} . Da wir jetzt so rechnen müssen, als wäre die Kontur die Tangente, so ist

$$s = \sqrt{(x_{n0} - x_n)^2 + (y_{n0} - y_n)^2} = \frac{x_n - x_{n0}}{\cos \vartheta(z_{n0})} = \frac{y_n - y_{n0}}{\sin \vartheta(z_{n0})}$$

also

$$K_{2a} = \frac{1}{2\pi s}$$

In der Nähe des Punktes n , wenn wir $s=0$ im Punkt n definieren

$$q(s) = q_n + \begin{cases} \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta s_n} s & \text{wenn } s > 0 \\ \frac{q_n - q_{n-1}}{\Delta s_{n-1}} s & \text{wenn } s < 0 \end{cases}$$

Nach Substitution und mit dem Cauchyschen Hauptwert berechnet

$$\int_A^B K_{2a}(s) q(s) ds = \frac{q_n}{2\pi} \ln \frac{\Delta s_n}{\Delta s_{n-1}} + \frac{1}{2\pi} (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1})$$

Die endgültige Formel ist also

$$\begin{aligned} \int_{K_2} &\cong \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{2i} q_i \Big|_{e_i=1}^{e_0=e_{n-1}=0} + \right. \\ &+ \sum_{i=n+1}^{m_\lambda} (e_{i-1} \Delta s_{i-1} + e_i \Delta s_i) K_{2i} q_i \Big|_{e_i=1}^{e_n=e_{m\lambda}=0} + \\ &+ (\Delta s_{n-1} + \Delta s_n) (K_{2n} - K_{2an}) q_n \left. \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \left(q_n \ln \frac{\Delta s_n}{\Delta s_{n-1}} + q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{I/D})$$

6.4 Berechnung des Flächenintegrals

In diesem Kapitel wird über drei Glieder der Gleichung (I) (s. S. 76 im Kap. 5) diskutiert. Es sind diese

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=A,B,E} K_{T1j} c_{\varphi j}(z_K) \right) \right] \quad (\text{I/E})$$

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=A,B,C} K_{T2j} c_{rj}(z_K) + \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i K_{T3} g_0 \right\} \right] \quad (\text{I/F})$$

$$\operatorname{Re} \left[-\frac{e^{i\vartheta(z_{K0})}}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_3} \chi_i \sum_{j=A}^D K_{T3j} c_{xj}(z_K) \right] \quad (\text{I/F'})$$

n_1, n_2, n_3 bezeichnen die Zahl der Elemente vom Typ T_1, T_2, T_3 .

Die Besonderheit dieser Glieder ist die komplexe Schreibweise und so ist es zweckmäßig bei der numerischen Behandlung komplexe Arithmetik zu verwenden und erst nach Durchführung der Operationen den reellen Teil zu bestimmen.

Für die Kernfunktionen K_T ergab sich folgendes. Beim Element vom Typ T_1 ist (s. S. 68)

$$\begin{aligned} K_{T1j} = & [(C_4 - C_{40} \Phi_{2,j} + C_{41} \Phi_{1,j} + C_{61} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j})) \Psi_0 + \\ & + (C_{42} \Phi_{1,j} + (C_{80} + C_{43}) (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j}) + C_{62} \Phi_{4,j}) \Psi_1 + \\ & + (-C_8 - C_4) C_9 \Phi_{4,j} \Psi_2 + C_{44} \Phi_{2j} \Psi_3 + \\ & + \left(1 - \frac{1}{|z_A|} \Phi_{2,j} + |z_A| \Phi_{1,j} + z_{K0} C_{60} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j}) \right) (\Psi_4 - \Psi_5) + \\ & + (C_{30} \Phi_{1,j} + C_{60} (\Phi_{3,j} + \Phi_{4,j}) + z_{K0} C_9 \Phi_{4,j}) (\Psi_7 - \Psi_6) + \\ & + C_{31} \Phi_{2,j} (\Psi_8 - \Psi_9) + C_9 \Phi_{4,j} \Psi_{10}] e^{i(\varepsilon_j + \frac{\pi}{2} - 2\varphi_{Aj})} \cos \varepsilon_j \frac{1}{r_j} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \ln \Delta z, \end{aligned} \quad (\text{I/G})$$

beim Typ T_2 :

$$\begin{aligned}
 K_{T2j} = & \left[(C_4 - C_{40} \Phi_{2,j} + C_{61} \Phi_{1,j}) \Psi_0 + (C_{80} + C_{43}) \Phi_{1,j} \Psi_1 + \right. \\
 & + C_{44} \Phi_{2,j} \Psi_3 + \left(1 - \frac{1}{|z_A|} \Phi_{2,j} + z_{K0} C_{60} \Phi_{1,j} \right) (\Psi_4 - \Psi_5) + \\
 & \left. + C_{60} \Phi_{1,j} (\Psi_7 - \Psi_6) + C_{31} \Phi_{2,j} (\Psi_8 - \Psi_9) \right] \cdot e^{i(\epsilon_j + \frac{\pi}{2} - 2\varphi_{Aj})} \cos \epsilon_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \Delta z,
 \end{aligned} \tag{I/H}$$

beim Typ T_3 :

$$\begin{aligned}
 K_{T3j} = & [(D_2 z_{K0} + D_3) \Phi_{2,j} - D_1 \Phi_{3,j} - (D_4 z_{K0} + D_5) \Phi_{4,j}] \Psi_0 + \\
 & + (D_6 \Phi_{2,j} - D_4 \Phi_{4,j}) \Psi_1 + (\Phi_{0j} + D_{11} \Phi_{1,j} + D_{12} \Phi_{2,j} + \\
 & + z_{K0} \Phi_{3,j} + D_{13} z_{K0} \Phi_{4,j}) (\Psi_4 - \Psi_5) + (D_{14} \Phi_{1,j} + D_{15} \Phi_{2,j} - \Phi_{3,j} + \\
 & + (D_{16} z_{K0} - D_{13}) \Phi_{4,j}) (\Psi_7 - \Psi_6) - (\Phi_{2,j} + D_{16} \Phi_{4,j}) \Psi_{11}]. \tag{I/I}
 \end{aligned}$$

Die Formeln der Konstanten C und D — die in den Ausdrücken für K_{T1j} , K_{T2j} und K_{T3j} vorkommen — sind auf den Seiten 69, 73, die Funktionen Ψ auf Seite 69, 70, 73 und die Elemente von Φ auf den Seiten 60—65 zu finden.

6.5 Zusammenstellung des numerischen Algorithmus

Der Prozess beginnt mit der Bestimmung der Hauptpunkte. Gesichtspunkte dazu sind im Kapitel 6.1 zu finden. Nachher wird die Randkurve und die Bogenlänge berechnet und dann können auch die Hilfspunkte bestimmt werden.

Dann wird die numerische Form der Gl. (I) auf alle Hauptpunkte als feste Punkte aufgeschrieben. So erhalten wir so viele Gleichungen, wie Hauptpunkte es gibt.

Das die Kernfunktion enthaltendes Integral wird mit den Ausdrücken (I/A) bzw. (I/B) ersetzt.

Das uneigentliche Integral wird durch die Ausdrücke (I/C), bzw. (I/D) berechnet.

Für das Flächenintegral verwendet man die Formel (I/E), (I/F), (I/F'). Das Argument dieser Formeln ist mit den Ausdrücken (I/G), (I/H), (I/I) gegeben.

Wenn γ in allen Hauptpunkten unbekannt wäre, hätten wir jetzt so viele Unbekannten und lineare Gleichungen, wie Hauptpunkte und die Aufgabe wäre dieses Gleichungssystem zu lösen. Es gibt dagegen mehrere Beschränkungen, die entweder den Wert von gewissen γ_i -s bestimmen, oder dadurch, daß die Zahl der zu erfüllenden Gleichungen zunimmt, zusätzliche Zusammenhänge geben. Anders ausgedrückt nimmt die Zahl der Unbekannten ab, wobei die Zahl der Gleichungen gleich bleibt. Letzten Endes handelt es sich darum, daß es durch die Berücksichtigung der Beschränkungen mehr Gleichungen als Unbekannten gibt. Jene Lösung wird gesucht, die die Gleichungen mit dem kleinsten Fehlerquadrat befriedigt.

Die Beschränkungen sind teilweise auf Randbedingungen, teilweise auf bisher noch nicht betrachtete Strömungsbedingungen zurückzuführen. Ein Teil dieser Bedingungen ruht auf Erfahrungen, die bei der Untersuchung der Strömung in zähen Flüssigkeiten gewonnen wurden.

Die aus den Randbedingungen abgeleiteten Bedingungen sind folgende:

1. Die γ_i und q_i Werte sind in allen Hauptpunkten auf der Linie l_0 gegeben.
2. Auf der Linie l_3 (s. 1. Kapitel)

$$\gamma_i = \text{konst}$$

und

$$q_i = \text{konst}$$

so daß

$$\oint_{l_3} \gamma(z_K) |dz_K| = \gamma_i 2r_3 \pi = \Gamma_3$$

bzw.

$$\oint_{l_3} q(z_K) \Delta z(z_n) |dz_n| = q_i 2r_3 \pi \Delta z_3 = Q_0$$

wobei Q_0 der durch die Linie l_0 strömende Volumenstrom ist.

3. Entsprechend dem 1. Kapitel ist in der Strömung $\nabla \times \mathbf{c} = 0$, also mit der Bezeichnung $K = \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_n\}$ ist

$$\oint_K \gamma(z_K) |dz_K| = 0$$

die schon eine Strömungsbedingung ist und zum Gleichungssystem eine Gleichung hinzufügt.

4. Die vierte Bedingungsgruppe kommt aus der Strömungslehre realer Flüssigkeiten — sie ist die Abströmungsbedingung von Jonkowsky. Um sie wirksam formulieren zu können werden die Austrittskanten aller Stützschaufel

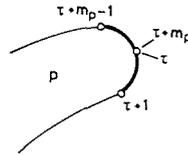


Abb. 10

abgerundet, wie es auf der Abb. 10 zu sehen ist. Wir schreiben folgendes vor:

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau + m_p} = 0$$

und

$$\gamma_{\tau + 1} = -\gamma_{\tau + m_p - 1}$$

Eine ähnliche Vorschrift ist auch um den Schnittpunkt der Linien l_1 und l_2 zu machen.

Zusammenfassung

Die vorgelegte Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Konturgeschwindigkeiten in einem ebenen Halbspiralenmodell. Die Höhenänderung im Spiralegehäuse wird mit einer Quellenbelegung berücksichtigt. Die Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten der Quellenbelegung wird mit speziellen finiten Elementen durchgeführt.

Literatur

1. FÜZY, O.—THUMA, A.: Calculating the velocity distribution of plain airfoil cascade given by its geometry, Proceedings of the Third Conference on Fluid Mechanics and Fluid Machinery. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1969.

Prof. Dr. Olivér FÜZY H-1521 Budapest