VON DER ZÄHNEZAHLWAHL UND VON DEN ZAHNRADEINGRIFFSVERHÄLTNISSEN DER NORMALEN ZAHNRAD-PLANETENGETRIEBE

Z. TERPLÁN

Technische Universität für Schwerindustrie,
H-3515 Miskolc

Eingegangen am 29. März 1984

Summary

The paper deals with — using Prof. G. Pattantyús-Á.'s visual analyzing method — the possibility of reducing formerly tabulated data for choosing of tooth number of planet pinion with double meshing. In order to avoid the interferences of gear-tooth action (undercut, tip-interference and conditions of vicinity and mounting e.t.c.) are of course taken into our investigation. Finally, it may be mentioned that we got additional results of analyzing of gear-tooth action such as: the tooth numbers of sun, planet and ring gears can not have common divisor, the number of teeth for the planet gear can not be even number and increasing of top circle of ring gear let the contact ratio be the same both internal and external meshing.

Als ein Buch von nur nach meiner Dissertation [3], unter dem Titel „Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe" [4] in deutscher Sprache erschienen ist, hat B. *Szőke* in seinen Kritiken [2] einen Satz geschrieben, der folgenderweise lautet: „Er hat die Methode bei dem hervorragendsten ungarischen Professor, von *G. Pattantyús-Á.* erlernt, bei dem er mit seiner Ingenieurarbeit für Maschinenbau angefangen hat."

Wenn das wirklich der Fall ist, dann kann ich jetzt mit umso größerer Freude und Ehre diesen sich gleichfalls mit Zahnrad-Planetengetrieben beschäftigenden Artikel dem Andenken des Professors, G. Pattantyús-Á. (1885—1956) widmen.

Man kann das Zahnrad-Planetengetriebe als *normales* betrachten, wenn das Planetenrad gleichzeitig mit dem außenverzahnten Sonnen- bzw. mit dem innenverzahnten Hohlrad im Eingriff steht *(Abb. 1)*. Trotz des Sonderproblemes des Doppeleingriffes, hat sich dieser Typ in der Praxis am meisten verbreitet.

Im weiteren werden wir dieses Sonderproblem zusammenfassen, das der Doppeleingriff des Planetenrades hauptsächlich auf die Zahnezahlwahl ausübt. wenn man auf den Verzahnungseingriff konzentriert.

Für die Zähnezahlwahl der normalen Zahnrad-Planetengetriebe hat man schon Tabellen zusammengestellt [z. B. [1], [4], [6]]. Der Grundgedanke dazu ist, daß die einfache Formel $z_2+z_4=GN$ befriedigt wird, und daß bei kleinen Zähnezahlen kein Unterschnitt auftreten soll. Da bedeutet z die Zähnezahl, G eine beliebige ganze Zahl, N die Zahl der parallel eingebauten Planetenräder, 2 weist auf das Sonnen-, 4 auf das Hohlrad hin. (In meisten Fällen ist $N=3$.)

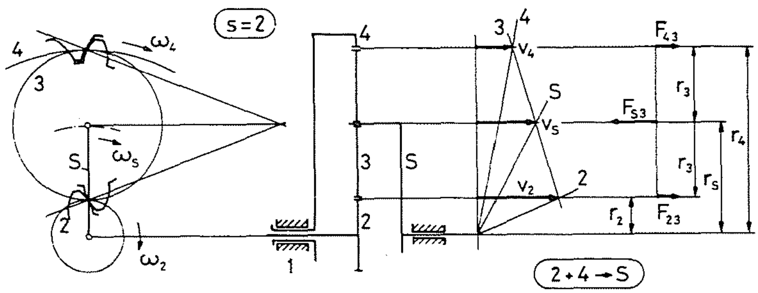

Abb. 1

Die eben erwähnte Formel kann mit Hilfe der Abb. 1 bestätigt werden. Das Bild stellt die Skizze des normalen Zahnrad-Planetengetriebes, die im Eingriff stehenden Zahnradteilkreise, das Geschwindigkeits- und Kraftbild dar. Das Bild zeigt einen solchen Wirkungszustand, bei dem die Wirkung Freiheitsgrad 2 hat mit einem Leistungsfluß, wo die Räder 2 und 4 den Steg antreiben.

Man kann als Montierbarkeitsbedingung betrachten, daß die parallel eingebauten Planetenräder in jedem Moment in gleichem Eingriffszustand sind. Das bedeutet, wenn z. B. das obere Planetenrad gerade im Einzeleingriff in dem Wälzpunkt eingreift, dann müssen die anderen (also das zweite und das dritte) Planetenräder in demselben Eingriffszustand sein. Wenn sich also der Steg mit $\varphi_S=2\pi/N$ Winkel dreht, dann muß sich das Hohlrad mit dem Winkel φ_4 und das Sonnenrad mit dem Winkel φ_2 drehen, und derselbe Eingriffszustand kann mit der folgenden Formel ausgedrückt werden:

$$r_2\varphi_2+r_4\varphi_4=pG\,, \tag{1}$$

wo r den Teilkreisradius, p die Teilung bezeichnet.

Aus dem Geschwindigkeitsbild kann geschrieben werden:

$$v_2+v_4=2v_S, \qquad \text{also} \quad r_2\omega_2+r_4\omega_4=2r_S\omega_S\,, \tag{2}$$

Tabelle 1
Für ein normales Zahnrad-Planetengetriebe mit $N=3$, $\omega_4=0$ und $|u_{23}|=0{,}22$

	i_{2S}	z_2	z_3	z_4
b	10,714	28	122	272
a	10,714	14	61	136
	10,736	19	83	185
c	10,750	24	105	234
	10,758	29	127	283
b	10,800	30	132	294
b	10,800	25	110	245
b	10,800	20	88	196
a	10,800	15	66	147
	10,846	26	115	256
c	10,857	21	93	207
a	10,875	16	71	158
b	10,888	27	120	267
b	10,909	22	98	218
	10,928	28	125	278
b	10,941	17	76	169
	10,956	23	103	229
b	10,965	29	130	289
c	11,000	30	135	300
b	11,000	24	108	240
c	11,000	18	81	180
a	11,000	12	54	120

welche Gleichheit man — mit $\omega=\varphi/t=$konst und mit der Voraussetzung, daß die Zeit t identisch ist — auch in eine neuer Form umschreiben kann:

$$r_2\varphi_2+r_4\varphi_4=2r_S\varphi_S\,. \tag{3}$$

Die Formel (1) und (3) ergeben:

$$pG=2(r_2+r_3)\,\varphi_S=(r_2+r_4)\frac{2\pi}{N}\,. \tag{4}$$

Es ist allgemein bekannt, daß die Teilung $p=\pi m$ und der Teilkreisradius $r=zm/2$ mit dem Modul m ausgedrückt werden können, man kann also aus der Formel (4) die folgende Formel bekommen:

$$GN=\frac{2\pi}{m\pi}\,\frac{(z_2+z_4)\,m}{2}=z_2+z_4\,, \tag{5}$$

wie wir das anfangs schon behauptet haben.

Die Formel (5) ist allgemeingültig, also auch dann, wenn der Freiheitsgrad 1 ist. Wenn z. B. das Hohlrad steht ($\varphi_4=0$), dann kann statt (1) und (3)

$$r_2\varphi_2=pG^* \qquad \text{und} \qquad r_2\varphi_2=2r_S\varphi_S \tag{6}$$

geschrieben werden.

Wenn aber das Sonnenrad steht ($\varphi_2=0$), dann sind die folgenden Formeln gültig:

$$r_4\varphi_4=pG^{**} \qquad \text{und} \qquad r_4\varphi_4=2r_S\varphi_S\,, \tag{7}$$

wo G^* und G^{**} auch ganze Zahlen bedeuten, die nur deswegen als * und ** unterschieden werden, weil G^* und G^{**} nicht gleich sein müssen.

Die Ableitung verläuft in den beiden Fällen nach (4) und (5). Man kann auch das Problem so betrachten, daß die Summe von (6) und (7) den Wert (1) als Ergebnis angibt:

$$\left.\begin{array}{l} r_2\varphi_2=pG^* \\ r_4\varphi_4=pG^{**} \end{array}\right\} r_2\varphi_2+r_4\varphi_4=p(G^*+G^{**})=pG\,. \tag{8}$$

Die Bewegung bei Winkel φ_S wird zwischen dem Sonnen- und dem Hohlrad durch das Planetenrad übergetragen. Die Zähnezahl des Planetenrades kommt in der Formel (5) nicht vor. Wenn man aber die Bezeichnungen $i_{2S}=\omega_2/\omega_S$ und $i_{4S}=\omega_4/\omega_S$ benutzt, kann aus der Formel (2) das Zähnezahlverhältnis

$$u_{42}=\frac{i_{2S}-1}{i_{4S}-1}=\left|\frac{z_4}{z_2}\right| \tag{9}$$

abgeleitet werden, und wenn schon (5) und (9) erfüllt sind, muß noch die Formel

$$z_4=z_2+2z_3 \tag{10}$$

gültig sein.

In *Abb. 2.a* ist z_3 eine gerade Zahl, in dem *Abb. 2.b* eine ungerade Zahl. Bei gerader Zahl von z_3 können die Eingriffe oben und unten nicht in gleicher Zustand sein. Bei ungerader Zahl kann eine Spiegelung des Eingriffes verwirklicht werden. Diese Verschiedenheit spielt bei dem Kraftgleichgewicht der Planetenrader keine Rolle. Wenn man aber nur einen Zahn betrachtet, dann kann die eben erwähnte Verschiedenheit schon eine wesentliche Auswirkung ausüben. Z. B. in dem Wälzpunkt ist immer Einzeleingriff, außer dem Wälzpunkt kann aber auch zweifacher Eingriff vorkommen. In dem Wälzpunkt wechselt die Reibungskraft das Vorzeichen, außer dem Wälzpunkt kommt solcher Vorzeichenwechsel nicht in Frage.

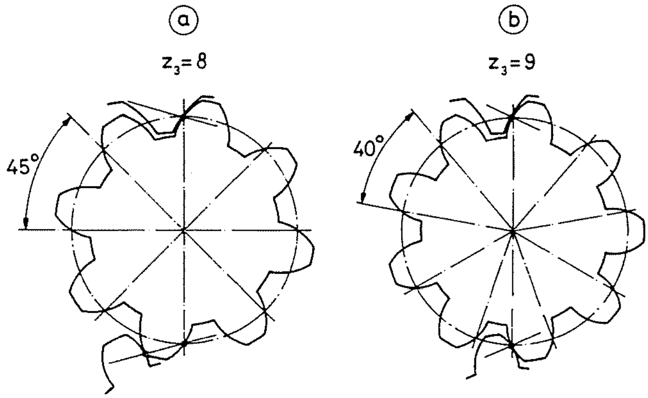

Abb. 2

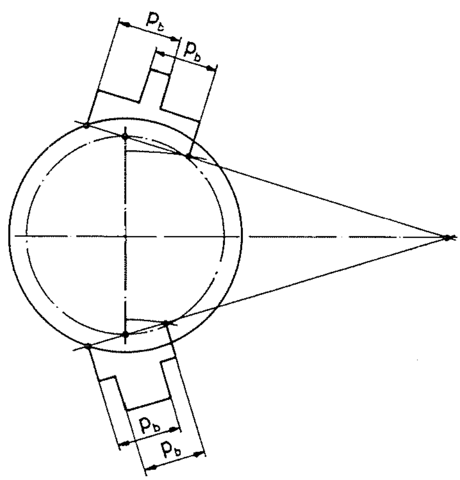

Abb. 3

Weiterhin ist noch interessant, daß der Überdeckungsgrad des Planetenrades verschieden ist ($\varepsilon_{\alpha i} > \varepsilon_{\alpha a}$) je danach, ob der Eingriff mit einer Innen- oder mit einer Außenverzahnung vorhanden ist. Diese Tatsache wirkt auf die Tragfähigkeit eines Zahnes aus, da ja die Grenzen des Einzeleingriffes in den gegenüberliegenden Zahnprofilen nicht in dem gleichen Moment überschritten werden *(Abb. 3)*.

Die Zahnradfachbücher geben den Vorschlag noch, daß die Zähnezahlen keinen gemeinsamen Teiler haben. Wenn nämlich kein gemeinsamer Teiler vorhanden ist. wird jeder Zahn des Planetenrades mit jedem Zahn des Sonnen- und Hohlrades im Eingriff stehen, und das ist im Betrieb sehr vorteilhaft.

Wenn also der Konstrukteur keine Eingriffsstörungen haben will, dann ist es zweckmäßig, die geraden Zähnezahlen des Planetenrades zu vermeiden; weiterhin auch den gemeinsamen Teiler zu übergehen, und zuletzt kann die Gleichung $\varepsilon_{\alpha i} = \varepsilon_{\alpha a}$ durch die Vergrösserung des Kopfkreises von dem Hohlrad verwirklicht werden.

In der Literatur (z. B. [1], [4], [5]) kann man solche Tabellen finden, in denen für die normalen Zahnrad-Planetengetriebe mit $N=3$ Planetenradzahl die Zähnezahlen bei stehendem Hohlrad ($\omega_4=0$, $i_{4S}=0$) ausgerechnet sind. (Die Arbeit von F. *Apró*.) Wenn wir z. B. den Block $|u_{23}|=0{,}22$ betrachten (s. die *Tabelle*), können wir folgende Beschränkungen vorschreiben:

a) Es soll kein Unterschnitt bei dem Sonnenrad vorkommen;

b) Die Zähnezahl des Planetenrades z_3 soll keine gerade Zahl sein;

c) Die Zähnezahlen sollen keinen gemeinsamen Teiler haben.

Aus 22 Zeilen bleiben noch immer 5 Zeilen, aus welchen es für die vorgeschriebene Übersetzung i_{2S} noch immer eine ausreichende Wahl gibt ($i_{2S} = 10{,}736$; $10{,}758$; $10{,}846$; $10{,}928$; $10{,}956$) ohne daß irgendeine Störung vorkommt.

Es ist natürlich möglich das Zahnrad-Planetengetriebe mit den weggelassenen Zähnezahlen zu verwirklichen. In diesen Fällen muß man aber eine V-Verzahnung verwenden, bzw. die Fertigungsgenauigkeit wesentlich erhöhen.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit prüft der Verfasser — anwendend die visuell-analysierende Methode von Professor G. *Pattantyús-Á.* — in den normalen Zahnrad-Planetengetrieben, ob man für die Maschinenkonstrukteure die Daten der bisher veröffentlichten Zähnezahlwahltabellen des doppeltangreifenden Planetenrades vermindern könnte. Der Grund der Verminderung sind: die Störungen der Zahnradeingriffe (Unterschnitt, Interferenz, Montierbarkeit, die Vermeidung des Berührens der benachbarten Planetenräder usw.). Ein weiteres Ergebnis der Zahnradeingriffsprüfung ist, daß die Zähnezahlen der Sonnen-, Planeten- und Hohlräder keinen gemeinsamen Teiler haben sollen, die Zähnezahl des Planetenrades keine gerade Zahl sei und durch Vergrößerung des Kopfkreises von dem Hohlrad der innere und äußere Eingriff von derselben Profilüberdeckungszahl sei.

Literatur

1. APRÓ, F.: Egy-szabadságfokú fogaskerék-bolygóművek tervezésének néhány kérdése. („Einige Konstruktionsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe mit Freiheitsgrad 1", eine Dissertation in ungarischer Sprache.) Miskolc. 1967. 1/74.
2. SZŐKE, B.: Hozzászólás és tartalmi ismertetés Terplán Z. „Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe" c. könyvéhez. (Beitrag und Rezension von dem deutschsprachigen Buch von Z. Terplán.) = Járművek—Mezőgazdasági gépek. *21* 471 (1974); Finommechanika. *14* 85 (1975); Gépgyártástechnológia. *15* 187 (1975).
3. TERPLÁN, Z.: A fogaskerék-bolygóművek méretezési kérdései. („Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe", eine Habilitationsschrift in ungarischer Sprache.) Miskolc. 1965. 1/83. (Gekürzt. = Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei. *15* 449 (1968).
4. TERPLÁN, Z.: Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe. Akadémiai Kiadó. Budapest. 1974. 1/304.
5. TERPLÁN, Z.: Einige Dimensionierungsfragen der Zahnrad-Planetengetriebe. = Congrès Mondial des Engrenages. Paris. 1977. 1/15.
6. TERPLÁN, Z.—APRÓ, F.—ANTAL, M.—DÖBRÖCZÖNI, Á.: Fogaskerék-bolygóművek. („Zahnrad-Planetengetriebe", ein Buch in ungarischer Sprache.) Műszaki Könyvkiadó. Budapest. 1979. 1/258.

Prof. Dr. Zénó TERPLÁN H-3515 Miskolc