

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПЛАСТИНЫ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ НА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Мольнар, Ш.

Кафедра деталей машин Института конструкций машин  
Будапештского технического университета, H-1521 Budapest

Поступило 20 июня 1984 г.

Представлено проф. д-ром Л. Варгой

## Summary

Stress analysis of the plates stiffed by ribs on one side was carried out with the variation methods of Lagrange and Reissner. It was worked out a computational program for solution equation of equilibrium and joining conditional system determined by Lagrange's method considering the different boundary conditions. Numerical results have solution, then former ones.

Занимаемся прочностью и жесткостью прямоугольной ребристой пластины, у которой ребра находятся на одной плоскости пластины, т. е. асимметрично по сравнению со срединной плоскостью пластины. Такие конструкции встречаются в строительстве, мостостроении и машиностроении, особенно при станинах прессовых, штамповочных машин. Необходимая в нынешние дни точность машин и изделий, кроме того, экономное использование материала требуют использования численных методов, которые все лучше отражают исследуемые явления.

Авторы, занимающиеся ребристыми пластинами, использовали теорию тонкой пластины [1], [2], [6]. Они учитывали влияние ребер, добавляя к изгибной и крутильной жесткостям тонкой пластины изгибные и крутильные жесткости ребер, как это показано в уравнении равновесия:

$$(B + B_1^*)w_{,1111} + (2B + B_{12}^* + B_{21}^*)w_{,1122} + (B + B_2^*)w_{,2222} = q, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  — оси декартовой системы координат,

$w$  — функция прогиба тонкой пластины,

$q$  — поверхностная нагрузка,

$B$  — продольная жесткость пластины,

$B_1^*, B_2^*, B_{12}^*, B_{21}^*$  — изгибные и крутильные жесткости ребер относительно осей.

Далее используем следующие обозначения:  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\ ) = ( )_{,ij}$ . Надо заметить, что в этом случае перемещения точек пластины  $u_\alpha = -x_3 w_{,\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Этот метод дает точные результаты только тогда, когда ребра расположены симметрично относительно к срединной плоскости пластины; кроме того, ребра должны быть невысокими и нетолстыми по сравнению с толщиной пластины.

В 40-е годы авторы пользовались теорией анизотропной пластины С. Г. Лехницкого [3], но полученные результаты тоже были правильными только в том случае, если анизотропия имела место в структуре материала (дерево, железобетонные пластины, искусственные материалы, подкрепленные волокнами), а неконструктивная анизотропия, как у ребристых пластин.

Для исследований пользуемся вариационным принципом. Преимущество этого пути состоит в том, что силовые условия сопряжения получаются автоматически и ошибки в знаках исключаются.

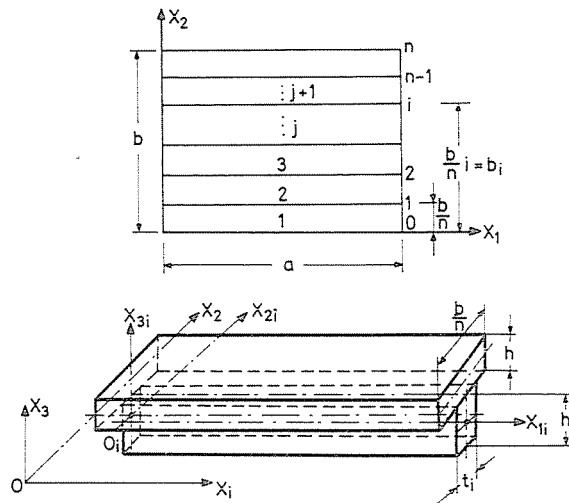


Рис. 1. Ребристая пластина в декартовой системе координат

Исходим из функционала общего вида Ху-Вашицу [5]:

$$\begin{aligned}
 J = \int_V \left[ \sigma_{ij} \left( e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) - U(e_{ij}) + F_i u_i \right] dV + \int_{S_T} T_i^* u_i dS + \\
 + \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - u_i^*) dS, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где  $U$  — упругий потенциал ребристой пластины,  
 $\sigma_{ij}$  — тензор напряжения,  
 $e_{ij}$  — симметричный тензор деформаций,  
 $u_i$  — вектор перемещений,  
 $F_i$  — вектор объемных сил,  
 $T_i^*, u_i^*$  — вектор поверхностных сил и перемещений,  
 $V$  — объем ребристой пластины,  
 $S_T, S_u$  — часть поверхности ребристой пластины, на которой заданы поверхностные силы и перемещения.

### Вариационный принцип Лагранжа

Предположим, что уже заранее выполнены выражения, связывающие деформации и перемещения

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

и на части поверхности  $S_u$  перемещения заданы  $u_i = u_i^*$ ,  $x_i \in S_u$ . Кроме того, пренебрегаем силами  $F_i = 0$ , и действует только  $T_3^* = q(x_1, x_2)$  поверхностная нагрузка, перпендикулярно к срединной плоскости пластины. Так мы получаем из функционала (2) функционал Лагранжа.

$$J_u = \int_V [-U(e_{ij})] dV + \int_{S_T} qw dS. \quad (3)$$

Введем декартову систему координат, как это показано на рис. 1. для пластины и выделим  $i$ -тый элемент.

Разделим пластину и ребро в месте их сопряжения и покажем усилия, действующие между ними на рис. 2.

Учитывая усилия между ребрами и пластиной, можем выразить упругую потенциальную энергию ребристой пластины. Если номер ребер  $n$

$$U = U_l + \sum_{i=1}^n (U_h + U_{h1} + U_{h2} + U_i), \quad (4)$$

где

$$U_l = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2\nu e_{11} e_{22} + (1-\nu)(e_{12}^2 + e_{21}^2)] dV,$$

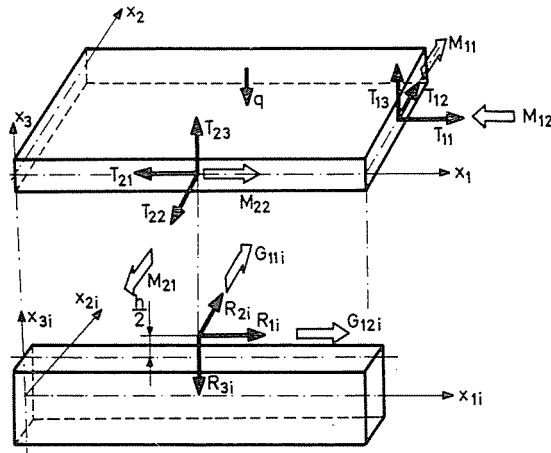


Рис. 2. Усилия, действующие на пластину и ребро

потенциальная энергия изгиба тонкой пластины,

$$U_h = \frac{1}{2} E h_i t_i \int_0^a u_{1i,1}^2 dx_{1i},$$

потенциальная энергия растяжения ребра,

$$U_{h1} = \frac{1}{2} E J_2 \int_0^a w_{,11}^2 dx_{1i}, \quad U_{h2} = \frac{1}{2} E J_3 \int_0^a u_{2i,11}^2 dx_{1i}, \quad (5)$$

потенциальная энергия изгиба ребра ( $J_2, J_3$  инерции поперечного сечения ребра на оси  $x_{2i}, x_{3i}$ ),

$$U_i = \frac{1}{2} G C \frac{h^2}{h_i^2} \int_0^a w_{,12}^2 dx_{1i},$$

потенциальная энергия кручения ребра вокруг оси  $x_{1i}$  ( $C$  — крутящий момент инерции ребра).

Изучая условия сопряжения ребра и пластины при  $x_3 = -\frac{h}{2}$  и  $x_{3i} = \frac{h_i}{2}$ , напомним кинематические условия

$$u_{\alpha i} = u_\alpha + \frac{h+h_i}{2} w_{,\alpha}; \quad w_i = w; \quad \varphi_i = -\frac{h}{h_i} w_{,2} \quad (6)$$

$$u_\alpha^M = u_\alpha - x_3 w_{,\alpha} \quad (\alpha = 1, 2)$$

где  $u_{\alpha i}$  — перемещения точки оси ребра,

$u_{\alpha}$  — перемещения срединной плоскости пластины,

$u_{\alpha}^M$  — перемещения любой точки  $M$  пластины,

$\varphi_i$  — угол кручения ребра вокруг оси  $x_{1i}$ .

Используя (4) и (5), можем переписать (3) в виде формулы (7)

$$\begin{aligned}
 J_{Uw} = & -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V [e_{11}^2 + e_{22}^2 + 2\nu e_{11}e_{22} + (1-\nu)(e_{12}^2 + e_{21}^2)] dV - \\
 & - \sum_{i=1}^n \frac{E}{2} \left[ h_i t_i \int_0^a u_{i1,1}^2 dx_{1i} + J_2 \int_0^a w_{,11}^2 dx_{1i} + J_3 \int_0^a u_{2i,1}^2 dx_{1i} + \right. \\
 & \left. + \frac{Ch^2}{2(1+\nu)h_i^2} \int_0^a w_{,12}^2 dx_{1i} \right] + \int_0^a \int_0^b qw dx_1 dx_2. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Если в функционал (7) мы подставим кинематические условия сопряжения, функционал будет зависеть только от функций перемещений пластины и их производных.

Первая вариация функционала  $u_{\alpha}$  по  $\delta J_{Uw, u_{\alpha}} = 0$ . В силу произвольности независимых вариаций после преобразования Остроградского–Гаусса получим уравнения

$$\begin{aligned}
 2u_{1,11} + (1-\nu)u_{1,22} + (1+\nu)u_{2,12} &= 0, \\
 2u_{2,22} + (1-\nu)u_{2,11} + (1+\nu)u_{1,21} &= 0,
 \end{aligned} \quad (8)$$

которые часто называются уравнениями плоской задачи. Аналогично этому, вариация по  $w$ ,  $\delta J_{Uw, w} = 0$  дает уравнения изгиба тонкой пластины

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{B}. \quad (9)$$

Вариации по  $u_{\alpha}$  и  $w$  содержат интегральные члены, которые появились при преобразовании Остроградского–Гаусса составляют контурные интегралы задачи

$$\int_s (T_n \delta u_n + S_n \delta u_s) ds - \int_s M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int_s \left( Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} \right) \delta w ds, \quad (10)$$

где  $T_n, S_n, Q_n$  — обобщенные продольные, касательные и перерезывающие силы,

$M_n, H_{ns}$  — изгибающие и крутящие моменты,

$u_n, u_s$  — обобщенные перемещения.

Для преобразования контурных интегралов покажем  $j$ -тую полоску пластины, находящуюся между  $i$  и  $i-1$ -тыми ребрами, а также нормаль, касательную и напряжения, действующие на контуре (рис. 3).

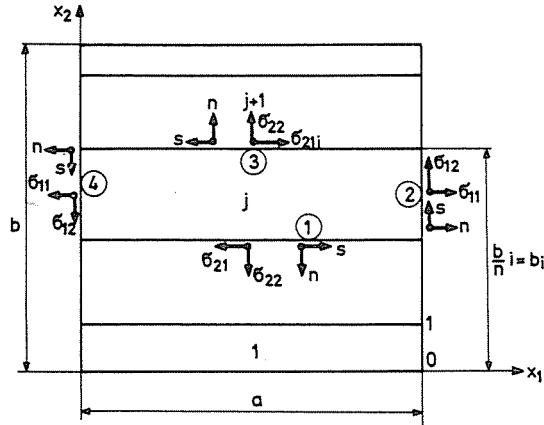


Рис. 3. Напряжения, нормаль-вектор и касательный вектор на контуре  $j$ -той полоски

Члены контурного интеграла, например, на контуре будут следующие ( $0 \leq x_1 \leq a$ )

$$h = -x_2; \quad s = x_1; \quad ds = dx_1; \quad T_n = T_{22}; \quad S_n = -T_{21}; \quad \delta u_n = -\delta u_2;$$

$$\delta u_3 = \delta u_1; \quad \delta \frac{\partial w}{\partial n} = -\delta w_{,2}; \quad H_{ns} = -M_{21}; \quad \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = -M_{21,1}; \quad (11)$$

$$Q_n = -(M_{22,2} + M_{12,1}); \quad M_n = M_{22}; \quad (\beta_n = -\beta_2; \quad \beta_s = \beta_1),$$

$\beta_n, \beta_s$  — углы поворота поперечного сечения.

Аналогично можно было бы выразить члены интегралов на других контурах. Подставляя все эти формулы в интеграл (10), получаем силовые условия сопряжения на месте  $i$ -того ребра:

$$\frac{h}{2(1+\nu)} [(u_{1,2} + u_{2,1})_j - (u_{1,2} + u_{2,1})_{j+1}] - h_i t_i \left( u_{1,11} + \frac{h+h_i}{2} w_{,111} \right)_i = 0,$$

$$\frac{h}{1-\nu^2} [(u_{2,2} + \nu u_{1,1})_j - (u_{2,2} + \nu u_{1,1})_{j+1}] + J_3 \left( u_{2,1111} + \frac{h+h_i}{2} w_{,21111} \right)_i = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& -B\{[w_{,222} + (2-\nu)w_{,112}]_j - [w_{,222} + (2-\nu)w_{,112}]_{j+1}\} + \\
& + \left\{ \left[ Eh_i t_i \left( \frac{h+h_i}{2} \right)^2 + EJ_2 \right] w_{,1111} + Eh_i t_i \frac{h+h_i}{2} u_{1,111} \right\}_i = 0, \\
& B[(w_{,22} + \nu w_{,11})_j - (w_{,22} + \nu w_{,11})_{j+1}] + \left\{ \frac{GCh^2}{h_i^2} w_{,11112} + \right. \\
& \left. + EJ_3 \left[ \frac{h+h_i}{2} u_{2,111} + \left( \frac{h+h_i}{2} \right)^2 w_{,21111} \right] \right\}_i = 0.
\end{aligned}$$

Кинематические условия сопряжения для соседних полосок и ребер мы можем выразить в следующем виде:

$$u_{1j} = u_{1j+1}; \quad u_{2j} = u_{2j+1}; \quad w_j = w_{j+1}; \quad w_{,2j} = w_{,2j+1}. \quad (13)$$

### Вариационный принцип Рейсснера

Во многих случаях удобнее пользоваться функционалом, зависящим не только от вектора перемещений. Предположим, что имеет место условие  $\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}$  тогда  $\sigma_{ij}$  есть функции деформаций. Введем обозначение величины  $\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} e_{ij} - U(e_{ij})$  которая называется дополнительной работой. Имея в виду условия  $u_i = u_i^*$ ;  $F_i = 0$ ;  $T_3^* = q$  из функционала (2), получится функционал найденный Рейсснером.

$$J_{su} = \int_V \left[ -\frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \Phi(\sigma_{ij}) \right] dV + \int_{S_T} q w dS. \quad (14)$$

Функции объемного интеграла состоят из членов, связанных с пластиной и ребрами. Для определения их выразили напряжения в пластине и в ребре на основе рис. 2:

а) напряжения в пластине

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{T_{11}}{h} + \frac{12}{h^3} M_{11} x_3; & \sigma_{22} &= \frac{T_{22}}{h} + \frac{12}{h^3} M_{22} x_3; & \sigma_{33} &\cong 0; \\
\sigma_{12} &= \frac{T_{12}}{h} + \frac{12}{h^3} M_{12} x_3; & \sigma_{13} &= \frac{3T_{13}}{2h^3} (h^2 - 4x_3^2); & \sigma_{23} &= \frac{3T_{23}}{2h^3} (h^2 - 4x_3^2),
\end{aligned}$$

б) напряжения в  $i$ -том ребре (15)

$$\sigma_{11i} = \frac{R_{1i}}{h_i t_i} + \frac{R_{1i}(h+h_i)}{2J_{21}} x_{3i} + \frac{G_{11i}}{J_{21}} x_{3i}; \quad \sigma_{22i} \cong 0; \quad \sigma_{33i} \cong 0;$$

$$\sigma_{12i} = \left[ -G_{12i} + \frac{R_{2i}(h+h_i)}{2} \right] \frac{x_{3i}}{C} + \frac{3R_{2i}}{2h_i t_i^3} (t_i^2 - 4x_{2i}^2);$$

$$\sigma_{13i} = \frac{3R_{3i}}{2h_i^3 t_i} (h_i^2 - 4x_{3i}^2); \quad \sigma_{23i} \cong 0.$$

Мы представим, что по толщине пластины и в ребре перерезывающие и касательные напряжения  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{13i}$ ,  $\sigma_{12i}$  изменяются по параболическому закону. В этом случае перемещения любой точки ребристой пластины выражаются таким образом:  $u_\alpha^M = u_\alpha - w_{,\alpha} x_3 + \beta_\alpha x_3$  [4]. Так, кинематические условия сопряжения пластины и  $i$ -того ребра

$$u_{\alpha i} = u_\alpha + \frac{h+h_i}{2} w_{,\alpha} - \frac{h+h_i}{2} \beta_\alpha, \quad (16)$$

$$w_i = w.$$

Используя формулы (15) и (16), придадим функционалу Рейсснера такой вид [9]

$$J_{\sigma u} = \int_S \left\{ \frac{1}{2E} \left[ \frac{T_{11}^2}{h} + \frac{12}{h^3} M_{11}^2 + \frac{T_{22}^2}{h} + \frac{12}{h^3} M_{22}^2 + 2(1+\nu) \left( \frac{T_{12}^2}{h} + \frac{12}{h^3} M_{12}^2 + \frac{6}{5h} T_{13}^2 + \frac{6}{5h} T_{23}^2 \right) - 2\nu \left( \frac{T_{11} T_{22}}{h} + \frac{12}{h^3} M_{11} M_{22} \right) \right] - \right. \quad (17)$$

$$- [T_{11} u_{1,1} + M_{11} (\beta_{1,1} - w_{,11}) + T_{22} u_{2,2} + M_{22} (\beta_{2,2} - w_{,22}) +$$

$$+ T_{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) + M_{12} (\beta_{1,2} + \beta_{2,1} - 2w_{,12}) + T_{13} \beta_1 + T_{23} \beta_2] \} dS +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_0^a \frac{1}{2E} \left\{ \left[ \frac{R_{1i}^2}{h_i t_i} + \left( G_{11i} + R_{1i} \frac{h+h_i}{2} \right) \frac{1}{J_2} + \right. \right.$$

$$+ 2(1+\nu) \left( -G_{12i} + R_{2i} \frac{h+h_i}{2} \right) \frac{1}{C \left( 1 + \frac{t_i^2}{h_i^2} \right)} +$$

$$+ 2(1+\nu) (R_{2i}^2 + R_{3i}^2) \frac{6}{5h_i t_i} \left. \right] - \left[ R_{1i} \left( u_{1,1} + \frac{h+h_i}{2} w_{,11} - \frac{h+h_i}{2} \beta_{1,1} \right) + \right.$$

$$+ \left( G_{11i} + R_{1i} \frac{h+h_i}{2} \right) (\beta_{1,1} - w_{,11}) + \left( -G_{12i} + R_{2i} \frac{h+h_i}{2} \right) \frac{\beta_{2,1} - w_{,12}}{1 + \frac{t_i^2}{h_i^2}} +$$

$$\left. \left. + R_{3i} \beta_i + R_{2i} \left( u_{2,1} + \frac{h+h_i}{2} w_{,21} - \frac{h+h_i}{2} \beta_{2,1} \right) \right] \right\} dx_1 + \int_{S_T} qw dS.$$



Вариации функционала (17)  $\delta J_{\sigma u, T_{11}} = 0, \dots, \delta J_{\sigma u, G_{12i}} = 0$ , откуда получим зависимости между перемещениями, деформациями и усилиями

$$u_{1,1} = \frac{1}{Eh} (T_{11} - \nu T_{22}), \dots \quad (18)$$

$$\beta_{2,1} - \gamma_{,12} = \frac{1+\nu}{EC} [-2G_{12i} + (h+h_i)R_{2i}].$$

Вариации функционала Рейсснера  $\delta J_{\sigma u, u_z} = 0$  и  $\delta J_{\sigma u, w\beta_1\beta_2} = 0$  дают уравнение равновесия ребристой пластины

$$\begin{aligned} T_{11,1} + T_{12,2} &= 0, \\ T_{22,2} + T_{12,1} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} + q &= 0, \\ M_{11,1} + M_{12,2} - T_{13} &= 0, \\ M_{22,2} + M_{12,1} - T_{23} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Общий вид контурных интегралов после преобразования Остроградского–Гаусса

$$\begin{aligned} \int_s (T_n \delta u_n + S_n \delta u_s) ds - \int_s M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int_s \left( Q_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} \right) \delta w ds + \\ + \int_s (M_n \delta \beta_n + H_{ns} \delta \beta_s) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\beta_n, \beta_s$  — обобщенные углы поворота поперечных сечений.

Аналогично тому, как это было показано выше при преобразовании контурных интегралов Лагранжа (на основе рис. 3), получим силовые условия сопряжения  $i$ -того ребра с  $j$ -тыми и  $j+1$ -выми полосками пластины

$$\begin{aligned} T_{21j} - T_{21j+1} - R_{1i,1} &= 0, \\ T_{22j} - T_{22j+1} - R_{2i,1} &= 0, \\ (T_{23} + M_{21,1})_j - (T_{23} + M_{21,1})_{j+1} - G_{11i,11} &= 0, \\ -M_{22j} + M_{22j+1} + \frac{h^2}{h_i^2 + t_i^2} \left( -G_{12i,1} + R_{2i,1} \frac{h+h_i}{2} \right) - R_{2i,1} \frac{h+h_i}{2} &= 0, \\ M_{21j} - M_{21j+1} + R_{3i} - G_{11i,1} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Кинематические условия опять выражают непрерывность перемещений для соседних полосок:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= u_{1j+1}; & u_{2j} &= u_{2j+1}; & w_j &= w_{j+1}; \\ (w_{,1} - \beta_1)_j &= (w_{,1} - \beta_1)_{j+1}; \\ (w_{,2} - \beta_2)_j &= (w_{,2} - \beta_2)_{j+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

### Численные исследования

Задана прямоугольная пластина с восемью односторонними ребрами жесткости. Пластина оперта по контуру и находится под действием равномерно-распределенной нагрузки  $q = \text{const}$ . Направление действия нагрузки совпадает с осью  $x_3$ . Декартова система координат расположена так, что срединная плоскость пластины совпадает с плоскостью  $x_1 x_2$  (рис. 4).

Геометрические размеры ребристой пластины видны на рис. 5.

Найдем решения уравнений равновесия (8) и (9), полученных по принципу Лагранжа, в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} U_1(x_2) \cos \frac{l\pi x_1}{a}, \\ u_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} U_2(x_2) \sin \frac{l\pi x_1}{a}, \\ w &= \sum_{i=1}^{\infty} W(x_2) \sin \frac{l\pi x_1}{a}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $U_1, U_2, W$  — функции, зависящие только от  $x_2$ .

Подставив функции перемещений в (8) и (9), получим для  $U_1, U_2, W$  обыкновенные дифференциальные уравнения; решая их, можем написать функции перемещений  $j$ -той полоски следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{1j} &= \sum_{i=1}^{\infty} [A_{1j} \text{ch } \gamma x_2 + A_{2j} \text{sh } \gamma x_2 + A_{3j} x_2 \text{ch } \gamma x_2 + A_{4j} x_2 \text{sh } \gamma x_2] \cos \gamma x_1, \\ u_{2j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ A_{1j} \text{sh } \gamma x_2 + A_{2j} \text{ch } \gamma x_2 - A_{3j} \left[ \frac{3-\nu}{\gamma(1+\nu)} \text{ch } \gamma x_2 - x_2 \text{sh } \gamma x_2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - A_{4j} \left[ \frac{3-\nu}{\gamma(1+\nu)} \text{sh } \gamma x_2 - x_2 \text{ch } \gamma x_2 \right] \right\} \sin \gamma x_1, \\ w_j &= \sum_{i=1}^{\infty} (K + B_{1j} \text{ch } \gamma x_2 + B_{2j} \text{sh } \gamma x_2 + B_{3j} x_2 \text{ch } \gamma x_2 + B_{4j} x_2 \text{sh } \gamma x_2) \sin \gamma x_1, \end{aligned} \quad (25)$$

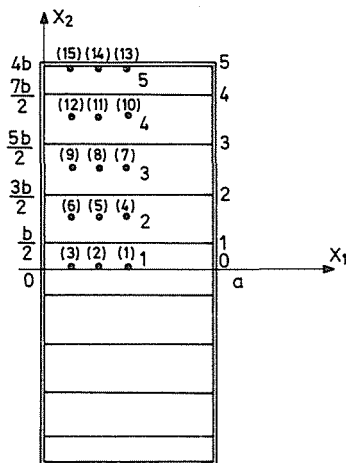


Рис. 4. Ребристая модель

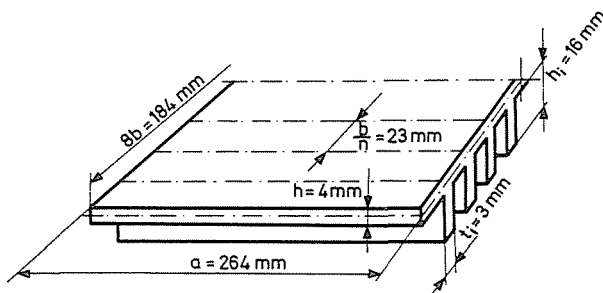


Рис. 5. Теоретические размеры ребристой модели

где  $A_{1j} \dots B_{4j}$  — интегральные постоянные, определяются из краевых,

силовых и кинематических условий сопряжения,  

$$\gamma = \frac{l\pi}{a} \quad (l \text{ — целое число}),$$

$$K = \frac{4qa^4}{l^5 \pi^5 B^5}$$
 — коэффициент частного решения.

Для вычисления прогиба прямоугольной ребристой пластины, опертой по краям  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ , а по краям  $x_2 = \pm 4b$  опертой, свободной или заделанной, была составлена вычислительная программа. Она дает возможность вычислять прогибы прямоугольной ребристой пластины с ребрами любого качества и размера. Следуя тому, что ряды функций решения быстро сходились, учитывались только 10 первых членов рядов. Время счета было не больше 17 минут.

Для оценки точности выработанного метода задача была решена другими методами [10], [11] и были проведены экспериментальные исследования [7], [8]. Численные и экспериментальные результаты при равномерно-распределенной нагрузке  $q = 0,491$  МПа показаны на рис. 6.

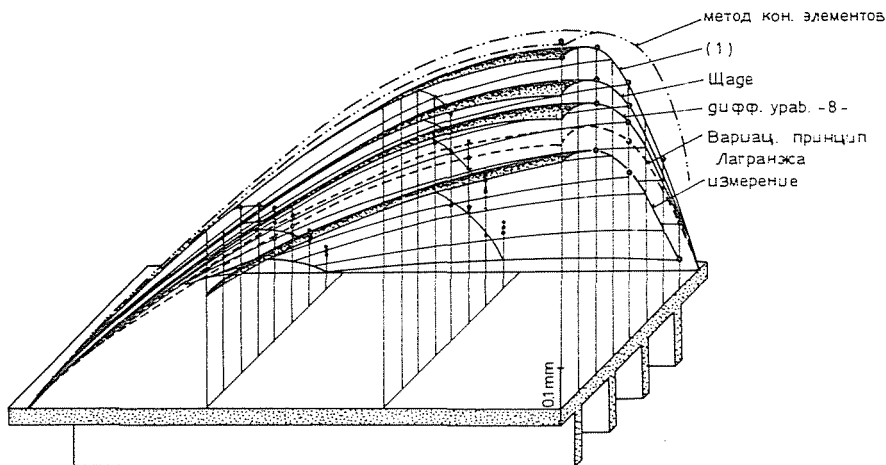


Рис. 6. Прогибы средней поверхности ребристой модели у распределенной поверхностной нагрузки 0,491 МПа

Надо отметить, что различие результатов, полученных методом конечных элементов, объясняется тем, что использованная программа не имела в виду собственную изгибную жесткость элементов пластины.

Как видно, среди численных методов метод Лагранжа дает результаты наиболее близкие к результатам измерений, потому что этот метод изучает напряженное и деформационное состояние пластины точнее, изучая отдельно влияния ребер, сопрягающихся с пластиной. Различие между численными и экспериментальными результатами объясняется тем, что в методе Лагранжа не учитывается влияние прорезывающих сил в ребре и пластине, и поэтому численная модель оказывается менее жесткой, чем настоящая. Кроме того, у экспериментального исследования, следуя деформации опоры, трения, край модели не совсем безмоментные.

## Резюме

Исследования пластин, подкрепленных ребрами на одной плоскости, проводилось использованием вариационных методов Лагранжа и Рейсснера. Для решения уравнений, полученных из метода Лагранжа, была выработана вычислительная программа. Конечные результаты в случаях разных краевых условий доказали, что этот метод дает более точные результаты по сравнению с предыдущими методами.

## Литература

1. GIRKMAN, K.: Flächentragwerke, Wien, Springer-Verlag 1963.
2. HUBER, M. T.: Teoria sprężystości, tom II., Kraków, Nakładem Polskiej Akademii Umiejętności, 1950.
3. ЛЕХНИЦКИЙ, С. Г.: Анизотропные пластинки, Москва, Гостехиздат, 1957.
4. MARGUERRE, K.—WOERLE, H. T.: Elastic Plates, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Company, 1969.
5. РАБОТНОВ, Ю. Н.: Механика деформируемого твердого тела, Москва, Наука, 1979.
6. TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIGER: Lemezek és héjak elmélete (Теория пластин и оболочек). Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1966.
7. MOLNÁR, S.: Bordákkal merevített lemezek szilárdsági vizsgálata. 1979 (DISS).
8. MOLNÁR, S.: Periodica Polytechnica. 25, 127 (1982).
9. МОЛЬНАР, Ш.: Исследование прочности и жесткости пластины, подкрепленной ребрами на одной торцевой плоскости. 1983 (ДИСС).
10. SHADE, H. A.: Soc. Nav. Archit. and Mar. Engineers. 49, 154, (1941).
11. TRENKS, K.: Der Bauingenieur. 29 Heft 10. 372.

Dr. Sándor MOLNÁR H-1521 Budapest