

# OPTIMALISIERUNG UND MODIFIZIERUNG VON VERZAHNTEN GETRIEBEPAAREN

T. BERCSEY, J. HEGYHÁTI und Z. ÁRVAY

Lehrstuhl für Maschinenkonstruktionslehre,  
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 20 Juni 1984  
Vorgelegt von Prof. Dr. L. Varga

## Summary

Digital simulation of the engagement of cogged transmission-pairs facilitates the optimization of the geometric parameters of transmission elements and the determination of modification ensuring favourable circumstances for load-exchange. Numeric analysis of spyroid and toroid transmissions demonstrate the applicability-limit of purpose-functions and optimization criteria carried out from the point of view of hydrodynamic loading. Method, worked out for the modification of Wildhaber-Novikov cogs calls our attention to the analysis of heavy-load and capacity cogged transmission-pairs, taking into consideration their flexible transformation as well.

## Einleitung

Für den auch jetzt noch anhaltenden Abschnitt der Entwicklung der verzahnten Antriebspaare sind die Steigerung der Tragfähigkeits- und des Wirkungsgrades und die damit eng zusammenhängende — sich als eine Voraussetzung für dieselbe meldende — höhere Fertigungsgenauigkeit und technologische Entwicklung kennzeichnend.

Im Interesse der Erhöhung der Tragfähigkeit und des Wirkungsgrades sind die Voraussetzungen für die hydrodynamische bzw. elastohydrodynamische Schmierung möglichst im gesamten Eingriffsbereich, sowie die für die Lastübergabe und die Werkstoffnutzung günstigste konstruktive Gestaltung und Technologie zu gewährleisten. Ferner sind die Optimierung der Verzahnungsparameter der bekannten Antriebspaare von hoher Tragfähigkeit sowie die Überprüfung und die kritische Analyse der im Entwicklungsstadium befindlichen Typen durchzuführen.

Hinsichtlich der das primäre Ziel darstellenden Strebungen zur Schaffung günstiger Berührungsverhältnisse im gesamten Eingriffsbereich sind die technologischen Gegebenheiten bestimmend. Die Abbildungsparameter der Verzahnungen — die statischen und dynamischen relativen Bewegungsinformationen sowie die Formen der Derivationsflächen — bieten breite Kombinationsmöglichkeiten zur Erreichung des optimalen Eingriffsprozesses, wobei sie

grundlegend in die beiden folgenden großen Verfahrensgruppen aufgeteilt werden können.

- Der ersten Gruppe gehören diejenigen Verfahren an, die die Erzeugung von Charakteristiken mit günstiger Lage anstreben, auf dem Prinzip der mittelbaren Bewegungsabbildungen beruhen und in vielen Fällen hinsichtlich der Drehbewegung des Werkstückes und der Ergänzungscomponenten der Abbildung der Bewegungsinformation vom Charakter der Punktsteuerung sind.
- Der zweiten Gruppe gehören diejenigen Verfahren an, die die entsprechende geometrische Gestaltung in der Umgebung der hinsichtlich der Berührungscharakteristiken mit ungünstiger Position bzw. des Eingriffes, der Tragfähigkeit oder der Beschädigung kritischen Stellen bzw. den teilweisen Ausschluß der Charakteristiken in einem Teil des Eingriffsbereiches durch entsprechende Bahnsteuerungen gewährleisten.

Während bei den der letztgenannten Gruppe angehörenden Verfahren die Bestimmung des Maßes, der Form und der Art der einen teilweisen Ausschluß der Charakteristiken gewährleistenden Modifikation die grundlegende Frage ist, bildet bei der ersten Verfahrensgruppe die optimale Wahl der Parameter des vollen Abbildungsprozesses das Hauptziel, damit keine Korrektur und Modifikation erforderlich sind bzw. damit diese vom Abbildungsprozeß selbst automatisch gewährleistet werden.

Dementsprechend ist der Begriff der Modifikation der verzahnten Elementen, unter dem in der Regel das Entfernen bestimmter Abschnitte der Zahnflächen zur Gewährleistung des lokalisierten Tragbildes sowie zur Reduzierung der Empfindlichkeit des Antriebspaares gegen Fertigungs- und Montagefehler verstanden werden, im weiteren Sinne anzuwenden und auch auf die durchgreifende Abänderung der Form der Zahnflächen auszubreiten.

Den Ausgangspunkt bilden bei beiden Verfahrensgruppen die Schaffung des Modells des Eingriffsmechanismus, die analoge oder digitale Simulierung des Eingriffsprozesses, die Erschließung der Eingriffsverhältnisse und die Analyse derselben nach den Gesichtspunkten der Optimalisierung. Die Entwicklung der numerischen Methoden und der Rechnertechnik ermöglicht heute bereits nicht nur die Analyse der sich wie starre Körper berührenden, idealisierten verzahnten Elementenpaare nach einer kinematischen Methode [1], sondern auch die quantitative und qualitative Untersuchung der sich während des Eingriffes abspielenden physikalischen Vorgänge nach einem immer genaueren Modell, sowie auch die Optimalisierung der Antriebspaare.

## Prüfung und Optimalisierung von verzahnten Getriebepaaren anhand der hydrodynamischen Tragfähigkeit

Lange Zeit bestand die Analyse der räumlichen verzahnten Getriebe in der Bestimmung der Berührungslinien und des Eingriffsfeldes sowie in der Prüfung der charakteristischen Projektion des Eingriffsfeldes auf einer bestimmten Ebene.

Bei der hydrodynamischen Prüfung der Getriebe mit versetzten Achsen stellte sich jedoch eindeutig heraus, daß der günstige Wirkungsgrad und die Tragfähigkeit nicht in erster Linie von der Größe des Eingriffsfeldes, sondern an dem arbeitenden Teil der Eingriffsfläche von den geometrisch-kinematischen Kennwerten, die die Herausbildung des lasttragenden Flüssigkeitsfilmes beeinflussen, an den Eingriffspunkten von den Krümmungsverhältnissen der Flächen und von Geschwindigkeitszustand der relativen Bewegung abhängen. Bei einem Eingriff entlang der Linie ist vom Gesichtspunkt der Tragfähigkeit des Flüssigkeitsfilmes, der sich in der Umgebung des Berührungspunktes herausbildet, neben der reduzierten Normalkrümmung in erster Linie die Größe der Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors senkrecht auf der Berührungscharakteristik entscheidend, wobei man auf diese Größe aus der Größe des Winkels, der vom relativen Geschwindigkeitsvektor  $v^{(12)}$  und der Tangente eingeschlossen wird, ( $\gamma$ ) schlußfolgern kann. Der Winkel  $\gamma$  kann in Kenntnis des relativen Geschwindigkeitsvektors  $v^{(12)}$  und der Geschwindigkeit  $v_r^{(i)}$  der relativen Bewegung, die der Berührungspunkt an der Hüllfläche ausführt, aus dem Zusammenhang

$$\gamma = \arccos \frac{v_r^{(i)} v^{(12)}}{|v_r^{(i)}| |v^{(12)}|} \quad (1)$$

bestimmt werden. [2].

Vom Gesichtspunkt der Tragfähigkeit ist es günstig, wenn  $\gamma \approx 90^\circ$  beträgt. Wenn die Spiroidgetriebe von diesem Gesichtspunkt aus analysiert (Abb. 1) und die Berührungslinien der Spiroidgetriebe mit Evolventenschraubenfläche und der mit Archimedischer Schnecke verglichen werden (Abb. 2), kann festgestellt werden, daß der Wert des Winkels bei einer richtigen Wahl der geometrischen Parameter des Getriebes sehr häufig in der Nähe von  $90^\circ$  liegt [3] und daß die Berührungslinien des Spiroidgetriebes mit Evolventenschnecke, das die gleichen Verzahnungsparameter besitzt, jedoch mit zahlreichen herstellungstechnologischen Problemen verbunden ist, dem gegebenen Kriterium nach eine günstigere Lage haben.

Die Kenntnis des Winkels, der von den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten bzw. der Tangente der Berührungscharakteristik und dem relativen Geschwindigkeitsvektor eingeschlossen wird, schafft also die Möglichkeit zur qualitativen Bewertung der Getriebepaare, der Auswahl der Charakteristiken

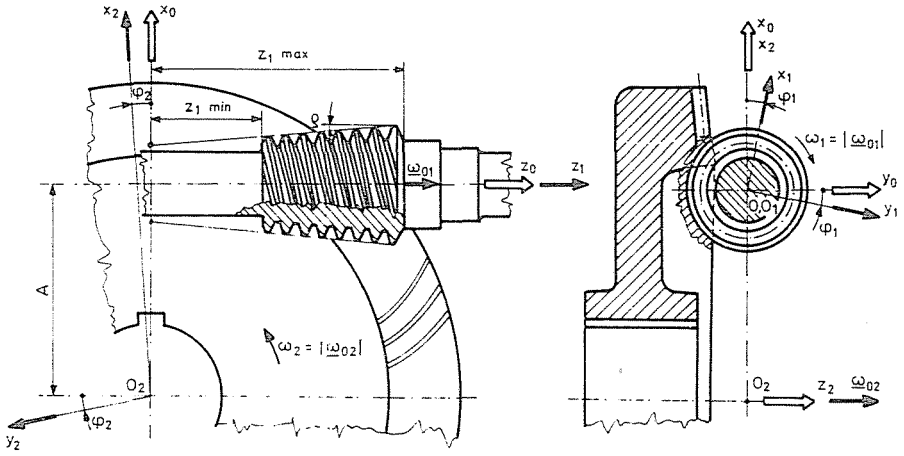


Abb. 1. Spiroidgetriebe und das angewandte Koordinatensystem

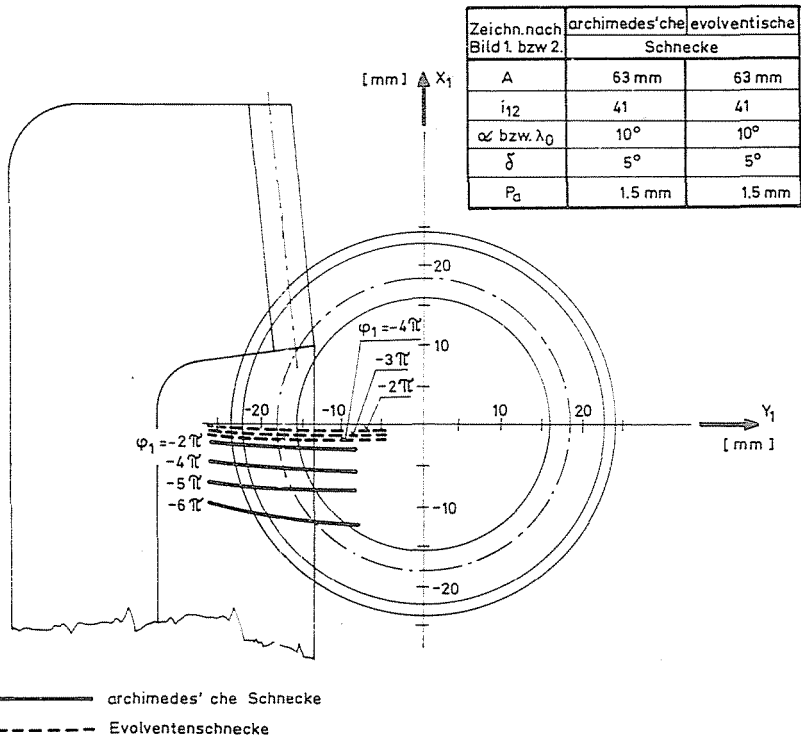


Abb. 2. Berührungslinien der Archimedischen und der Evolventenschnecke

mit einer günstigen Lage und der Wahl der entsprechenden Lage des Eingriffsfeldes, sie liefert aber nicht genügend Anhaltspunkte zum mengenmäßigen Vergleich der Getriebe, zur zahlenmäßigen Bestimmung der Tragfähigkeit und der Modifizierung sowie zur Aufstellung der Spezialfunktionen, die zur Optimalisierung notwendig sind.

Die Verfahren [4], die auch derzeit zur Berechnung der Tragfähigkeit der räumlichen verzahnten Getriebe angewandt werden, basieren auf vereinfachten physikalischen Gleichungen, den Kriterien der Tragfähigkeit entsprechend, die tatsächlichen kinematisch-geometrischen Verhältnisse der sich anschließenden Elementenpaare jedoch werden nur annähernd, in der Mehrzahl der Fälle durch empirische Zusammenhänge berücksichtigt. Deshalb können diese Berechnungsverfahren auch nicht zum zuverlässigen Vergleich der Verzahnungsgeometrie der Getriebepaare und zur Optimalisierung der grundlegenden geometrischen Parameter geeignet sein.

Zur Lösung des aufgeworfenen Problems scheint die Anwendung der klassischen hydrodynamischen Schmiertheorie (HD-Theorie) geeignet zu sein, die berechneten Werte liefern jedoch nur einen Bruchteil der in der Praxis realisierten Werte der Tragfähigkeit und des Leistungsverlustes der Getriebepaare [5], [6], [7]. Der Annahme, daß die räumlichen verzahnten Getriebe hinsichtlich des Reibungszustandes in die Klasse der „Grenzschicht-Reibung“ einzugliedern sind, widersprachen die in der Praxis gewonnenen Erfahrungen hinsichtlich des Verschleißes. Auch die tribologischen Forschungen bewiesen eindeutig die Anwesenheit des lasttragenden Ölfilms zwischen den Eingriffsflächen. Die Erklärung dieses scheinbaren Widerspruchs liegt darin, daß die Theorie der klassischen hydrodynamischen Schmierung auf dem Gebiet der räumlichen verzahnten Getriebe mit einer großen Tragfähigkeit von extremen Fällen abgesehen nicht mehr gültig ist; wegen der großen spezifischen Belastung der Tangentialebenen können die Wirkung der örtlichen elastischen Formveränderung und die Kompatibilitäts-Anforderung infolge des Aufeinander-einwirkens der elastischen Formveränderung sowie der hydrodynamischen Pressung nicht unberücksichtigt gelassen werden. Auch die Berechnungen, die auf der elasto-hydrodynamischen Schmiertheorie (EHD-Theorie), die sich auch auf die gemeinsame Wirkung der Viskositätsdruck-Änderung und der elastischen Formänderung erstreckt, basieren, bestätigen die experimentellen Ergebnisse nicht eindeutig, da die Ergebnisse der Berechnungen, die anhand der Zusammenhänge, die für einfache Tangentialebenen abgeleitet wurden, ausgeführt wurden, das Vielfache der gemessenen Tragfähigkeitswerte ergeben und hinsichtlich des Leistungsverlustes keinerlei zuverlässige Ausgangsbasis liefern.

Es ist offensichtlich, daß die Zusammenhänge, die anhand der HD-, bzw. der EHD-Theorie abgeleitet wurden und die genauen kinematisch-geometrischen Kennwerte des Getriebepaares enthalten, nicht zur zahlenmäßigen

Bestimmung der Tragfähigkeit geeignet sind. Trotz der vorhandenen Mängel können sie aber trotzdem zum Vergleich der Verzahnungsgeometrien verwendet werden, da sie die tatsächlichen Tragfähigkeitswerte umfassen.

Da die EHD-Theorie auch selbst eine lokale Deformierung, der Hertz-Theorie entsprechend, voraussetzt, können als Modellgesetz für die Vergleichsuntersuchung der Oberflächen-Tragfähigkeit die Hertzischen Gleichungen der Berührungsspannung akzeptiert werden, wobei zur Kenntnis genommen wird, daß die Oberflächen-Tragfähigkeit außer der Hertz-Spannung auch von sonstigen Faktoren, wie z. B. der Richtung der relativen Gleitung, der Roll-Gleitzahl, der Geschwindigkeit der relativen Verschiebung, der Druckverteilung im Schmierstoff usw. beeinflußt wird. Um eine Lösung finden zu können, müssen Vereinfachungsbedingungen, die bei starren Modellen der klassischen hydrodynamischen Theorie und bei der Anwendung elastischer Modelle den theoretischen Zusammenhängen nach Grubin entsprechen [5], akzeptiert werden. Unter ihrer Berücksichtigung können die Kräfte in normaler Richtung, die zur minimalen Ölfilmstärke von  $h = h_0$  entlang der Berührungslinie elementarer Länge der Getriebepaare [2], die durch die Roll-Gleitzahl  $\lambda = 0$  charakterisiert werden, gehören, anhand der schmiertheoretischen Zusammenhänge

$$dF_{HD} = 2,45 \eta \frac{1}{h_0} \rho_{red} |v^{(12)}| \sin \gamma ds \quad (2)$$

und

$$dF_{EHD} = 6,055 \eta^8 \alpha^8 E_r \frac{1}{h_0^{11}} \rho_{red} (|v^{(12)}| \sin \gamma)^8 ds \quad (3)$$

berechnet werden. Wenn der Begriff der Stribeckschen Walzpressung  $k_H$  eingeführt wird, wird die Strecke der Berührungslinie mit elementarer Länge an der Grenze der Oberflächenbelastung von der Normalkraft

$$dF_H = 2k_H \rho_{red} ds \quad (4)$$

belastet.

Den Elementarbelastungen, die anhand der einzelnen Tragfähigkeitskriterien bestimmt wurden, entspricht an der Achse des Abtriebslements das Nutzdrehmoment

$$dM_2 = (jer) dF. \quad (5)$$

Wenn man die Gleichung (5) bei  $\varphi_1 = \text{konstanten}$  Bewegungsparametern entlang den Strecken der Berührungscharakteristiken, die in das Eingriffsfeld fallen, integriert und die Drehmomentwerte, die für die Linienstrecken, die gleichzeitig im Eingriff sind, bestimmt wurden, summiert, ergibt sich die Gleichung

$$M_2 = \sum_{i=1}^n \int_{s_1}^{s_2} (jer) dF \quad (6)$$

für die Grenzbelastung des Getriebepaares zu einem bestimmten Zeitpunkt. Anhand ähnlicher Erwägungen kann die Drehmoment-Komponente, die aus dem hydrodynamischen Verlust der verzahnten Elemente berechnet werden kann, wie folgt aufgeschrieben werden:

$$M_{2VHD} = 2,3i_{12} \frac{1}{\omega^{(1)}} \frac{\eta}{\sqrt{h_0}} \sum_{i=1}^n \int_{s_1}^{s_2} \rho_{red}^{\frac{1}{2}} |v^{(1,2)}|^2 (\sin^2 \gamma + 1,238 \cos^2 \gamma) ds. \quad (7)$$

Wenn die Gleichungen [2], die für die halbabgewälzten Toroidscheibenge triebe (Abb. 3), die untersucht wurden, gültig sind, in die Gleichungen (2)–(7) eingesetzt werden, und wenn anstatt des Bogenlängen-Parameters der

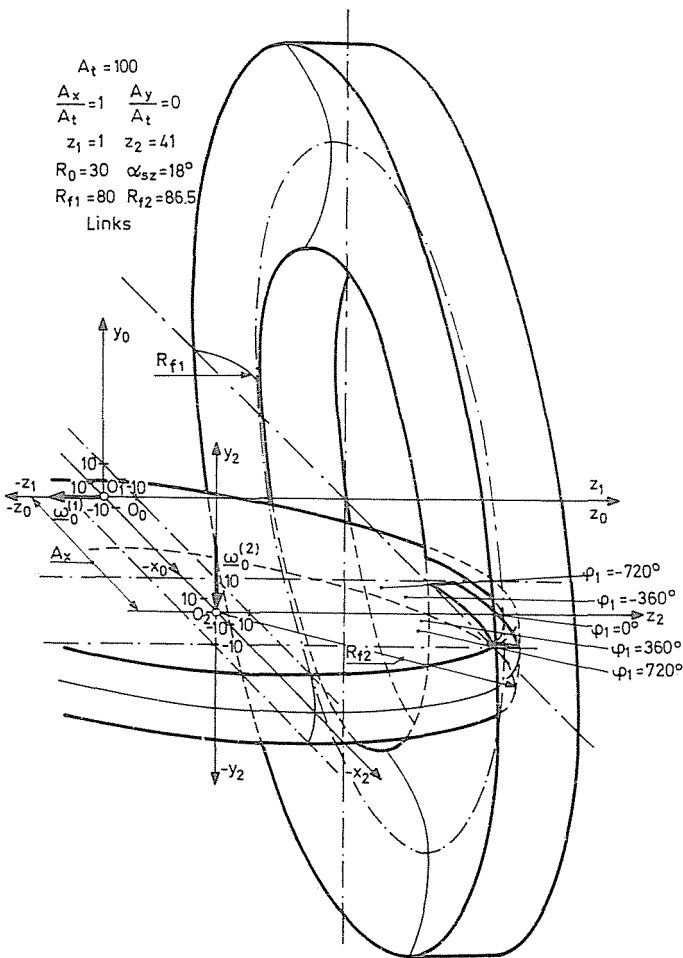


Abb. 3. Berührungslinien und Eingriffsfeld des Toroidscheibenge triebes sowie das angewandte Koordinatensystem

Flächenparameter  $\vartheta_0$  eingeführt wird, können die für die Tragfähigkeit charakteristischen Ausgangsmomente anhand der Gleichungen

$$M_{2HD} = 2,45\eta \frac{1}{h_0} \sum_{i=1}^n \int_{\vartheta_0(1)}^{\vartheta_0(2)} \rho_{\text{red}} |v^{(12)}| \sin \gamma RS d\vartheta_0 \quad (8)$$

$$M_{2EHD} = 6,055\eta^8 \alpha^8 E_r \frac{1}{h_0^{11}} \sum_{i=1}^n \int_{\vartheta_0(1)}^{\vartheta_0(2)} \rho_{\text{red}}^4 (|v^{(12)}| \sin \gamma)^8 RS d\vartheta_0 \quad (9)$$

$$M_{2H} = 2k_H \sum_{i=1}^n \int_{\vartheta_0(1)}^{\vartheta_0(2)} \rho_{\text{red}} RS d\vartheta_0 \quad (10)$$

und die Drehmomentkomponente, die dem Verlust entspricht, anhand der Gleichung

$$M_{2VHD} = 2,3i_{12} \frac{1}{\omega^{(1)}} \frac{\eta}{\sqrt{h_0}} \sum_{i=1}^n \int_{\vartheta_0(1)}^{\vartheta_0(2)} \rho_{\text{red}}^{\frac{1}{2}} |v^{(12)}|^2 (\sin^2 \gamma + 1,238 \cos^2 \gamma) S d\vartheta_0 \quad (11)$$

berechnet werden.

Wenn man den grundlegenden geometrischen Parameter  $A_t$  als charakteristisches Längenmaß benutzt, können anhand der Gleichungen (8)–(11) die von den kinematisch-geometrischen Kennwerten des Getriebepaares abhängigen dimensionslosen „kinematisch-geometrischen“ Zahlen

$$Q_{HD} = \frac{h_0}{\eta \omega^{(1)} A_t^4} M_{2HD} \quad (12)$$

$$Q_{EHD} = \frac{h_0^{11}}{\eta^8 \alpha^8 E_r \omega^{(1)8} A_t^{14}} M_{2EHD} \quad (13)$$

$$Q_H = \frac{1}{k_H A_t^3} M_{2H} \quad (14)$$

$$Q_{VHD} = \frac{M_{2VHD}}{M_{2HD}} \quad (15)$$

ermittelt werden.

Das erstrangige Ziel der Vergleichsuntersuchung der halbabgewälzten Toroidscheibengetriebe besteht in der Bestimmung der optimalen Radstellung, wobei es zweckmäßig ist, als Vergleichsbasis von den dimensionslosen Zahlen, die einen fast identischen Rechenbedarf, jedoch einen verschiedenen Informationsgehalt haben, in erster Linie die komplexeren Parameter — die aus der HD- und der EHD-Theorie abgeleiteten kinematisch-geometrischen Zahlen — zu wählen.



Die für die rechte und die linke Zahnflanke ausgeführten numerischen Untersuchungen sowie die rechnergestützte Optimierung [8] unter Anwendung der Monte-Carlo-Methode ergaben in beiden Fällen örtliche Extremwerte, die im Vergleich zur Achsenlage  $A_y = 0$  symmetrisch angeordnet sind und Werten mit fast gleicher Tragfähigkeit entsprechen (Abb. 4 und 5).

Die örtlichen Extremwerte der Tragfähigkeit existieren tatsächlich im Sinne des Weierstrass- und des verallgemeinerten Rolle-Satzes und sie bedeuten hinsichtlich ihres physikalischen Inhalts ein zur Achse des Abtriebs-

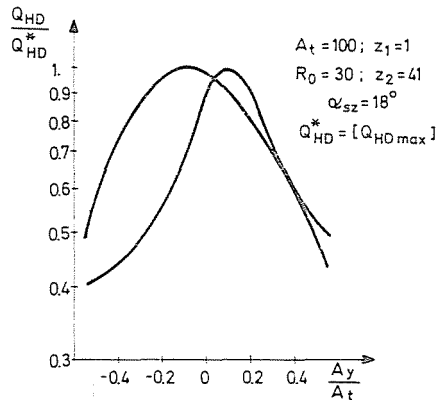


Abb. 4. Änderung der anhand der EH-Theorie berechneten Tragfähigkeit an der rechts- und linksseitigen Zahnoberfläche von halbabgewälzten Toroidscheibengetrieben

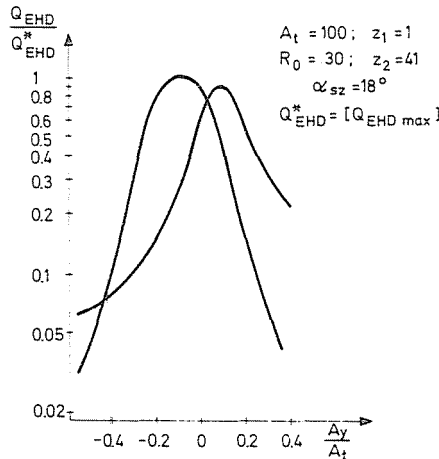


Abb. 5. Änderung der anhand der EHD-Theorie berechneten Tragfähigkeit an der rechts- und linksseitigen Zahnoberfläche von halbabgewälzten Toroidscheibengetrieben

elements senkrechtes und zur  $x$ -,  $z$ -Ebene paralleles resultierendes Normalkraftsystem analog dem Ausdruck, der dem Extremwert, den man durch die Differenzierung der für die einzelnen Berührungspunkte gültigen Gleichung erhält, entspricht.

Aus der weiteren Untersuchung der Getriebepaare mit den gleichen grundsätzlichen und abgeleiteten Parametern stellt sich eindeutig heraus, daß die Extremwerte, die anhand der verschiedenen Bedingungen berechnet wurden, örtlich zusammenfallen und ihr Platz den obigen Folgerungen entsprechend vom Steigungswinkel der Scheibe bzw. von der Übersetzung bestimmt wird (Abb. 6).

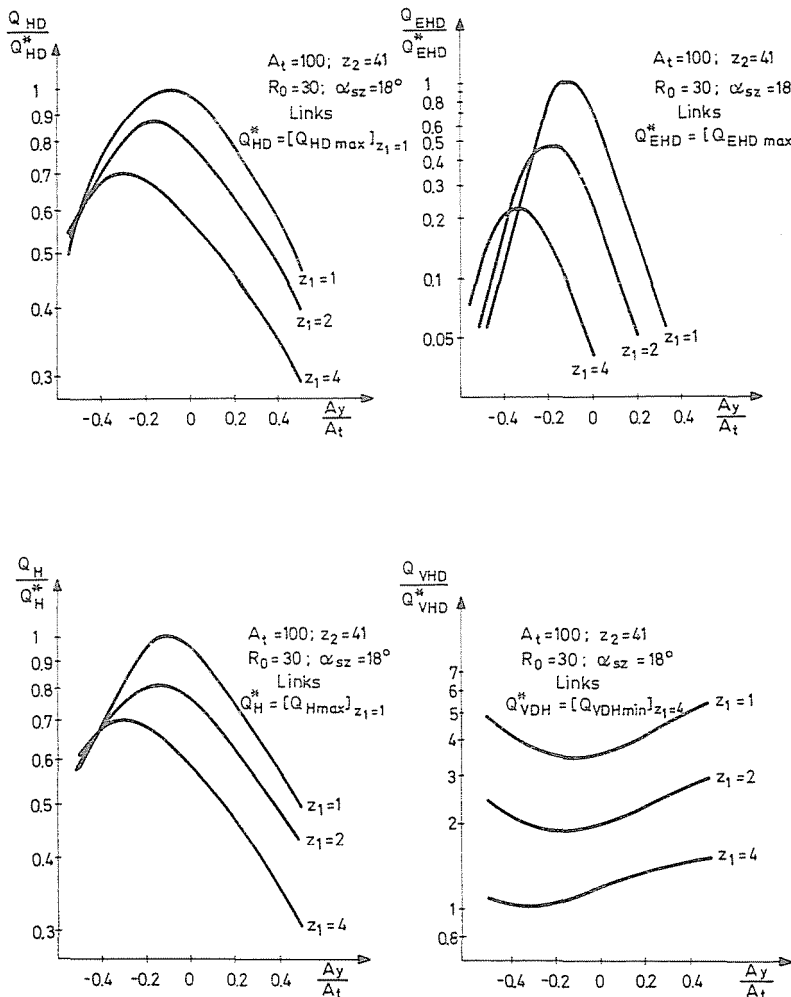


Abb. 6. Anhand der HD-, der EHD- und der Hertz-Theorie sowie des hydrodynamischen Verlustes bestimmte Extremwerte bei halbabgewälzten Toroidscheibengetrieben

Ähnlich dem klassischen Toroidscheibenge triebe nimmt die Radstellung  $A_y = 0$  auch bei den halbabgewälzten Getriebepaaren einen besonderen Platz ein, da nur in diesem Fall gleichzeitig in beiden Drehrichtungen die Übertragung der verringerten, jedoch fast gleichgroßen Belastung gewährleistet werden kann.

Die eingeführten dimensionslosen komplexen kinematisch-geometrischen Zahlen sind, da sie unabhängig von den sonstigen Faktoren, die die Tragfähigkeit beeinflussen — der Drehzahl, der Ölviskosität, der Materialzuordnung, den Getriebeabmessungen usw. — sind, und hinsichtlich der geometrisch streng ähnlichen Getriebepaare konstante Mengen sind, den Prüfungen gemäß tatsächlich zur geometrischen Vergleichung von Getriebeverzahnungen gleichen Typs und gleicher Art, zur Aufstellung der Optimierungskriterien geeignet, infolge der Eigenheiten der physikalischen Gleichungen, die als Basis des Modells dienen, ermöglichen sie jedoch nicht die Bestimmung des Ausmaßes der Modifizierung im herkömmlichen Sinne unter gleichzeitiger Berücksichtigung der globalen elastischen Formveränderung der verzahnten Elemente.

#### Modifizierung der Zahnoberflächen anhand der elastischen Formveränderung der Verzahnung

Das typische Beispiel der Modifizierung im herkömmlichen Sinne ist die Korrektur der Zahnstärke entlang der Schneckenlänge der Globoid-Schneckengetriebe mit klassischer Linienoberfläche, oder die Flankenrücknahme und Wölbung bei den zylindrischen Zahnradpaaren, bei denen das Hauptproblem, wie allgemein bekannt, in der Bestimmung des Ausmaßes der Korrektur, die eine günstige Belastungsverteilung gewährleistet, besteht. Das bedeutet heutzutage bei Flächeneingriffen oder bei Eingriffen, die auf Flächeneingriffe zurückgeführt werden können, keine besonderen Schwierigkeiten, und die zur Verfügung stehenden experimentellen Daten sowie die vereinfachten Berechnungsverfahren für Evolventen-Zahnräder liefern Werte mit einer Genauigkeit, die hinsichtlich der Anwendung in der Praxis ausreichend ist [9].

Diese Daten und Verfahren können jedoch bei der Mehrzahl der Elemente mit räumlichen oder Punkteingriff nicht angewandt werden. Deshalb ist auch bei der Wildhaber-Nowikow-Verzahnung (Abb. 7), die aufgrund des Eingriffs der hohlen und gewölbten Zahnoberflächen sehr günstige Tragfähigkeitseigenschaften besitzt, jedoch zum Bruch der Zahnferse neigt, eine detailliertere Analyse des Spannungs-Formänderungszustandes der Verzahnung unter Anwendung der Methode der endlichen Elemente zur Bestimmung des Ausmaßes der Korrektur notwendig.

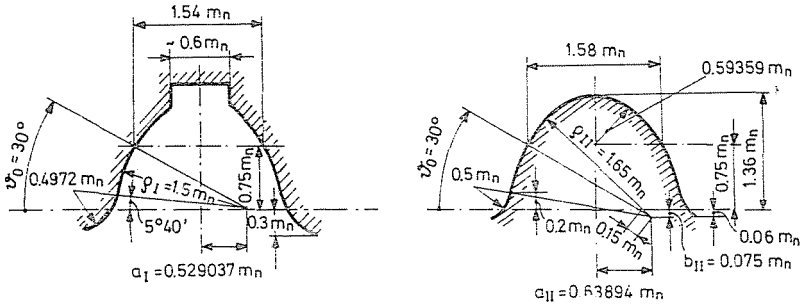


Abb. 7. Normalschnitt-Zahnprofile der Wildhaber-Nowikow-Verzahnung und die charakteristischen geometrischen Parameter

Von den 9 Elemententypen des zu den Untersuchungen verwendeten Programmsystem sind die allgemeinen Hexaederelemente, die 8 Knotenpunkte enthalten, zur Beschreibung der räumlichen Spannungs- und Formveränderungszustände der Verzahnung am besten geeignet. Die zum Aufbau des Netzes aus endlichen Elementen erforderlichen geometrischen und topologischen Daten werden vom Prozessor, der an das Programmsystem angepaßt wurde, anhand der Zahnoberflächen-Gleichungen, die die digitale Simulation der Zahnradherstellung ermöglichen, automatisch generiert. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= (\rho_1 \sin \vartheta_1 + r_1) \cos \varphi_1 + \rho_1 \cos \vartheta_1 \sin \lambda \sin \varphi_1 \\ y_1 &= (\rho_1 \sin \vartheta_1 + r_1) \sin \varphi_1 - \rho_1 \cos \vartheta_1 \sin \lambda \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (16)$$

$$z_1 = \rho_1 \cos \vartheta_1 \cos \lambda - \frac{a_1}{\cos \lambda} + r_1 \varphi_1 \tan \lambda$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (\rho_2 \sin \vartheta_2 - b_2 - r_2) \cos \varphi_2 - (\rho_2 \cos \vartheta_2 - b_2 \tan \vartheta_2) \sin \lambda \sin \varphi_2 \\ y_2 &= -(\rho_2 \sin \vartheta_2 - b_2 - r_2) \sin \varphi_2 - (\rho_2 \cos \vartheta_2 - b_2 \cotan \vartheta_2) \sin \lambda \cos \varphi_2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$z_2 = \rho_2 \cos \vartheta_2 \cos \lambda - \frac{a_2}{\cos \lambda} + b_2 \cotan \vartheta_2 \sin \lambda \tan \lambda + r_2 \varphi_2 \tan \lambda$$

und die Gleichungen zur Beschreibung der Fußflächen

$$\begin{aligned} x_{1f} &= (-\rho_{f1} \sin \vartheta_{f1} + b_{f1} + r_1) \cos \varphi_1 - \\ &\quad - (\rho_{f1} \cos \vartheta_{f1} - b_{f1} \cotan \vartheta_{f1}) \sin \lambda \sin \varphi_1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$y_{1f} = (-\rho_{f1} \sin \vartheta_{f1} + b_{f1} + r_1) \sin \varphi_1 + (\rho_{f1} \cos \vartheta_{f1} - b_{f1} \cotan \vartheta_{f1}) \sin \lambda \cos \varphi_1$$

$$z_{1f} = -\rho_{f1} \cos \vartheta_{f1} \cos \lambda - \frac{a_{f1}}{\cos \lambda} - b_{f1} \cotan \vartheta_{f1} \sin \lambda \tan \lambda + r_1 \varphi_1 \tan \lambda$$

$$\begin{aligned}
 x_{2f} &= (\rho_{f2} \sin \vartheta_{f2} + b_{f2} - r_2) \cos \varphi_2 - (\rho_{f2} \cos \vartheta_{f2} + b_{f2} \cotan \vartheta_{f2}) \sin \lambda \sin \varphi_2 \\
 y_{2f} &= -(\rho_{f2} \sin \vartheta_{f2} + b_{f2} - r_2) \sin \varphi_2 - \\
 &\quad - (\rho_{f2} \cos \vartheta_{f2} + b_{f2} \cotan \vartheta_{f2}) \sin \lambda \cos \varphi_2 \\
 z_{2f} &= \rho_{f2} \cos \vartheta_{f2} \cos \lambda - b_{f2} \cotan \vartheta_{f2} \sin \lambda \tan \lambda + r_2 \varphi_2 \tan \lambda
 \end{aligned} \tag{19}$$

können die Zahnoberfläche in dem Koordinatensystem, das zum zu verzahnenden Rad fixiert wird, und die arbeitenden Zahnoberflächen der Eingriffsräder 1 und 2 angegeben werden [1]. Die Gleichung der Eingriffslinie, die eine auf den Zylinder mit dem Radius  $R_1$  bzw.  $R_2$  geschriebene Schraubenlinie mit dem Parameter  $p_1$  bzw.  $p_2$  ist, ergibt sich aus der Gleichung der arbeitenden Zahnoberflächen durch die Substitution des Pressungswinkels  $\vartheta = \vartheta_0$ .

Die Untersuchungen, die für die Netze verschiedener Feinheit und die Einführungsstellen der Normalbelastung an der Oberfläche ausgeführt wurden, zeigen, daß zur Berechnung der Formveränderung, die zur Feststellung des Ausmaßes der Modifizierung in Zahn längsrichtung auch Netze, die aus einfacheren Elementen aufgebaut wurden und eine größere Aufteilung haben, entsprechend sind (Abb. 8), wodurch der Zeitaufwand der Berechnung bedeutend reduziert und die Anwendbarkeit des Verfahrens in der Praxis erhöht wird [10]. Die Modifizierung, die in Kenntnis der tatsächlichen geometrischen und Betriebsverhältnisse bestimmt wurde, kann am einfachsten durch eine Schraubenfläche mit variabler Steigung, die von einer Konstruktionseinheit, die nachträglich in die kinematische Kette einer Verzahnungsmaschine eingebaut wurde, erzeugt wurde, realisiert werden.

### Zusammenfassung

Die erforderliche Voraussetzung der wirksamen Entwicklung der verzahnten Getriebe-paare sind die Optimalisierung der Verzahnungsparameter sowie die Bestimmung der Art und der Größe der Modifizierung, die die günstigen Eingriffsverhältnisse gewährleistet, deren Grundlage in jedem Fall die Analyse des Eingriffs- und des Belastungsübertragungsprozesses ist. In Anbetracht dessen, daß das mathematische Modell, das den Eingriffsprozeß selbst beschreibt, in der Mehrzahl der Fälle nur durch solche Vektor-Skalarfunktionen beschrieben werden kann, die über mehrere Parameter verfügen und auf analytischer Weise in Form von geschlossenen Gleichungen nicht gelöst werden können, sind die Anwendungen der numerischen Methoden und der Rechner-Verfahren auch auf dem Gebiet der Forschung und Entwicklung von verzahnten Elementen in den Vordergrund getreten.

Durch die Entwicklung der numerischen Methoden und der Rechentechnik sind die Untersuchung der physikalischen Vorgänge, die sich während der Eingriffsprozesse abspielen, nach einem Modell mit zunehmender Kompliziertheit, die Optimalisierung der Verzahnungen aufgrund dessen sowie die Erkennung des Formveränderungszustandes der Eingriffselemente mit einem räumlichen Belastungs- und Spannungszustand möglich geworden.

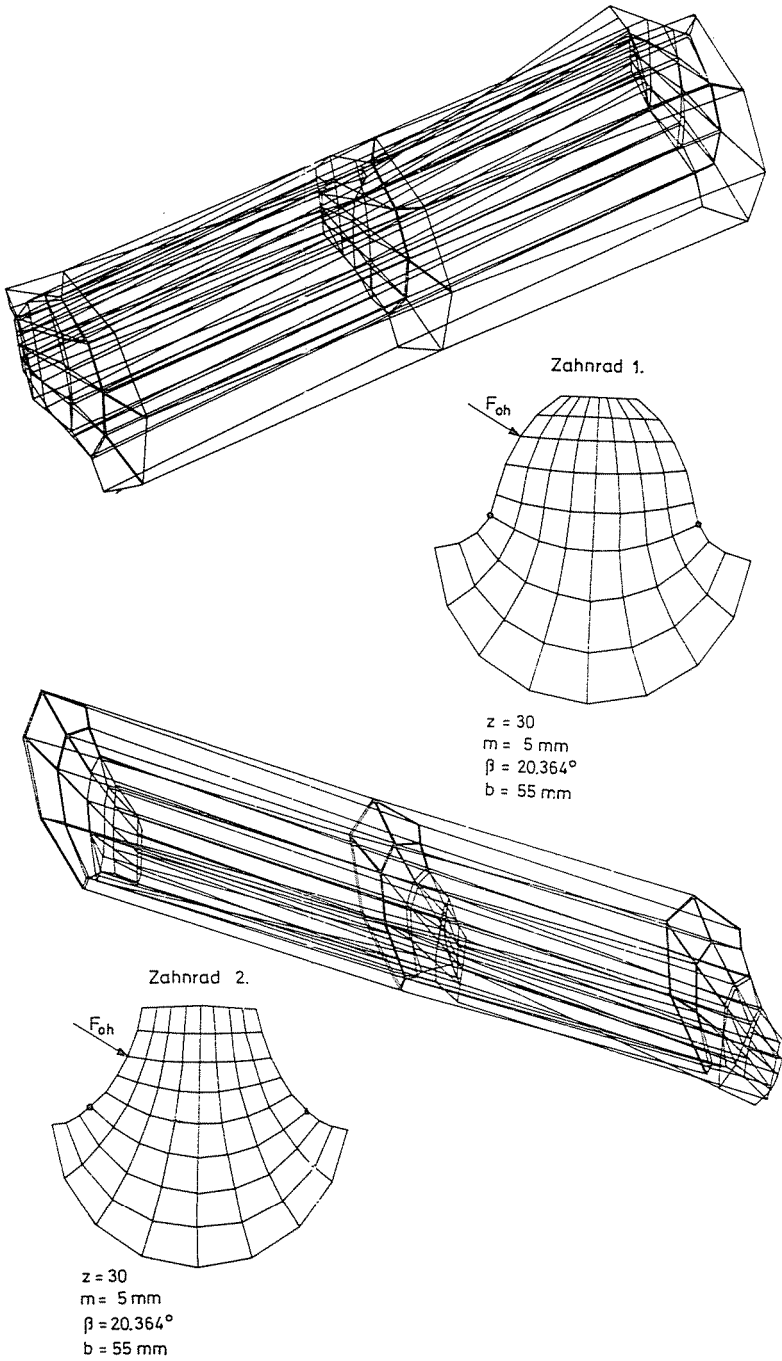


Abb. 8. Formveränderung und Netz der Verzahnung aus endlichen Elementen

Durch die Ergebnisse, die man im Zusammenhang mit der Untersuchung der Getriebepaare verschiedenen Typs erhält, wurde die Aufmerksamkeit neben der Vorstellung der Möglichkeiten der Optimalisierung nach verschiedenen Kriterien und den aufgrund dessen bezüglich der einzelnen Getriebepaare ziehbaren Schlußfolgerungen gleichzeitig auf die beschränkte Gültigkeit der gewählten Zielfunktionen und Modelle gelenkt.

Zur qualitätsmäßigen Beurteilung des Getriebepaares vom Gesichtspunkt der hydrodynamischen Tragfähigkeit liefert die Untersuchung des Winkels, der vom relativen Geschwindigkeitsvektor und der Berührungslinie eingeschlossen wird, zwar eine gute Basis, sie ermöglicht jedoch nicht die zahlenmäßige Bestimmung der optimalen grundlegenden geometrischen Parameter und der Modifizierung. Die dimensionslosen kinematisch-geometrischen Zahlen sind bereits auch für quantitative Untersuchungen geeignet, sie liefern jedoch nur bei Getriebepaaren des gleichen Typs und geometrischer Ähnlichkeit ein zuverlässiges Ergebnis, und ihr weiterer großer Mangel besteht darin, daß sie die globale Formveränderung der Elemente außerachtlassen, was jedoch die Bedingung der Bestimmung der Modifizierung, die zur Herausbildung einer vom Gesichtspunkt der Belastungsverteilung optimalen Verzahnung notwendig ist, bildet.

Es ist offensichtlich, daß die Ergebnisse der hydrodynamischen Untersuchungen, die bei den verzahnten Elementen auf der Untersuchung der lokalen Berührungsverhältnisse basieren, und der globalen Formveränderungsuntersuchungen, die die lokalen Berührungsverhältnisse nicht berücksichtigen, zwar separat zur Bildung wertvoller Schlußfolgerungen geeignet sind, jedoch auf einfacher Art und Weise nicht ineinander übertragen werden können. Deshalb muß die weitere Forschungsarbeit auf dem Gebiet der Untersuchung und Optimalisierung der verzahnten Elemente auf die Schaffung eines Rechenmodells, das die globale und lokale Formveränderung der Verzahnung sowie gleichzeitig auch die tribologischen Verhältnisse berücksichtigt, gerichtet sein.

### Literatur

1. LITVIN, F. L.: A fogaskerékkapcsolás elmélete. Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1972.
2. BERCSEY, T.: Toroid hájtások elmélete. Kandidátusi értekezés. Budapest, 1977.
3. HEGYHÁTI, J.: Berührungs- und Tragfähigkeitsverhalten von Spiroidgetrieben. Tagung Zahnradgetriebe, Dresden, 1983.
4. NIEMANN, G.—WINTER, H.: Maschinenelemente. III. Bd. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1983.
5. RESIKOW, V. F.: Trenye i iznosz tjazselonagruzsenüh peredacs. Masinosztroenyie, Moskau, 1975.
6. SCHULZ, H.—D.: Untersuchungen an Schneckengetrieben mit Kegelschnecke mit trapezförmigem Profil nach der Hertzschen und nach der hydrodynamischen Theorie. Dissertation, TH München, 1970.
7. WILKESMANN, H.: Berechnung von Schneckengetrieben mit unterschiedlichen Zahnprofilen. Dissertation, TH München, 1974.
8. KRUG, W.—SCHÖNFELD, S.: Rechnergestützte Optimierung für Ingenieure. VEB Verlag Technik, Berlin, 1981.
9. ZIEGLER, H.: Verzahnungssteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder. Dissertation, Aachen, 1971.
10. VARGA, L.—MAGYAR, J.—BERCSEY, T.—ÁRVAY, Z.—KOZMA, M.: Neue Entwicklungstendenzen verzahnter Antriebspaare. Tagung Zahnradgetriebe, Dresden, 1983.

Dr. Tibor BERCSEY  
Zoltán ÁRVAI  
Dr. József HEGYHÁTI

H-1521 Budapest