DER ENTWURF SCHWINGUNGSISOLIERTER AUFSTELLUNG VON MASCHINEN

P. Gombkötő und P. Kaboldy

Institut für Maschinenkonstruktionslehre,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 20 Juni 1984
Vorgelegt von Prof. Dr. L. Varga

Summary

The trend of the technical development tends to the production of machines with higher output and speed and at the same time with lower specific mass. This development demands the investigation of new dynamic problems, because the effect of dynamic forces acting on the environment during the work of machines are not negligible.

In the case of rotating machines the dynamic load of the surrounding may be decreased radically by means of active vibration isolation.

The active vibration isolation can be solved by supporting machines with springs. The authors developed a computer method for the calculation of vibration isolation.

Einleitung

Die technische Entwicklung geht in Richtung der Konstruktion von Maschinen mit größerer Leistung, höherer Drehzahl, und geringerer Masse. Dieser Trend hebt neue dynamische Probleme in den Vordergrund da die Wirkung der stärkeren dynamischen Kräfte der Maschinen auf die Umwelt nicht vernachlässigbar ist. Bei Maschinen mit rotierenden Wellen kann die dynamische Belastung der Umwelt durch aktive Schwingungsisolierung wirksam verringert werden. Bei aktiver Schwingungsisolierung ist die Maschine auf Federn gestellt. Im folgenden wird über eine Komputermethode zur Berechnung der nötigen Schwingungsisolation berichtet.

Die Planung der Schwingungsisolierung erfolgt wie alle dynamische Planungen, in zwei Schritten. Zu den dynamischen Berechnungen müssen wir die Parameter der das Modell des Systems bildenden Elemente kennen. Zu diesem Zweck wird das dynamische Modell solange vereinfacht bis die gesuchten Parameter schnell, ohne besonderen mathematischen Aufwand bestimmbar werden. Die Kenntnis der Parameter ermöglicht die Ausführung einer näheren Analyse. Falls die so erhaltenen Ergebnisse nicht entsprechend sind, muß die Berechnung mit veränderten Parametern solange wiederholt werden, bis die gewünschten Ergebnisse erreicht werden.

Dynamisches Modell

Schwingungsisolierung von Maschinen ist durch Aufstellung auf Federn erreichbar. Abb. 1 zeigt einen Ventilator, der auf typisierte Federn gestellt wurde.

Das dynamische Modell einer solchen Maschine besteht aus einer Masse sowie aus Federn. Das Modell hat demnach 6 Freiheitsgrade. Da der Ventilator gegeben ist, ist die Aufgabe die Federkonstanten und die Lagerungen der Federn zu ermitteln. Da im allgemeinen die schwingungsiso-

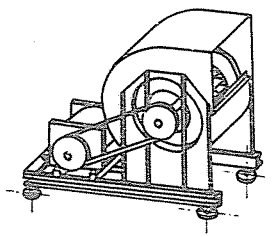

Abb. 1. Ventilator auf typisierten Federn

lierenden Federn typisiert sind, bleibt nur die Aufgabe der Bestimmung ihres Types und ihrer Größe über.

Zum Zwecke vorheriger Auswahl der Federn muß das System mit 6 Freiheitsgraden bei dem Vorentwurf auf in System mit 1 Freiheitsgrad reduziert werden. Die Beschreibung von Systemen mit einem Freiheitsgrad ist in [1, 2, 3] ausführlich zu finden. Daraus geht hervor, daß die auf die Umwelt wirkenden Kräfte vermindert werden, wenn im Schwingungssystem die Feder weich ist.

Es läßt sich analoger Weise folgern daß auch bei einer Maschine kleine dynamische Kräfte auf die Umwelt wirken werden, wenn die Maschine auf weiche Federn gestellt wird, die eine Bewegung in alle Richtungen ermöglichen.

Die auf Federn gestellte Maschine ist ein Schwingungssystem mit 6 Freiheitsgraden: es kann 3 aufeinander senkrechten Richtungen Translationsbewegungen und um die drei durch den Schwerpunkt laufenden aufeinander senkrechten Achsen Torsionsschwingungen ausführen. Die Federung ist „entsprechend weich" wenn die höchste Eigenfrequenz von den den sechs Freiheitsgraden entsprechenden Eigenfrequenzen 3—5 mal kleiner als die Frequenz der Erregung ist. Es ist beweisbar, daß wenn die Dämpfung klein ist, die bei obigen Verhältnis auf die Umwelt wirkenden dynamischen Kräfte nur einige Prozente der Erregerkräfte ausmachen.

Zur Bemessung einer schwingungsisolierenden Maschinenaufstellung müssen folglich alle 6 Eigenfrequenzen berechnet werden. Es wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

1. Die Maschine ist samt ihrem Grundrahmen ein ideal starrer Körper.
2. Die Bewegungsamplituden sind klein.
3. Die Dämpfung wird vernachlässigt.
4. Die Federn sind masselos und linear.
5. Die Torsionssteifigkeit der Federn ist vernachlässigbar.
6. Die Umwelt ist völlig im Ruhestand.

Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems sind aufgrund der Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art abgeleitet. Da die freien Schwingungen gesucht werden, können die Gleichungen auf folgende Form geschrieben werden

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial E}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=0 \tag{1}$$

Die generalisierten Koordinaten können nach Abb. 2. folgendermaßen angenommen werden.

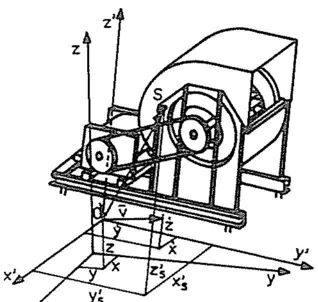

Abb. 2. Koordinatensystemen zu der Ableitung der Bewegungsgleichungen

Das X', Y', Z' Koordinatensystem ist zur Maschine befestigt gedacht. Das X, Y, Z Koordinatensystem ist raumfest. In der Ruhelage sind die zwei Koordinatensysteme in der gleichen Position. Die Bewegung der Maschine wird aufgrund der Bewegungskomponenten x, y, z und der Neigungswinkeln

φ_x, φ_y, φ_z des X', Y', Z'-Systems im X, Y, Z System bestimmt. So sind die generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned} q_1 &\equiv x(t) \\ q_2 &\equiv y(t) \\ q_3 &\equiv z(t) \\ q_4 &\equiv \varphi_x(t) \\ q_5 &\equiv \varphi_y(t) \\ q_6 &\equiv \varphi_z(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgrund der Ausdrücke der kinetischen und potenziellen Energie können die 6 Lagrangeschen Gleichungen dargestellt werden.

Die 6 simultanen Differentialgleichungen können mit Hilfe der Matrizenschreibweise aufgeschrieben werden.

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{S}q = 0 \tag{3}$$

In diesem Fall sind die generalisierten Koordinaten und ihre zweiten Ableitungen nach der Zeit:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix} \qquad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{bmatrix} \tag{4}$$

$\mathbb{M}$ ist eine symmetrische quadratische Matrix, die sogenannte Massenmatrix

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mz_s & -my_s \\ 0 & m & 0 & -mz_s & 0 & mx_s \\ 0 & 0 & m & my_s & -mx_s & 0 \\ 0 & -mz_s & my_s & \theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ mz_s & 0 & -mx_s & -D_{xy} & \theta_y & -D_{yz} \\ -my_s & mx_s & 0 & -D_{xz} & -D_{yz} & \theta_z \end{bmatrix} \tag{5}$$

S ist gleichfalls eine symmetrische quadratische Matrix, die Federmatrix

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \Sigma S_x & 0 & 0 & 0 & \Sigma S_x z' & -\Sigma S_x y' \\ 0 & \Sigma s_y & 0 & \Sigma S_y z' & 0 & \Sigma S_y x' \\ 0 & 0 & \Sigma S_z & \Sigma S_z y' & \Sigma S_z x' & 0 \\ 0 & -\Sigma S_y z' & \Sigma S_z y' & \Sigma(S_y z'^2+S_z y'^2) & -\Sigma S_z x'y' & -\Sigma S_y x'z' \\ \Sigma S_x z' & 0 & -\Sigma S_z x' & -\Sigma S_z x'y' & \Sigma(S_x z'^2+S_z x'^2) & -\Sigma S_x z'y' \\ \Sigma S_x y' & \Sigma S_y x' & 0 & -\Sigma S_y x'z' & -\Sigma S_x z'y' & \Sigma(S_x y'^2+S_y x'^2) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Die Lösung der Matrix-Differentialgleichung wird in der Form

$$q=v_i \sin \omega_i t \tag{7}$$

gesucht, wobei ω_i die Kreisfrequenz der freien Schwingungen, v_i der Eigenvektor, d.h. die Eigenschwingform sind. Die Eigenschwingform enthält die relativen Schwingungsamplituden der zu den einzelnen Freiheitsgraden gehörenden harmonischen Schwingungen. Das System hat 6 Eigenfrequenzen und 6 voneinander unabhängige Eigenvektore.

Wird die Lösung (7) in die Gl. (3) gesetzt, ergibt sich die Matrix-Gleichung (8)

$$-\omega_i^2 \mathbf{M} v_i+\mathbf{S} v_i=O \tag{8}$$

oder umgeformt

$$\mathbf{S} v_i=\omega_i^2 \mathbf{M} v_i \tag{9}$$

Die Formel (9) heißt verallgemeinertes Matrix-Eigenwert-Eigenvektor-Problem.

Berechnungsmethode

Zu der Bestimmung der Eigenwerte ist u.a. die Methode von Jacobi geeignet. Dabei läßt sich das Matrizenpaar M und S durch eine gemeinsame Kongruenztransformation gleichzeitig zu Hauptachsen transformieren. Nach der Transformation tritt eine vollständige Entkopplung unter den Differentialgleichungen auf, die Lösung wird einfach. Die Transformation wird schrittweise durchgeführt. Bei jedem Schritt wird ein Matrix-Element außerhalb der Hauptdiagonale zu O transformiert. Die Transformationsformeln sind

$$\mathbf{S}^{(k+1)}=\mathbf{P}^{*}\mathbf{S}^{(k)}\mathbf{P} \quad \mathbf{M}^{(k+1)}=\mathbf{P}^{*}\mathbf{M}^{(k)}\mathbf{P} \tag{10}$$

wobei $\mathbf{P}$ die Transformationsmatrix, $\mathbf{P}^*$ ihre transponierte Form sind. Der Index k in (10) gibt die Zahl des Iterationsschrittes an.

Die Matrix $\mathbf{P}$ hat die folgende Form:

$$\mathbf{P}=\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccccccc} &&&& \multicolumn{3}{c}{\text{Spalte}} && \\ &&&& i && j && \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 & . & \alpha && \\ &&&& . & 1 & . && \\ &&&& \gamma & . & 1 & . & \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ i \text{ Reihe} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{11}$$

Die in (11) nicht angegebenen Werte der Matrix $\mathbf{P}$ sind gleich O.

Zu der Bestimmung von α und γ sind die folgenden Beziehungen geeignet

$$\begin{aligned} a &= s_{ii}m_{ij} - m_{ii}s_{ij} \\ b &= s_{jj}m_{ij} - m_{jj}s_{ij} \\ c &= \frac{s_{ii}m_{jj} - s_{jj}m_{ii}}{2} \\ d &= c + \operatorname{sign}(c)\sqrt{c^2+ab} \\ \gamma &= -\frac{a}{d} \\ \alpha &= \frac{b}{d}. \end{aligned} \tag{12}$$

Wenn $\frac{S_{ii}}{m_{ii}} = \frac{S_{jj}}{m_{jj}} = \frac{S_{ij}}{m_{ij}}$ ist, dann sind

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= \frac{S_{ij}}{S_{jj}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Methode sichert eine schnelle Konvergenz, im allgemeinen bekommt man die Eigenwerte schon nach dem ersten Schritt mit einem Fehler von 10%.

Für die Durchführung der Berechnung wurde ein BASIC-Programm auf Sinclair-PC zusammengestellt.

Das Programm baut die mit Schwingungsisolierung versehene starre Maschine aus einfachen Teilen zusammen. Die Eingangsdaten sind: die X_{si}, Y_{si},

Z_{si} Koordinaten der Massenzentren und die Massen der einzelnen Teile, sowie die auf die durch die Massenzentren gehenden Achsen berechneten Trägheits- und Deviationsmomente der Teile.

Die Daten der Federn müssen auch einzeln angegeben werden. Das Programm baut aufgrund der Eingangsdaten die Massen- und die Federnmatrix auf. Falls die Eingabe fehlerhaft war, ist Korrektion möglich, sonst kann der Berechnungsprozess gestartet werden. Die Berechnungszeit eines Systems mit 6 Freiheitsgraden beträgt maximal 2 Minuten. Falls das Ergebnis in Hinsicht der Schwingungsisolierung nicht entsprechend ist, kann die Berechnung mit veränderten Parametern wiederholt werden.

Nach der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren ist es auch möglich die erregten Schwingungen zu berechnen. Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Fall

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{S}q = f \tag{14}$$

wo f der Vektor der generalisierten Erregerkraft ist:

$$f = \operatorname{Re}(de^{j\Omega t}) \tag{15}$$

Ω ist die Kreisfrequenz der Erregung, der Vektor d ist der komplexe Amplitudenvektor der Erregerkraft. Mit Hilfe der komplexen Amplituden können die eventuellen Phasenverschiebungen unter den Komponenten der Erregerkraft berücksichtigt werden. Mit dem Symbol Re wird der Realteil bezeichnet, j ist die imaginäre Einheit. Der inhomogene Teil der Lösung von Gl. (14) kann in Form

$$q = \operatorname{Re}(ae^{j\Omega t}) \tag{16}$$

geschrieben werden, wo die Komponenten des Vektors a die verläufig unbekannten Schwingungsamplituden sind. Setzt man q in die Formel (14) ein, so ergibt sich

$$(\mathbb{S} - \Omega^2\mathbb{M})a = d\,. \tag{17}$$

Bei $\Omega \neq \omega_i$ ist die Matrix $(\mathbb{S} - \Omega^2\mathbb{M})$ nicht singulär, und so kann sie invertiert werden:

$$a = (\mathbb{S} - \Omega^2\mathbb{M})^{-1}d\,. \tag{18}$$

In Kenntnis der Eigenwerte und Eigenvektoren ergibt sich mit Hilfe der Spektralzerlegung der Erregungen eine einfachere Berechnungsmethode. Die Bewegungsamplituden können nach [1] berechnet werden:

$$q = \operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{6} \frac{e^{j\Omega t}}{\omega_i^2 - \Omega^2} \cdot \frac{v_i \cdot v_i^*}{v_i^*\mathbb{M}v_i} \cdot d\right). \tag{19}$$

Aufgrund der G1 (19) kann die Bewegung eines beliebigen Punktes der Maschine bestimmt werden.

Literatur

1. HARRIS, C. M.—CREDE CH. E.: Shock and Vibration Handbook Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1961.
2. HOLZWESSIG, F.—DRESIG, H.: Lehrbuch der Maschinendynamik VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1979.
3. LUDVIG, GY.: Maschinendynamik (in ungarischer Sprache) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973.

Dr. Péter GOMBKÖTŐ
Dr. Péter KABOLDY
H-1521 Budapest