ZUM ANDENKEN AN PROFESSOR Dr. E. REUSS

Gy. Béda und K. Kaszap

Lehrstuhl für Technische Mechanik,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 20. September 1983

Prof. Dr. Endre Reuss
1900—1968

Summary

Dr. Endre Reuss, former professor at the department for engineering mechanics of the Technical University of Budapest, one of the founders of modern plasticity theory has became internationally known through the Prandtl–Reuss constitutive equation for the elastic-plastic body. The paper presents the life-history of professor Reuss and is appreciating his oeuvre, dealing in particular with the Prandtl–Reuss equation, one of the generally accepted basic theses of modern plasticity theory.

1. Lebenslauf und wissenschaftliche Tätigkeit

Fünfzehn Jahre sind seit dem Tod von Dr. Endre Reuss, dem international bekannten Forscher auf dem Gebiet der Plastizitätstheorie vergangen. Die vorliegende Nummer der Periodica Polytechnica Mechanica soll mit Arbeiten aus dem Gebiet der Mechanik seinem Andenken gewidmet sein.

Endre Reuss wurde am 1. Juli 1900 in Budapest geboren und starb ebenda am 10. Mai 1968. Sein Ingenieurdiplom erhielt er an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Budapest in 1922. Nach Beendigung seiner Studien arbeitete er in den Jahren 1922—24 als Assistent am Lehrstuhl für Technische Mechanik der T. U. Budapest. 1924 trat er in den Dienst der städtischen Gaswerke von Budapest und leistete dort als Betriebsingenieur 26 Jahre hindurch wertvolle Ingenieurarbeit. In 1950 trat er in die Ungarische Planungszentrale für die Chemische Industrie (VEGYTERV), 1953 wurde er zum Professor an den Lehrstuhl für Technische Mechanik der T. U. Budapest berufen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1965 wirkte. Neben seiner wissenschaftlichen- und Lehrtätigkeit war er in den Jahren 1955—57 Dekan der Fakultät für Maschinenbau der T. U.

Sein Interesse an den Wissenschaften und sein Forschertalent hat sich schon in der Mittelschule bekundet, als seine im Rahmen des Landes-Schulwettbewerbes eingereichte mathematische Arbeit den mit dem Lóránt Eötvös-Preis dotierten ersten Platz errang.

1932 promovierte er zum Dr. techn., 1942 habilitierte er zum Privatdozenten der T. U. Budapest. 1952 wurde ihm vom Rat für Wissenschaftliche Qualifikation der Akademie der Wissenschaften der Akademische Grad des Doktors der Technischen Wissenschaften verliehen. Seine erste Publikation auf dem Gebiet der Mechanik verfaßte er im Alter von 25 Jahren. Hierin konnte er zeigen, daß die Gleichwertigkeitsformel von Bach auch aus der Festigkeitshypothese von Mohr abgeleitet werden kann, wenn die Hüllkurve der Mohr'schen Kreise durch eine Kurve zweiten Grades beschrieben wird. Gleichzeitig wies er darauf hin, daß die Berechnung aufgrund einer Hüllkurve zweiten Grades gegenüber der im Falle linearer Hüllkurve keine zusätzlichen Schwierigkeiten bereitet.

Die bedeutendsten Resultate seiner wissenschaftlichen Tätigkeit bildeten seine, in den Jahren 1929—38 in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erschienenen Arbeiten.

1929 wurde von ihm (gleichzeitig mit v. Mises) gezeigt, daß die Energie einer elastischen Formänderung auch bei Kristallen in zwei Teile gespalten werden kann, welche einerseits Volumänderung bzw. anderseits

Gestaltänderung hervorrufen. Er hat außerdem gezeigt, daß bei der Bestimmung der Elastizitätskonstanten kristalliner Werkstoffe aus zwei extremen Annahmen ausgegangen werden kann, namentlich daß entweder der Verformungs- oder der Spannungszustand in der Kristallen homogen ist.

Er erkannte, daß in der mechanischen Technologie der Metalle und in einer Reihe anderer Anwendungsfälle des Verformungsverhaltens die elastische Formänderung neben der plastischen meistens nicht vernachlässigbar ist. Aus diesem Grunde sind die Formeln von Haar–Kármán und Hencky nur begrenzt anwendbar und führen zu Widersprüchen. Reuss hat — ausgehend aus der Plastizitätsbedingung von v. Mises die allgemeine aber trotzdem einfachste Form des Stoffgesetzes des elastisch-plastischen Körpers beschrieben, die auch die elastische Formänderung berücksichtigt, indem die Formänderungsgeschwindigkeit in einen elastischen und einen bleibenden Anteil zerlegt wird.

Anschließend zu dieser Würdigung wird ein Ausschnitt aus seiner 1930 in der ZAMM veröffentlichten, und seitdem vielerorts und von Vielen zitierten Arbeit abgedruckt.

In der von ihm aufgestellten Gleichung ist der elastische Anteil der Formänderungsgeschwindigkeit eine lineare Funktion der Änderungsgeschwindigkeit des Spannungsdeviators, und der plastische Anteil eine lineare Funktion des Spannungsdeviators selbst.

1932 hat er seine Theorie auch für Plastizitätsbedingungen die von der nach v. Mises abweichen verallgemeinert. Seine Theorie ist logisch und einfach und stimmt mit hoher Genauigkeit mit experimentellen Resultaten überein, was von vielen Publikationen bestätigt wird. Sie ist in Einklang mit dem später aufgestellten Stabilitätspostulat von Drucker und dem Isotropiepostulat von Ilyusin, und kann auch ausgehend aus letzterem abgeleitet werden.

Die Theorie wird im Schrifttum Prandtl–Reuss'sches Stoffgesetz genannt. Prandtl hat nämlich in 1924 das Modell des ideal elastisch-plastischen Körpers aufgestellt, ohne jedoch das dazugehörige Stoffgesetz in allgemeiner Form mathematisch beschrieben zu haben. Durch ihn ist das Prinzip der Aufteilung der Formänderung in einen elastischen und einen plastischen Anteil eingeführt worden, wobei der elastische Anteil aus dem Spannungszustand aufgrund des Hooke'schen Gesetzes zu ermitteln war. Reuss hat dieses Modell auf den allgemeinem räumlichen Fall ausgedehnt und das Stoffgesetz in exakter mathematischer Form aufgeschrieben.

Obwohl seine Theorie allgemein anerkannt worden war, traten bei der Lösung konkreter Aufgaben oft mathematische Schwierigkeiten auf, was viele zur Kritik seiner Theorie veranlaßte. Durch die Verbreitung von Rechenautomaten wird sie jedoch im Falle schwieriger plastizitätstheoretischer Untersuchungen in steigendem Masse angewendet demzufolge die Gleichung von Prandtl–Reuss heute als eine der wichtigsten Grundgleichungen der Plastizitätstheorie angesehen werden kann. Immer mehrere Publikationen werden auf sie aufgebaut; sie ist von mehreren Autoren in veränderter oder verallgemeinerter Form angeschrieben worden und wird neuerdings auch in der Mechanik nicht-elastisch-plastischer Körper angewandt. Es ist keine Übertreibung, wenn die Bedeutung des Prandtl–Reus'schen Stoffgesetzes mit der des Hooke'schen Gesetzes in der Elastizitätslehre verglichen wird.

1933 hat Reuss die sich aus der Abgleittheorie von Treca–Mohr–Guest ergebende Plastizitätsbedingung mit Hilfe der Invarianten des Spannungstensors ausgedrückt, in 1936 hat er eine Theorie für die Entstehung der Lüders–Hartmannschen Linien aufgestellt. Die labile Fließgrenze wurde von ihm mit der zum Zeitpunkt der Erscheinung der Fließfiguren nicht mehr stetigen Spannungsverteilung in Zusammenhang gebracht. Er entwickelte eine Rechenmethode zur Ermittlung der Spannungsverteilung in tordierten Stäben. Diese Theorie wurde von ihm auf der ihm zu Ehren veranstalteten Kolloquium für Plastizitätstheorie (Miskolc, 1967) in weiterentwickelter Form vorgetragen.

Seine bedeutenden wissenschaftlichen Erkenntnisse wurden im Ausland anerkannt, die einheimischen wissenschaftlichen Kreise würdigten seine Tätigkeit jedoch nicht. Wegen dieses Unverständnisses, den Problemen der Kriegsjahre und wegen Familienprobleme wurde seine wissenschaftliche Tätigkeit für einige Zeit unterbrochen. Erst seine Ernennung zum Universitätsprofessor im Jahre 1953 hat seine Forschungstätigkeit erneut in Gang gebracht.

In den Jahren 1953—56 veröffentlichte er mehrere Arbeiten in denen er die Methoden der Festigkeitsberechnung von Hochdruckbehältern der chemischen Industrie entwickelte. In der gleichen Zeit beschäftigte er sich mit dem Stokes'schen Stoffgesetz und konnte zeigen, daß dieses für hochviskose Flüssigkeiten nicht anwendbar ist. Aufgrund theoretischer Erwägungen und Resultaten experimenteller Untersuchungen empfahl er für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Stoffen an der Grenze zwischen festen und flüssigen Aggregatzustand an Stelle des Stokes'schen Stoffgesetzes jenes von Maxwell–Natanson.

Auch in die Forschung über Bruchprobleme hat er sich eingeschaltet. Er leitete eine Formel zur Bestimmung der Brucharbeit im Falle einer elastisch-plastischen Torsion aufgrund eines experimentell ermittelten Torsionsdiagramm ab.

Seine Professur ermöglichte ihm die Mitarbeit an der Lösung zahlreicher besonders wichtiger Festigkeitsprobleme der Industrie. Er hat eine wissenschaftliche Schule geschaffen, viele junge Forscher erzogen, und nahm an der

Ausbildung von Aspiranten für den wissenschaftlichen Grad eines Kandidaten der Technischen Wissenschaften teil. Über seine Forschungsergebnisse hielt er zahlreiche Vorträge im In- und Ausland. Er war der Verfasser mehrerer Universitätsskripten und Lehrbüchern. Er nahm am öffentlichen Leben der ungarischen Ingenieure Teil, war in verschiedenen Fachausschüssen der Akademie der Wissenschaften tätig und auch sein Beitrag zur Normung war bedeutend.

Sein Interessenkreis erstreckte sich weit über sein engeres Fachgebiet. So beschäftigte er sich z. B. auch mit den mechanischen Problemen der Musikinstrumente.

Seine tiefe Menschlichkeit, sein liebenswürdiges bescheidenes Wesen bleibt allen die ihn kannten in liebevoller Erinnerung. Er war ein Forscher von außerordentlicher Begabung und hoher Bildung, der jeden, mit dem er in Berührung kam, tief beeindruckte. Den Wert seiner wissenschaftlichen Erkenntnisse hat die Zeit vollauf bestätigt. Sein Lebenswerk ist das Vorbild von allen, die ihn als Lehrmeister betrachten.

2. Wissenschaftliche Veröffentlichungen von Dr. Endre Reuss

Originalaufsätze

Im XXV. Schülerwettbewerb für Mathematik der Ungarischen Mathematischen und Physikalischen Gesellschaft mit dem ersten Lóránt Eötvös-Preis dotierte Arbeit. Matematikai és Physikai Lapok (Mathematische und Physikalische Blätter) *27* (1918) S. 314—317.

Bach összetett szilárdsági formulája a Mohr-elmélet szempontjából. (Die Formel von Bach für Festigkeit bei zusammengesetzter Beanspruchung aus dem Standpunkt der Theorie von Mohr.) Technika *6* (1925) S. 81—84.

Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung von Einkristallen. Z. Angew. Math. und Mech. *9* (1929) S. 49—58.

Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. Z. Angew. Math. u. Mech. *10* (1930) S. 266—274.

A hidegalakítás befolyása a vas- és acélanyagok folyási határára. (Einfluß der Kaltverformung auf die Fließgrenze von Eisen und Stahl.) Doktor-Dissertation. Budapest, 1931.

A hidegalakítás befolyása a vas- és acélanyagok folyási határára. (Einfluß der Kaltverformung auf die Fließgrenze von Eisen und Stahl.) Anyagvizsgálók közlönye *10* (1932) S. 238—273.

Fließpotential oder Gleitebenen? Z. Angew. Math. Mech. *12* (1932) S. 15—24.

Vereinfachte Berechnung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfließbedingung. Z. Angew. Math. Mech. *13* (1933) S. 356—360.

Anisotropy Caused by Strain. Proc. IV. Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge. 1935. S. 241.

Über Lüders-Hartmannsche Linien. Z. Angew. Math. Mech. *18* (1938) S. 347—357.

Vegyipari nyomástartó edények osztályokba sorolása a biztonsági előírások szempontjából. (Kategorisierung von Druckbehältern in Hinblick auf die Sicherheitsbestimmungen.) (Gemeinsam mit Ivan Kausz.) Technika. (1952) S. 448—451.

Bélcső—donga—abroncs szerkezetű nyomástartó edények falvastagságának számítása és ellenőrzése különböző üzemi állapotokra. (Berechnung und Kontrolle der Wanddicke von aus Kernrohr, Dauben und Reifen aufgebauten Behälter für verschiedene Betriebszustände.) Vertraulicher, unveröffentlichter Bericht. 1953.

Die Stoffgleichung hochviskoser Flüssigkeiten und ihre Anwendung auf den Ultraschall. Acta Technica. *6* (1953) S. 65—78.

Nagy viszkozitású folyadék anyagegyenlete és alkalmazása az ultrahangra. (Stoffgleichung hochviskoser Flüssigkeiten und ihre Anwendung auf den Ultraschall.) Berichte der Klasse für Techn. Wissenschaft der Ung. Akademie d. Wiss. *9* (1953) S. 57—70.

A műszaki aspiránsok képzésének néhány időszerű kérdéséről. (Über einige aktuelle Fragen der Ausbildung technisch-wissenschaftlicher Aspiranten.) Felsőoktatási Szemle. 1954. S. 552—556.

Stress Analysis of Strip-wound High-pressure Vessels by the Theory of Anisotropic Elastic Bodies. Acta Technica. *14* (1956) S. 113—125.

Der Membranspannungszustand in einer Kugelschale in der Umgebung eines konzentrierten Momentes. (Gemeinsam mit F. Thamm.) Periodica Polytechnica Mech. Eng. *4* (1960) S. 217—226.

Theoretische Untersuchung der inneren Spannungskonzentration. Acta Technica. *25/26* (1961) S. 277—287.

Some reflections on the relaxation of biharmonic differential equations in polar coordinates. (Gemeinsam mit R. Iring und C. S. Yang.) Periodica Polytechnica Mech. Eng. *5* (1961) S. 335—344.

Berechnung der Brucharbeit aus dem Torsionsversuch am zylindrichen Probestab. Acta Technica. *39* (1962) S. 259—263.

Vorlesungsskripten, Bücher

Általános szilárdságtan és az elemi szilárdságtan néhány fejezete. (Allgemeine Festigkeitslehre und einige Kapitel der elementaren Festigkeitslehre.) Aufgrund der Vorlesungen von E. Reuss zusammengestellt von Gy. Gyenes und F. Rosivall.) Budapest.

A maradó alakváltozások mechanikájának áttekintése utalással a gyakorlati alkalmazásokra. (Übersicht über die Mechanik der bleibenden Formänderungen mit Hinblick auf die praktische Anwendung.) Skript des Instituts für Ingenieur-Weiterbildung. Budapest, 1953.

Bányászati Kézikönyv. (Handbuch für den Bergbau.) Abschnitte über Kontinuumsmechanik und Mechanik plastischer Körper. Budapest. 1953.

Pattantyús: Gépész- és Villamosmérnökök kézikönyve. (Handbuch Maschinenbau und Elektrotechnik.) Bd. 2.: Kontinuumsmechanik (S. 737—755.) Mechanik bildsamer Körper (S. 983—998.) Műszaki Könyvkiadó. Budapest, 1961.

A képlékenységtan módszerei. (Methoden der Plastizitätstheorie.) Skript für Hörer des Post-graduate-Kurses für Maschinenbau-Konstrukteure. Tankönyvkiadó, Budapest. 1962.

Műszaki Értelmező Szótár. (Definitionswörterbuch für Technik.) Bd. 4.: Technische Mechanik (als Mitarbeiter) Terra. Budapest. 1959.

Teilnahme bei der Zusammenstellung folgender ungarischer Normen: MNOSZ 244 RT, MNOSZ 316. T. MNOSZ 4899, MNOSZ 13797—13800 RT.

Vorträge

Anisotropy Caused by Strain. IV. Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge. 1934.

Hangrendszerek és billentyűzetek. (Tonsysteme und Klaviaturen.) Wissenschaftliche Tagung an der T. U. Budapest. 1955.

Bemerkungen zur Berechnung der Einflüsse von Spannungsspitzen auf die Ermüdung. Vortrag, gehalten auf dem Kolloquium für Mechanik, veranstaltet vom Wissenschaftlichen Verein der Mathematiker und Physiker Rumäniens. Bukarest, 1959.

A méretező eljárások áttekintése. (Übersicht über die Bemessungsverfahren.) Kolloquium, veranstaltet von der Klasse für technische Wissenschaft der Ung. Akademie d. Wissenschaften. Budapest, 1958.

Lüders–Hartmann vonalak csavart prizmatikus rúdban. (Lüders–Hartmannsche Linien in prismatischen Torsionsstäben.) Kolloquium für Plastizitätstheorie. Miskolc. 1967.

3. Teilabdruck der Arbeit von Dr. E. REUSS, erschienen in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM) Bd. 10 (1930), Heft 3. S. 266—274

Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie

Von A. REUSS in Budapest

1. Betrachtet man den heutigen Stand der Plastizitätstheorie, so fällt es auf, daß zum größten Teil solche Probleme behandelt werden, bei welchen die elastische Formänderung neben der plastischen vernachlässigt werden kann. Diese Probleme spielen in der mechanischen Technologie der Metalle, insbesondere bei der Warmverformung, eine ganz bedeutende Rolle.

Im vorliegenden Aufsatze soll gezeigt werden, daß die Plastizitätstheorie auch auf solche Fälle angewendet werden kann, in welchen die plastische Formänderung von derselben Größenordnung ist, wie die elastische.

Diese Aufgabe wurde bereits auch von A. Haar und Th. v. Kármán[1], ferner von H. Hencky[2] gestellt und auch gelöst, indem das Prinzip des Minimums der Formänderungsarbeit für die plastische Formänderung postuliert wurde. Ihre Lösungen führen jedoch, wie gezeigt werden kann,

[1] A. Haar und Th. v. Kármán: Göttingen, Nachrichten math.-phys. Klasse, 1909, S. 204 bis 218.

[2] H. Hencky, diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 323 bis 334.

zu Widersprüchen, wodurch ein neuer Ansatz, welcher die Widersprüche behebt, gerechtfertigt wird.

Mit Hilfe dieses neuen Ansatzes werden zwei Beispiele durchgerechnet, welche geeignet erscheinen, an der Aufklärung des verborgenen Mechanismus der Formänderung mitzuwirken.

2. Ansatz zu einer Theorie plastisch-elastischer Formänderung. Für den elastischen Teil der Formänderung gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x'-e'&=\frac{1}{2G}(\sigma_x-p)\,; \qquad \gamma_x'=\frac{1}{G}\tau_x \\ \varepsilon_y'-e'&=\frac{1}{2G}(\sigma_y-p)\,; \qquad \gamma_y'=\frac{1}{G}\tau_y \\ \varepsilon_z'-e'&=\frac{1}{2G}(\sigma_z-p)\,; \qquad \gamma_z'=\frac{1}{G}\tau_z \end{aligned} \tag{1}$$

$$e'=\frac{m-2}{2(m+1)G}\cdot p \tag{2}$$

wo

$$e'=\frac{1}{3}(\varepsilon_x'+\varepsilon_y'+\varepsilon_z') \qquad \text{und} \qquad p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \tag{3}$$

Wir nehmen an, daß die Volumänderung ausschließlich elastischen Ursprungs ist, so daß die Gleichung

$$e=\frac{m-2}{2(m+1)G}\cdot p \tag{4}$$

mit

$$e=\frac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) \tag{5}$$

auch ganz allgemein besteht.

Die Plastizitätsgrenze nehmen wir in der Gestalt

$$(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2+6(\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2)=2k^2 \tag{6}$$

an[1], welche zu analytischen Berechnungen am geeignetsten erscheint und auch durch Versuche genügend gerechtfertigt ist.

[1] Es ist das die von R. v. Mises eingeführte Bedingungsgleichung. Nachr. d. Gött. Ges. d. Wissensch. 1913.

Werden die elastischen Formänderungen neben den plastischen vernachlässigt, so setzt die Plastizitätstheorie die plastische Formänderungsgeschwindigkeit dem Spannungsdeviator proportional:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon_x''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_x - p); \qquad & \frac{d\gamma_x''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_x \\
\frac{d\varepsilon_y''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_y - p); \qquad & \frac{d\gamma_y''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_y \\
\frac{d\varepsilon_z''}{dt} &= \frac{\lambda}{2G}(\sigma_z - p); \qquad & \frac{d\gamma_z''}{dt} &= \frac{\lambda}{G}\tau_z
\end{aligned} \tag{7}$$

wo schon berücksichtigt wurde, daß die plastische Volumänderung Null ist. Diese Beziehungen wollen wir postulieren.

Endlich wird die Summe der aus (1) und (7) berechneten Deformationsgeschwindigkeiten der ganzen Deformationsgeschwindigkeit gleichgesetzt.

$$\begin{aligned}
2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_x - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_x - p) + \lambda(\sigma_x - p); \qquad & G\frac{d\gamma_x}{dt} &= \frac{d\tau_x}{dt} + \lambda\tau_x \\
2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_y - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_y - p) + \lambda(\sigma_y - p); \qquad & G\frac{d\gamma_y}{dt} &= \frac{d\tau_y}{dt} + \lambda\tau_y \\
2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_z - e) &= \frac{d}{dt}(\sigma_z - p) + \lambda(\sigma_z - p); \qquad & G\frac{d\gamma_z}{dt} &= \frac{d\tau_z}{dt} + \lambda\tau_z
\end{aligned} \tag{8}$$

Von diesen Gleichungen hängen die drei ersten voneinander ab.

Sind $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ als Funktionen der Zeit gegeben, so genügen die Gl. (3), (4), (5), (6) und (8) zur Berechnung von $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, p, \lambda$. Als Anfangswerte dienen die Werte dieser Größen beim Ueberschreiten der Fließgrenze.

Im speziellen Falle, daß die Hauptachsenrichtungen während der Deformation unverändert bleiben, lassen diese Gleichungen eine recht anschauliche Deutung zu. Das Koordinatenkreuz kann in den Hauptachsen angenommen werden, so daß identisch $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$ ist. Ein jeder Spannungszustand wird dann im σ_1, σ_2, σ_3 Raum durch einen Vektor abgebildet, dessen in die Richtung 1 : 1 : 1 fallende Komponente (p, p, p) ist. Der Vektor $\sigma_1 - p$, $\sigma_2 - p$, $\sigma_3 - p$ fällt also in die Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

Die Gl. (6) vereinfacht sich in unserem speziellen Falle zu

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2k^2 \tag{9}$$

welche im σ_1, σ_2, σ_3 Raum durch einen Zylinder mit der Achsenrichtung 1 : 1 : 1 dargestellt wird, da, wenn σ_1, σ_2, σ_3 ein Punkt des Zylinders ist, es auch $\sigma_1 - t, \sigma_2 - t, \sigma_3 - t$ ist. Dieser Zylinder ist von der zweiten Ordnung, hat außerdem drei nicht zusammenfallende Symmetrieebenen, welche den Vertauschungen der Koordinaten entsprechen, ist also ein Kreiszylinder. Er wird von der zu seiner Achse senkrechten Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ in einem Kreise geschnitten, auf welchem die Endpunkte P der Vektoren mit den räumlichen Komponenten $\sigma_1 - p$, $\sigma_2 - p$, $\sigma_3 - p$ liegen müssen.

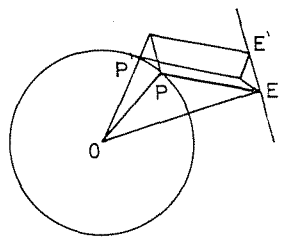

Abb. 1

Fassen wir die Ebene $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ näher ins Auge (Abb. 1). Die Gesamtdeformation abzüglich der Volumänderung wird in dieser Ebene durch den Vektor OE mit den räumlichen Komponenten $2G(\varepsilon_1 - e)$, $2G(\varepsilon_2 - e)$, $2G(\varepsilon_3 - e)$ dargestellt. In demselben Maßstabe wird die elastische Formänderung abzüglich der Volumänderung durch den Halbmesser OP wiedergegeben. Die Differenz, der Vektor PE, stellt die plastische Deformation dar.

Die differenzielle Aenderung der Deformation läßt sich durch einen vom Punkte E aus gezogenen unendlich kleinen Vektor EE' versinnbildlichen. Die differenzielle Aenderung des Spannungszustandes wird durch einen Vektor veranschaulicht, welcher von P aus in die Richtung der Tangente des Kreises weist. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2Gd(\varepsilon_1 - e) &= d(\sigma_1 - p) + \lambda(\sigma_1 - p)\,dt \\ 2Gd(\varepsilon_2 - e) &= d(\sigma_2 - p) + \lambda(\sigma_2 - p)\,dt \\ 2Gd(\varepsilon_3 - e) &= d(\sigma_3 - p) + \lambda(\sigma_3 - p)\,dt \end{aligned} \tag{10}$$

besagen dann, daß der Vektor der differenziellen Deformationsänderung in zwei Komponente zerlegt werden kann, von denen die eine in die Richtung der Tangente im Punkt P weist und die Aenderung der Spannung bzw. der elastischen Formänderung angibt, die andere in die Richtung der Normale weist und die Aenderung der plastischen Deformation darstellt. Hier haben wir auch ein anschauliches Kriterium dafür gefunden, daß der Körper im plastischen Zustande verbleibt. Der Vektor, welcher die plastische Deformation darstellt, muß nach außen weisen, im entgegengesetzten Falle würde nämlich die ganze differenzielle Formänderung elastisch sein. Kurz gefaßt: die Deformation hat nur dann einen plastischen Anteil, wenn sich der Punkt E nach Ueberschreiten der Fließgrenze vom Mittelpunkt entfernt.

Ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Fließgrenze darstellt, klein im Verhältnis zum Krümmungshalbmesser der Bahn von E, so dreht sich der Halbmesser OP zur Tangente in E nahezu parallel, die Aenderung der elastischen Formänderung kann dann gegenüber der plastischen vernachlässigt werden und $d(\varepsilon_1-e)$, $d(\varepsilon_2-e)$, $d(\varepsilon_3-e)$ sind zu den Größen σ_1-p, σ_2-p, σ_3-p annähernd proportional.

So können wir also die Bedingungen veranschaulichen, unter denen die Vernachlässigung der elastischen Deformationen zulässig ist.

3. Anwendung auf konstante Formänderungsgeschwindigkeit. Subtrahiert man die drei ersten Gl. (8) paarweise der Reihe nach voneinander und führt die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\zeta_x &= 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_y-\varepsilon_z)\,; &\quad \eta_x &= G\frac{d\gamma_x}{dt}\,; &\quad \rho_x &= \sigma_y-\sigma_z \\
\zeta_y &= 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_z-\varepsilon_x)\,; &\quad \eta_y &= G\frac{d\gamma_y}{dt}\,; &\quad \rho_y &= \sigma_z-\sigma_x \\
\zeta_z &= 2G\frac{d}{dt}(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\,; &\quad \eta_z &= G\frac{d\gamma_z}{dt}\,; &\quad \rho_z &= \sigma_x-\sigma_y
\end{aligned} \tag{12}$$

ein, so gehen die Gl. (8) und (6) in

$$\begin{aligned}
\zeta_x &= \frac{d\rho_x}{dt}+\lambda\rho_x\,; &\quad \eta_x &= \frac{d\tau_x}{dt}+\lambda\tau_x \\
\zeta_y &= \frac{d\rho_y}{dt}+\lambda\rho_y\,; &\quad \eta_y &= \frac{d\tau_y}{dt}+\lambda\tau_y \\
\zeta_z &= \frac{d\rho_z}{dt}+\lambda\rho_z\,; &\quad \eta_z &= \frac{d\tau_z}{dt}+\lambda\tau_z
\end{aligned} \qquad (13),$$

$$\rho_x^2+\rho_y^2+\rho_z^2+6(\tau_x^2+\tau_y^2+\tau_z^2)=2k^2 \tag{14}$$

über. Die letzte Gleichung nach t differenziert, ergibt

$$\rho_x \frac{d\rho_x}{dt} + \rho_y \frac{d\rho_y}{dt} + \rho_z \frac{d\rho_z}{dt} + 6\left(\tau_x \frac{d\tau_x}{dt} + \tau_y \frac{d\tau_y}{dt} + \tau_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 0 \qquad (15).$$

Multipliziert man die Gl. (13) der Reihe nach mit $\rho_x, \rho_y, \rho_z, 6\tau_x, 6\tau_y, 6\tau_z$ und addiert, so folgt mit Rücksicht auf (14) und (15)

$$\zeta_x \rho_x + \zeta_y \rho_y + \zeta_z \rho_z + 6(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y + \eta_z \tau_z) = 2k^2 \lambda \qquad (16).$$

Sind die Komponenten der Formänderungsgeschwindigkeit konstant, so sind es auch die ζ und η, und es ergibt sich durch Differenzieren nach t weiter

$$\zeta_x \frac{d\rho_x}{dt} + \zeta_y \frac{d\rho_y}{dt} + \zeta_z \frac{d\rho_z}{dt} + 6\left(\eta_x \frac{d\tau_x}{dt} + \eta_y \frac{d\tau_y}{dt} + \eta_z \frac{d\tau_z}{dt}\right) = 2k^2 \frac{d\lambda}{dt} \qquad (17).$$

Multipliziert man die Gl. (13) der Reihe nach mit $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z, 6\eta_x, 6\eta_y, 6\eta_z$ und addiert, so erhält man mit Rücksicht auf (17)

$$\alpha^2 = \frac{d\lambda}{dt} + \lambda^2 \qquad (18),$$

wo zur Abkürzung

$$\alpha^2 = \frac{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 + 6(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}{2k^2} \qquad (19)$$

gesetzt wurde.

Den Anfangswert von λ erhalten wir aus (16) mit Hilfe der Anfangswerte $\rho_{x0}, \rho_{y0}, \rho_{z0}, \tau_{x0}, \tau_{y0}, \tau_{z0}$ zu

$$\lambda = \frac{\zeta_x \rho_{x0} + \zeta_y \rho_{y0} + \zeta_z \rho_{z0} + 6(\eta_x \tau_{x0} + \eta_y \tau_{y0} + \eta_z \tau_{z0})}{2k^2} \qquad (20).$$

Rechnen wir die Zeit vom Ueberschreiten der Fließgrenze an, so ist (18) mit diesen Anfangswerten integriert

$$t - t_0 = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arth} \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} \log \frac{\alpha + \lambda}{\alpha - \lambda}$$

oder

$$\lambda = \alpha \operatorname{th} \alpha(t - t_0) = \alpha \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} \qquad (21),$$

wo zur Abkürzung noch

$$t_0 = \frac{-1}{\alpha} \operatorname{arth} \frac{\lambda_0}{\alpha} = \frac{-1}{2\alpha} \log \frac{\alpha+\lambda_0}{\alpha-\lambda_0} \tag{22}$$

gesetzt wurde.

Mit diesem Werte geht (13) in

$$\zeta_x = \frac{d\rho_x}{dt} + \alpha \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} \rho_x \quad \text{usw} \tag{23}$$

über. Diese lineare Differenzialgleichung läßt sich leicht lösen und ergibt mit den Anfangswerten $t=0$, $\rho_x = \rho_{x0}$

$$\rho_x = \frac{\zeta_x}{\alpha} \cdot \frac{e^{\alpha(t-t_0)} - e^{-\alpha(t-t_0)} + \text{konst.}}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}} = \frac{\zeta_x}{\alpha} \operatorname{th} \alpha(t-t_0) + $$

$$+ \frac{\rho_{x0} \operatorname{ch} \alpha t_0 + \dfrac{\zeta_x}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t_0}{\operatorname{ch} \alpha(t-t_0)} \tag{24}$$

Mit Rücksicht auf (22) wird

$$\rho_x = \frac{\zeta_x}{\alpha} \cdot \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha t + \lambda_0 \operatorname{ch} \alpha t + \dfrac{\rho_{x0}}{\zeta_x} \alpha^2 - \lambda_0}{\alpha \operatorname{ch} \alpha t + \lambda_0 \operatorname{sh} \alpha t} .$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die anderen Spannungskomponenten.

Mit wachsendem t streben, wie zu erwarten ist, die Größen $\rho_x, \rho_y, \rho_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ den entsprechenden und proportionalen Grössen $\frac{\zeta_x}{\alpha}, \frac{\zeta_y}{\alpha}, \frac{\zeta_z}{\alpha}, \frac{\eta_x}{\alpha}, \frac{\eta_y}{\alpha}, \frac{\eta_z}{\alpha}$ zu. Wir stossen also wieder auf die geläufige Plastizitätstheorie.

Aus den Werten ρ_x, ρ_y, ρ_z und p lassen sich die Spannungen mit Hilfe der Formeln

$$\sigma_x = p - \frac{\rho_y - \rho_z}{3}; \qquad \sigma_y = p - \frac{\rho_z - \rho_x}{3}; \qquad \sigma_z = p - \frac{\rho_x - \rho_y}{3} \tag{25}$$

berechnen. Für die Formänderungsgeschwindigkeiten bestehen die Gleichungen

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{\zeta_y - \zeta_z}{6G}; \quad \frac{d\varepsilon_y}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{\zeta_z - \zeta_x}{6G}; \quad \frac{d\varepsilon_z}{dt} = \frac{de}{dt} - \frac{\zeta_x - \zeta_y}{6G}$$
$$\frac{d\gamma_x}{dt} = \frac{\eta_x}{G}; \quad \frac{d\gamma_y}{dt} = \frac{\eta_y}{G}; \quad \frac{d\gamma_z}{dt} = \frac{\eta_z}{G} \qquad (26).$$

Diese Differentialgleichungen können, falls die Anfangswerte bekannt sind, unmittelbar integriert werden.

Die hier angegebene Lösung für konstante Formänderungsgeschwindigkeit lässt noch eine Verallgemeinerung zu. Der Parameter t muß nicht unbedingt die Zeit angeben, sondern kann selbst eine Funktion der Zeit sein. Unsere Ausführungen sind daher in allen Fällen anwendbar, in welchen sich die Komponenten der Formänderungsgeschwindigkeit zwar ändern, aber zueinander proportional bleiben. In diesem Falle läßt sich der Fortgang der Deformation im 6-dimensionalen Raum mit den Formänderungskomponenten als Koordinaten und der Zeit als Parameter durch einen räumlichen Poligonzug veranschaulichen.

4. Zusammenfassung

Dr. Endre Reuss, ehemaliger Professor des Lehrstuhles für Technische Mechanik der Technischen Universität Budapest, einer der Begründer der modernen Plastizitätstheorie, wurde durch das Prandtl—Reuss'sche Stoffgesetz der Plastizitätstheorie international bekannt. Es wird sein Lebenslauf und sein wissenschaftliches Lebenswerk beschrieben, mit besonderer Beachtung der Aufstellung des Prandtl—Reuss'schen Stoffgesetzes, einer der wichtigsten, allgemein anerkannten Grundgleichungen der Plastizitätstheorie.

Prof. Dr. Gyula BÉDA
Dr. Kálmán KASZAP
H-1521, Budapest