STABILISATION GYROSCOPIQUE DE LA POSITION D'ÉQUILIBRE INSTABLE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES CONSERVATIFS

J. HERING

Chaire de Mécanique Technique,
Université Technique, H-1521 Budapest

Reçu le 20 septembre 1983

Présenté par Prof. Dr. Gy. Béda

Summary

The study deals with the possibility of stabilization of conservative mechanical systems in the instable state of equilibrium. It investigates how instability is influenced by the gyroscope built into the system and at what rotation speed the gyroscope can be stabilized.

It determines under what circumstances the system obtained by such a way can be considered as a Ljapunov-system. Within the frame of an example it determines the condition of existing periodical solvings.

Considérons un système mécanique conservatif à n degré de liberté symbolisé par les $q_1, q_2, \ldots, q_n$ coordonnées généralisées indépendantes dont $U = U(q_1, q_2, \ldots, q_n) = U(q_i)$ est l'énergie potentielle et $T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n) = T(q_i, \dot{q}_i)$ l'énergie cinétique. Dans la position d'équilibre du système mécanique examiné de coordonnées $q_1 = \ldots = q_n = 0$ soit

$$U(0) = U_0 = 0$$

et dans cette position d'équilibre, la fonction U n'aie pas de minimum isolé, autrement dit que la position d'équilibre en question n'est pas — au sens de Lejeune-Dirichlet — stable.

Dans cet article nous examinons comment un corps solide tournant à grande vitesse — gyroscope — encastré dans un tel système conservatif influence la stabilité du système dans une position d'équilibre statiquement instable.

Équation du mouvement des systèmes mécaniques conservatifs complétés par un gyroscope

Nous diviserons les coordonnées généralisées du système mécanique complété par un gyroscope en deux groupes:

— la position du système est désigné par les coordonnées généralisées q_1, $q_2, \ldots, q_m$, tandis que

— l'angles de rotation des gyroscopes sont désignés par les coordonnées généralisées $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$.

En introduisant les vecteurs colonnes de coordonnées généralisées

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_{m+1} \\ \varphi_{m+2} \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

l'énergie cinetique peut être écrit sous forme:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.1}$$

où **A** et **D** sont des matrices quadratiques positives définites, **B** une matrice $n \times (n-m)$.

Après ce choix de coordonnées l'énergie potentielle ne dépend que des coordonnées q_i:

$$U = U(q_1, \ldots, q_m) = U(\mathbf{q}) \tag{1.2}$$

Puisque le vecteur coordonnée $\boldsymbol{\varphi}$ n'apparaît pas dans le Lagrangien

$$L = T - U \tag{1.3}$$

pour cela les coordonnées φ_i sont des coordonnées cycliques et ainsi — dans le sens des équations de Lagrange — leurs impulsions généralisées correspondantes p_i sont constantes:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{c} = \text{constante} \tag{1.4}$$

Étant donné que det $\mathbf{D} \neq 0$, nous pouvons écrire que:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} \tag{1.5}$$

qui, remplacée dans (1.1) nous donne une expression T^* de l'énergie cinétique T, qui ne dépend que du vecteur-coordonnées positionnelles $\mathbf{q}$ (non cyclique) et du vecteur-vitesse $\dot{\mathbf{q}}$:

$$T = T^* = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}] \cdot \dot{\mathbf{q}} + $$

$$+ \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{c} = T_2^* + T_0^* \tag{1.6}$$

où T_2^* est quadratique en $\dot{\mathbf{q}}$, T_0 représente les membres d'ordre nul.

Introduisant la fonction de Routh

$$R = \mathbf{p}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} - L \tag{1.7}$$

et remplaçant les relations (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6) nous obtenons:

$$R = R_2 + R_1 + R_0 \tag{1.8}$$

où R_2, R_1 et R_0 sont les membres de degré deux, un et nul de la fonction de Routh en $\dot{\mathbf{q}}$:

$$R_2 = -T_2^* = -\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \cdot [\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B}] \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

$$R_1 = -\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{a}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{m} a_j \dot{q}_j \tag{1.9}$$

$$R_0 = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{c} + U$$

Remplaçant dans les équations de Routh

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.10}$$

les valeurs de la fonction R données par (1.8) et (1.9) nous obtenons:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_2^*}{\partial q_i} = Q_i + \Gamma_i \tag{1.11}$$

où

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

sont les forces potentielles et

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{\partial a_i}{\partial q_j} - \frac{\partial a_j}{\partial q_i}\right] \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \dot{q}_j$$

les forces gyroscopiques ($g_{ij} = -g_{ji}$)

Soit

$$\left.\begin{aligned} q_1 = \ldots = q_m = q_1^0 = \ldots = q_m^0 = 0 \\ \dot{\varphi}_{m+1} = \ldots = \dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{m+1}^0 = \ldots = \dot{\varphi}_n^0 = \text{constante} \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

la solution d'un état de mouvement stationnaire de l'équation (1.11). Afin d'examiner la stabilité de cet état de mouvement stationnaire, considérons la forme linéaire des équations de mouvement correspondantes aux perturbations x_i des coordonnées q_i^0:

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (1.13)$$

où **A** et **C** sont des matrices symétriques, **G** par contre antisymétrique. À l'aide d'un choix de la matrice **S** et de la transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \qquad (1.14)$$

les coordonnées normales ϑ_i étant introduites nous pouvons écrire

$$\ddot{\vartheta}_i + \sum_{j=1}^{m} f_{ij} \dot{\vartheta}_{ij} + e_i \alpha_i^2 \vartheta_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1.15)$$

où

$$f_{ij} = -f_{ji} \qquad \text{et} \qquad |e_i| = 1.$$

Vu que d'après nos suppositions, la position d'équilibre $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ est instable, nous avons donc au moins une valeur de k pour laquelle

$$e_k = -1 \qquad (1.16)$$

La solution du système d'équation differentielle du mouvement perturbé sera cherchée dans la forme

$$\vartheta_i = A_i \cdot e^{\lambda t} \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1.17)$$

L'équation caractéristique est:

$$\begin{vmatrix} (\lambda^2 + e_1 \alpha_1^2) & \lambda f_{12} & \ldots & \lambda f_{1m} \\ -\lambda f_{12} & (\lambda^2 + e_2 \alpha_2^2) & \ldots & \lambda f_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda f_{1m} & -\lambda f_{2m} & \ldots & (\lambda^2 + e_m \alpha_m^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.18)$$

ce qui nous conduit vers une équation du $2m$-ième degré ne contenant que des termes d'exposants pairs:

$$\lambda^{2m} + a_1 \lambda^{2(m-1)} + \ldots + a_{m-1} \lambda^2 + a_m = 0 \qquad (1.19)$$

et ainsi nous pouvons l'écrire sous forme d'un produit contenant uniquement des expressions du deuxième degré:

$$\prod_{k=1}^{m} (\lambda^2 - \lambda_k^2) = 0 \tag{1.20}$$

où λ_k^2 $(k=1, \ldots, m)$ sont les racines de l'équation du m-ième degré en λ^2 (1.19) et supposons que toute racines λ_k^2 soit distinctes. Les racines λ_{k1} et λ_{k2} de l'équation caractéristique sont donc des paires de nombres complexes ayant des angles de 180° l'un par rapport à l'autre:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{k_1} &= B_k \cdot e^{i\beta_k} \\ \lambda_{k_2} &= B_k \cdot e^{i(\beta_k + \pi)} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

Puisque la condition nécessaire à la stabilité des solutions de la forme (1.17) est que

$$\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0 \tag{1.22}$$

donc

$$\lambda_{k_{1,2}} = \pm B_k \cdot i \tag{1.23}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_k^2 = -B_k^2$$

où B_k est un nombre réel. L'équation (1.20) s'écrira donc:

$$\prod_{k=1}^{m} (\lambda^2 + B_k^2) = 0 \tag{1.24}$$

et à la base de (1.18) et (1.19) on peut écrire:

$$a_m = \prod_{i=1}^{m} e_i \alpha_i^2 = \prod_{i=1}^{m} B_i^2 > 0$$

autrement dit que la condition nécessaire — mais non suffisant — à la stabilisation gyroscopique de la position d'équilibre instable est:

$$\prod_{i=1}^{m} e_i > 0 \tag{1.25}$$

Cela veut dire que dans l'équation (1.15) le signe des nombres pairs α_i doit être négatif, autrement dit: l'instabilité de nombres impairs ne peut pas être stabilisée gyroscopiquement [1].

Condition d'existance de solutions périodiques

Pour prouver qu'au voisinage suffisamment petit de la position d'équilibre instable du système mécanique conservatif muni d'un gyroscope, existent des solutions périodiques, il suffit de montrer que le système en question appartient aux systèmes dit Liapounov [2].

Un système est dit de Liapounov si les conditions suivantes sont satisfaites:

— L'équation caractéristique de la partie linéaire des équations de mouvement aie au moins une paire de racines imaginaires $\pm\alpha\cdot i$ et le système — à l'aide d'une transformation linéaire convenable — peut être mis sous la forme:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha y_2 + Y_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \dot{y}_2 &= \quad \alpha y_1 + Y_2(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \dot{y}_k &= b_3 y_3 + b_4 y_4 + \ldots + b_m y_m + Y_k(y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ & \qquad (k = 3, 4, \ldots, m) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où Y_1, Y_2 et Y_k sont des fonctions analytiques de $y_1, \ldots, y_m$ dont le développement en séries ne contient pas de terme dont le degré soit inférieur à deux et $b_3, b_4, \ldots, b_m$ sont des coefficient réels et constants.

— Les racines $\pm\alpha\cdot i$ sont simples et même leurs produits de nombres entiers ne sont pas racines de l'équation caractéristique et aucune de ses racines ne soit nulle.

— Le système a une premier integrale de type

$$H = y_1^2 + y_2^2 + W(y_3, y_4, \ldots, y_m) + S(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \text{constante} \tag{2.2}$$

où W est une forme quadratique des variables $y_3, y_4, \ldots, y_m$, S est un fonction analytique des variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dont le développement en série ne contient pas de termes dont le degré est inférieur à trois.

Dans le sens d'un théorème de Liapounov, les systèmes qui satisfont aux trois conditions susdites, possèdent des solutions périodiques au voisinage suffisamment petit de l'origine, sous des conditions initiales précisées.

Dans ce qui suit nous allons montrer à l'aide d'un exemple, l'application de ce théorème.

Exemple de stabilisation gyroscopique de la position d'équilibre instable

Examinons la possibilité de stabilisation gyroscopique de la position d'équilibre doublement instable du système représenté par la figure 1 (pendule de Wilson) [3].

Dans le cadre 1 tournant autour de l'axe x_0 peut tourner le cadre 2 autour de l'axe z_1. Dans le cadre 2 tourne un corps de masse m — le gyroscope — autour de l'axe y_2. Afin de simplifier les calculs des masses des cadres 1 et 2 sont négligées. Le cadre 2 est relié au cadre 1 par un ressort de rigidité k.

Considérant les notations de la figure, le moment d'inertie du gyroscope dans le système de coordonnées $R_2(x_2, y_2, z_2)$ est:

$$\Theta_S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{R_2} \tag{3.1}$$

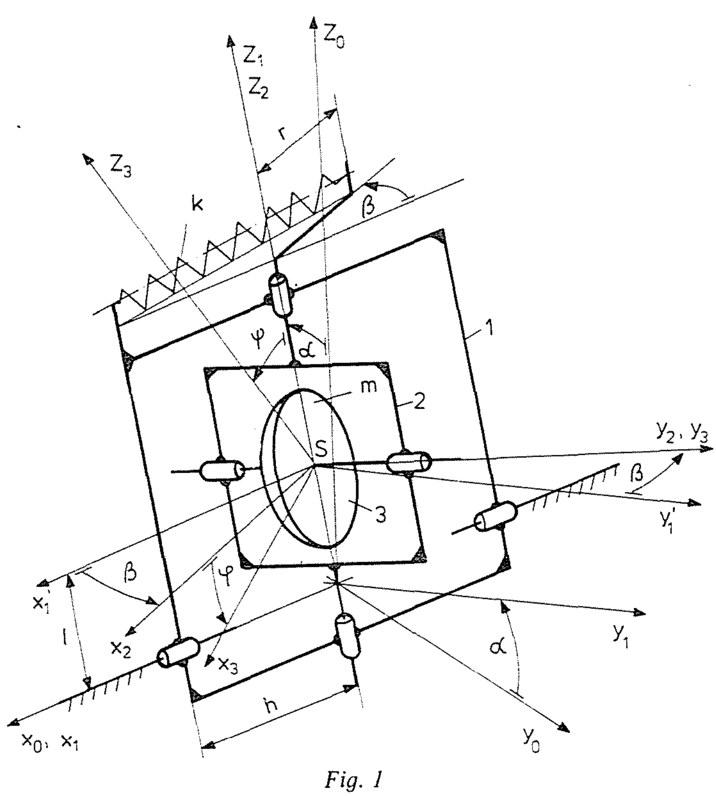

Fig. 1

La position d'équilibre doublement instable du système est donnée par

$$\alpha=0, \qquad \beta=0, \qquad \dot{\varphi}=0 \tag{3.2}$$

L'energie cinetique est

$$T=\frac{1}{2}[ml^2\dot{\alpha}^2+A(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+\dot{\beta}^2)+B(\dot{\varphi}-\dot{\alpha}\sin\beta)^2] \tag{3.3}$$

L'energie potentielle

$$U=-mgl(1-\cos\alpha)-\frac{k}{2}\{4r^2-[\sqrt{r^2+h^2+2hr\cdot\cos\beta}-(h-r)]^2\} \tag{3.4}$$

On peut constater que la coordonnée φ est cyclique:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=B(\dot{\varphi}-\dot{\alpha}\sin\beta)=p_\varphi=c_\varphi=B\omega_0=\text{constante} \tag{3.5}$$

où $\omega_0=\dot{\varphi}_0$ est la vitesse angulaire initiale du gyroscope.

En remplaçant (3.5):

$$T=T^*=\frac{1}{2}[ml^2\dot{\alpha}^2+A(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+\dot{\beta}^2)+B\omega_0^2] \tag{3.6}$$

La fonction de Routh est donc

$$\begin{aligned}R=\dot{\varphi}c_\varphi-T+U=\frac{1}{2}B\omega_0^2+B\omega_0\dot{\alpha}^2\sin\beta-\\-\frac{1}{2}[ml^2\dot{\alpha}^2+A(\dot{\alpha}^2\cos^2\beta+\dot{\beta}^2)]-mgl(1-\cos\alpha)-\\-\frac{k}{2}\{4r^2-[\sqrt{r^2+h^2+2hr\cdot\cos\beta}-(h-r)]^2\}\end{aligned} \tag{3.7}$$

La fonction de Routh développée en série en position $\alpha=0$, $\dot{\alpha}=0$, $\beta=0$, $\dot{\beta}=0$ correspondant au mouvement stationnaire est:

$$\begin{aligned}R=\frac{1}{2}B\omega_0^2-\frac{1}{2}(A+ml^2)\dot{\alpha}^2-\frac{1}{2}A\dot{\beta}^2+B\omega_0\dot{\alpha}\beta-\frac{1}{2}mgl\,\alpha^2-\\-\frac{2khr^2}{h+r}\beta^2+S^{(4)}(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta})\end{aligned} \tag{3.8}$$

où $S^{(4)}$ est une série de puissance en α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, dont les expressions commencent à partir de quatrième degré.

Sur la base (1.10) et (3.7) les équations de mouvement linéarisées s'écrivent:

$$(A+ml^2)\ddot{\alpha}-B\omega_0\dot{\beta}-mgl\alpha=0$$

$$A\ddot{\beta}+B\omega_0\dot{\alpha}-\frac{2khr^2}{h+r}\beta=0 \tag{3.9}$$

Introduisons les notations

$$a=\frac{B\omega_0}{A+ml^2};\quad b=\frac{mgl}{A+ml^2};\quad c=\frac{B\omega_0}{A};\quad d=\frac{2khr^2}{A(h+r)} \tag{3.10}$$

et

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}&=x_1 & \dot{\beta}&=x_2\\ \alpha&=x_3 & \beta&=x_4\end{aligned} \tag{3.11}$$

et ainsi les équations (3.8):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=a\cdot x_2+b\cdot x_3\\ \dot{x}_2&=-c\cdot x_1+d\cdot x_4\\ \dot{x}_3&=x_1\\ \dot{x}_4&=x_2\end{aligned} \tag{3.12}$$

L'équation caractéristique:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & a & b & 0\\ -c & -\lambda & 0 & d\\ 1 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^2(ac-b-d)+bd=0 \tag{3.13}$$

La condition nécessaire mais non suffisante de la stabilité est

$$\lambda^2=\frac{-(ac-b-d)\pm\sqrt{(ac-b-d)^2-4bd}}{2}<0 \tag{3.14}$$

Pour cela il est suffisant que

$$(ac-b-d)>4bd \tag{3.15}$$

d'où, avec remplacement de (3.10), nous obtenons la vitesse angulaire nécessaire du gyroscope:

$$B\omega_0>\sqrt{Amgl}+\sqrt{\frac{2khr^2(A+ml^2)}{h+r}} \tag{3.16}$$

6*

Donc, si la vitesse angulaire initiale du gyroscope ω_0 est inférieure à la valeur déterminée par (3.16), alors le système mécanique examiné demeure instable. Pour avoir la stabilisation il est nécessaire d'avoir une vitesse angulaire ω_0 supérieure à une valeur déterminée.

Dans ce qui suit nous allons examiner dans le cas où (3.16) est remplie, s'il existe des solutions périodiques au voisinage de la position d'équilibre, c'est-à-dire des mouvements à la suite desquels le système ne s'éloigne pas plus qu'une certaine valeur déterminée de la position d'équilibre. Dans ce but nous allons examiner si le système mécanique en question peut être considéré comme un système de Liapounov.

Les équations de mouvements non linéarisées à la base de (3.12):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a \cdot x_2 + b \cdot x_3 + X_1^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_2 &= -c \cdot x_1 + d \cdot x_4 + X_2^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_3 &= x_1 \\ \dot{x}_4 &= x_2 \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $X_1^{(3)}$ et $X_2^{(3)}$ sont des séries de puissances de x_1, x_2, x_3, x_4 comportant des éléments dont le degré commence à partir de 3.

À l'aide d'une matrice $\mathbf{T}$ convenable et d'une transformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} \tag{3.18}$$

nous pouvons écrire au lieu de (3.17) le système:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\alpha y_2 + Y_1^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_2 &= \alpha y_1 + Y_2^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_3 &= \frac{d-b}{2\alpha} y_3 - \frac{b+d}{2\alpha} y_4 + Y_3^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_4 &= \frac{b+d}{2\alpha} y_3 + \frac{b-d}{2\alpha} y_4 + Y_4^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$\alpha^2 = -\lambda^2$$

Puisque d'après (3.14) deux valeurs différentes de λ^2 existent, il en découle aussi que α a aussi deux valeurs.

De (3.14) découle également que l'équation caractéristique a deux racines imaginaires pures et qu'elle n'a pas d'autres racines:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \alpha_1 i \\ \lambda_{3,4} &= \pm \alpha_2 i \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ainsi donc la deuxième condition repondant aux systèmes de Liapounov est remplie.

La troisième condition de Liapounov est remplie également si nous considérons l'énergie mécanique comme première integrale:

$$H = T + U = \text{constante}. \tag{3.21}$$

La transformation (3.18) utilisée dans (3.21) nous donne:

$$\begin{aligned} H = y_1^2 + y_2^2 + \frac{2bcd}{\alpha^2}\left[(b+\alpha^2)^3 d - abc\alpha^2(d+\alpha^2)\right] y_3 y_4 + \\ + \frac{bd}{\alpha^2}\left[(b+\alpha^2)^2 (b-\alpha^2) d + abc\alpha^2(d-\alpha^2)\right](y_3^2 + y_4^2) + \\ S^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4) = \text{constante}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

ce qui satisfait à la condition (2.2).

Du fait que toutes les trois conditions de Liapounov sont remplies — dans le sens du théorème de Liapounov — le système mécanique a des solutions périodiques au voisinage suffisamment petit de la position d'équilibre. Convenablement a α_1 et α_2 deux ensembles de solutions périodiques existent. La période de ces solutions tend vers

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}$$

au dessus de toute limite si la valeur y_i^0 des perturbations tend vers zéro.

Puisque le système pris comme exemple est tel que toutes les racines de son équation caractéristique sont des couples de racines imaginaires pures, nous pouvons parler des vibrations de base à fréquence circulaire α_1 et α_2 du système non-linéaire. Ces vibrations de base sont toutefois différentes de celle du système linéaire puisque d'une part les combinaison linéaires de celles-ci ne donnent pas la solution générale du système non-linéaire, d'autre part parce que la période du système non-linéaire est fonction des valeurs initiales.

D'après cela nous pouvons constater que la condition (3.16) est en même celle de l'existance des solutions périodiques.

Résumé

L'étude s'occupe de la possibilité de stabilisation de la position d'équilibre instable des systèmes mécaniques conservatifs. Elle examine comment le gyroscope encastré au système influence l'instabilité et à quelle vitesse de rotation du gyroscope est possible la stabilité. Elle

détermine les conditions où on peut considérer le système ainsi réalisé comme système de Liapounov et à l'aide d'un exemple elle montre la condition d'existance des mouvements périodiques.

Bibliographie

1. Меркин, Д. Р.: Гироскопические системы, Москва, 1974.
2. Малкин, И. Г.: Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Москва, 1949.
3. Brossard, J. P.: Theorèmes généraux de la dynamique. I. N. S. A. Lyon.

Dr. József Hering H-1521 Budapest