ÜBER EIN RANDWERTPROBLEM DES AKUSTISCHEN SCHWINGUNGSFELDES IN EINER ROHRLEITUNG. II

A. HOFFMANN
Lehrstuhl für Strömungslehre,
Technische Universität, H-1521 Budapest

Eingegangen am 8. November 1982
Vorgelegt von Prof. T. Szentmártony

Summary

A generalization of the boundary value problem solved in paper (4) is given here. The generalization lies in prescribing at the beginning of the tube at the point $(x=0)$ a timely periodical speed and at the open end of the tube $(x=l)$ a timely periodical pressure. The mathematical model of the problem is a system of partial differential equations with the appropriate initial and limiting conditions. The adoptation of the Duhamel-theorems and the solving of two very simple convolution integral equations lead to the solving of this system.

In einer vorher veröffentlichten Arbeit [4] habe ich die analytische Lösung eines Problems der Aeroakustik behandelt; uzw. die Bestimmung des räumlich-eindimensionalen linearisierten Druckfeldes $p(x, t)$ und Geschwindigkeitfeldes $c(x, t)$ einer Gassäule in einer Rohrleitung.

Die linearisierte Eulersche Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsgleichung liefert das hyperbolische partielle Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} L_1[c, p] &\equiv \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ L_2[c, p] &\equiv \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

wobei t die Zeit, ρ die Dichte und a die Schallgeschwindigkeit des Gases bedeuten.

Als Anfangsbedingungen habe ich

$$c(x, 0) = 0, \qquad p(x, 0) = p_0 . \tag{2'}$$

und als Randbedingungen

$$c(0, t) = A \sin \omega t, \qquad p(l, t) = p_0 + \Delta p(t) \tag{2''}$$

mit $\Delta p(t) = B(\cos \nu t - 1)$ angenommen.

D. h. in einem geradlinigen Rohr von Länge l $(0 \leqq x \leqq l)$ wird die Gassäule an der Stelle $x=0$ mit der vorgeschriebener Geschwindigkeit $c(0, t) = A \sin \omega t$ durch einen Kolben, oder eine Membran erregt. Am Ende des Rohres herrsche der Druck $p(l,t)=p_0+\Delta p(t)$ des angekoppelten Systems. Zur Zeit $t=0$ sei die Geschwindigkeit der Gassäule $c(x,0)=0$, und $p(x,0)=p_0$ der atmospherische Druck (d. h. $\Delta p(0)=0$).

In der vorliegenden Arbeit wird die Randwertaufgabe (1), (2) verallgemeinert, uzw. sei die Geschwindigkeit and der Stelle $x=0$ eine stetige, stückweise glatte, ungerade, periodische Funktion mit der Periode T_1; der Druck am Ende des Rohres ($x=l$) sei eine stetige, stückweise glatte, periodische Funktion mit der Periode T_2. Damit ergibt sich die folgende Randwertaufgabe:

Das hyperbolische partielle Differentialgleichungssystem ist:

$$\begin{aligned} L_1[c,p]&=0 \\ L_2[c,p]&=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$c(x,0)=0, \qquad p(x,0)=p_0\,. \tag{4}$$

und die Randbedingungen können in der Form

$$\begin{aligned} c(0,t)=F(t)&=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\omega_k t \\ \omega_k&=\frac{2k\pi}{T_1} \\ p(l,t)=f(t)&=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos\nu_k t+\beta_k\sin\nu_k t) \\ \nu_k&=\frac{2k\pi}{T_2} \end{aligned} \tag{5}$$

dargestellt werden.

Aus den Bedingungen (4), (5) folgt

$$p(l,0)=p_0=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$$

Daher kann die zweite Bedingung (5) in der Form

$$p(l,t)=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k(\cos\nu_k t-1)+\beta_k\sin\nu_k t] \tag{6}$$

dargestellt werden.

In den Nachfolgenden wird diese Form verwendet.

Nehmen wir die Lösung der Randwertaufgabe (3), (4), (5), (6) in der folgenden Form an:

$$c=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x,t), \qquad p=\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,t) \tag{7}$$

Dabei ist

$$c_0(x,t)=0, \qquad p_0(x,t)=p_0$$

Die Funktionen

$$c_k(x,t), \quad p_k(x,t) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

sollen die Randwertaufgabe

$$L_1[c_k,p_k]=0, \qquad L_2[c_k,p_k]=0 \tag{8}$$

$$(k=1,2,\ldots)$$

$$c_k(x,0)=0, \qquad p_k(x,0)=0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} c_k(0,t)&=B_k\sin\omega_k t \\ p_k(l,t)&=\alpha_k(\cos\nu_k t-1)+\beta_k\sin\nu_k t \end{aligned} \tag{10}$$

befriedigen.

Zur Herstellung der Lösung soll das Duhamel-Prinzip verwendet werden. Man nehme die Lösung in folgender Form an:

$$c_k=c_k^1+\int_0^t\varphi_k(\tau)c_k^2(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=c_k^1+c_k^* \tag{11}$$

$$p_k=p_k^1+\int_0^t\varphi_k(\tau)p_k^2(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=p_k^1+p_k^* \tag{12}$$

Die Funktionen c_k^1, p_k^1 sollen das partielle Differentialgleichungssystem

$$L_1[c_k^1,p_k^1]=0, \qquad L_2[c_k^1,p_k^1]=0 \tag{13}$$

die Anfangsbedingungen

$$c_k^1(x,0)=0, \qquad p_k^1(x,0)=0 \tag{14}$$

und die Randbedingungen

$$c_k^1(0,t)=B_k\sin\omega_k t, \qquad p_k^1(l,t)=0 \tag{15}$$

befriedigen. In [3] ist die Lösung dieses Problems angegeben:

$$c_k^1(x,t)=B_k\left[\left(\cos\frac{\omega_k}{a}x+\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{a}l\sin\frac{\omega_k}{a}x\right)\sin\omega_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{2\omega_k a}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega_n}{a}x\sin\omega_n t}{\omega_k^2-\omega_n^2}\right] \tag{16}$$

$$p_k^1(x,t)=\rho a B_k\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\omega_k}{a}\,l\cos\frac{\omega_k}{a}\,x-\sin\frac{\omega_k}{a}\,x\right)\cos\omega_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{2\omega_k a}{l}\sum_{\substack{n=0\\ \omega_n\neq\omega_k}}^{\infty}\frac{\cos\frac{\omega_n}{a}\,x\cos\omega_n t}{\omega_k^2-\omega_n^2}\right] \tag{17}$$

wo

$$\omega_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)a\frac{\pi}{l}$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} c_k^*(x,t)&=\int_0^t\varphi_k(\tau)c_k^2(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\\ p_k^*(x,t)&=\int_0^t\varphi_k(\tau)p_k^2(x,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{18}$$

müssen also die Randwertaufgabe

$$L_1[c_k^*,p_k^*]=0,\qquad L_2[c_k^*,p_k^*]=0 \tag{19}$$

$$c_k^*(x,0)=0,\qquad p_k^*(x,0)=0 \tag{20}$$

$$c_k^*(0,t)=0,\qquad p_k^*(l,t)=\alpha_k(\cos\nu_k t-1)+\beta_k\sin\nu_k t \tag{21}$$

befriedigen.

Um diese Bedingung zu erfüllen, nehmen wir an, daß die Funktionen c_k^2, p_k^2 Lösungen der folgenden Randwertaufgabe sein:

$$L_1[c_k^2,p_k^2]=0,\qquad L_2[c_k^2,p_k^2]=0 \tag{22}$$

$$c_k^2(x,0)=0,\qquad p_k^2(x,0)=0 \tag{23}$$

$$c_k^2(0,t)=0,\qquad p_k^2(l,t)=-\rho a B_k\cos\omega_k t \tag{24}$$

Das Problem (22), (23), (24) wird nun weiter verteilt.

Wir setzen

$$c_k^2=c_k^{21}+c_k^{22},\qquad p_k^2=p_k^{21}+p_k^{22} \tag{25}$$

und es sollen die Funktionen c_k^{2i}, p_k^{2i} Lösungen des nachfolgenden Randwertproblem-Systems sein:

$$L_1[c_k^{2i},p_k^{2i}]=0,\qquad L_2[c_k^{2i},p_k^{2i}]=0\qquad (i=1,2) \tag{26}$$

$$\begin{aligned} &c_k^{21}(x,0)=0,\qquad p_k^{21}(x,0)=0\\ &c_k^{21}(0,t)=B_k\sin\omega_k t,\qquad p_k^{21}(l,t)=-\rho a B_k\cos\omega_k t \end{aligned} \tag{27}$$

mit

$$\begin{aligned} &c_k^{22}(x, 0)=0, \qquad p_k^{22}(x, 0)=0 \\ &c_k^{22}(0, t)=-B_k \sin \omega_k t, \qquad p_k^{22}(l, t)=0 \end{aligned} \tag{28}$$

Die Lösungen des Randwertsproblem-Systems (26), (27), (28) sind aber schon bekannt ([3], [4]):

$$\begin{aligned} c_k^{2i}=B_k\Bigg[&\left(\cos \frac{\omega_k}{a} x-c_{2i} \sin \frac{\omega_k}{a} x\right) \sin \omega_k t- \\ &-\sum_{n=0}^{\infty} k_{ni} \sin \frac{\omega_n}{a} x \sin \omega_n t\Bigg] \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} p_k^{2i}=-\rho a B_k\Bigg[&\left(c_{2i} \cos \frac{\omega_k}{a} x+\sin \frac{\omega_k}{a} x\right) \cos \omega_k t+ \\ &+\sum_{n=0}^{\infty} k_{ni} \cos \frac{\omega_n}{a} x \cos \omega_n t\Bigg] \end{aligned} \tag{30}$$

$$(i=1, 2)$$

$$c_{21}=\frac{1}{\cos \frac{\omega_k}{a} l}-\operatorname{tg} \frac{\omega_k}{a} l$$

$$c_{22}=-\operatorname{tg} \frac{\omega_k}{a} l$$

Somit erhalten wir nach (25)

$$c_k^2=-B_k\left[\frac{\sin \frac{\omega_k}{a} x}{\cos \frac{\omega_k}{a} l} \sin \omega_k t+\sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \frac{\omega_n}{a} x \sin \omega_n t\right] \tag{31}$$

$$p_k^2=-\rho a B_k\left[\frac{\cos \frac{\omega_k}{a} x}{\cos \frac{\omega_k}{a} l} \cos \omega_k t+\sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \frac{\omega_n}{a} x \cos \omega_n t\right] \tag{32}$$

wobei

$$k_n=k_{n1}+k_{n2}=\frac{2a}{l}(-1)^n \frac{\omega_n}{\omega_k^2-\omega_n^2} \qquad (\omega_k \neq \omega_n)$$

gilt.

Mit diesen Funktionen (31), (32) können wir nun die Funktionen $c^*(x, t)$, $p^*(x, t)$ (18) darstellen.

Wir setzen

$$\varphi_k(\tau) = \varphi_{k\alpha}(\tau) + \varphi_{k\beta}(\tau) \tag{33}$$

zur Bestimmung von $\varphi_{k\alpha}(\tau)$, $\varphi_{k\beta}(\tau)$ liefert die Gleichung (21) entsprechende Integralgleichungen von Faltungstyp bezüglich $\varphi_{k\alpha}$, $\varphi_{k\beta}$:

$$\int_0^t \varphi_{k\alpha}(\tau) p_k^2(l, t-\tau)\,d\tau = -\rho a B_k \int_0^t \varphi_{k\alpha}(\tau) \cos \omega_k (t-\tau)\,d\tau = \\ = \alpha_k(\cos \nu_k t - 1) \tag{34}$$

und

$$\int_0^t \varphi_{k\beta}(\tau) p_k^2(l, t-\tau)\,d\tau = -\rho a B_k \int_0^t \varphi_{k\beta}(\tau) \cos \omega_k (t-\tau)\,d\tau = \\ = \beta_k \sin \nu_k t \tag{35}$$

Die Lösungen dieser Integralgleichungen sind

$$\varphi_{k\alpha}(\tau) + \varphi_{k\beta}(\tau) = \varphi_k(\tau) = \frac{1}{\rho a B_k}\left[\omega_k^2\left(\alpha_k \tau - \frac{\beta_k}{\nu_k}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\nu_k^2 - \omega_k^2}{\nu_k}(\alpha_k \sin \nu_k \tau - \beta_k \cos \nu_k \tau)\right] \tag{36}$$

Nun können die Funktionen c_k^*, p_k^* mit Hilfe der Formeln (18) berechnet werden.

$$c_k^* = \frac{1}{\rho a}\left\{\frac{\omega_k \sin \frac{\omega_k}{a} x}{\cos \frac{\omega_k}{a} l}\left[\frac{1}{\nu_k}(\beta_k(1 - \cos \nu_k t) + \alpha_k \sin \nu_k t) - \alpha_k t\right] + \right. \\ + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin \frac{\omega_n}{a} x \left[\omega_k^2\left(\frac{\beta_k}{\nu_k}\frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n} - \right.\right. \\ \left. - \alpha_k\left(\frac{t}{\omega_n} - \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n^2}\right)\right) + \\ + \frac{\omega_k^2 - \nu_k^2}{\nu_k(\omega_n^2 - \nu_k^2)}(\alpha_k(\omega_n \sin \nu_k t - \nu_k \sin \omega_n t) - \\ \left.\left. - \beta_k \omega_n (\cos \nu_k t - \cos \omega_n t))\right]\right\} \tag{37}$$

$$p_k^* = \frac{\cos\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l}\left[\alpha_k(\cos\nu_k t - 1) + \beta_k \sin\nu_k t\right] +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos\frac{\omega_n}{a}x\left[\omega_k^2\left(\frac{\beta_k}{\nu_k}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n} - \alpha_k\frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n^2}\right) +\right.$$

$$+ \frac{\omega_k^2 - \nu_k^2}{\nu_k(\omega_n^2 - \nu_k^2)}(\alpha_k\nu_k(\cos\nu_k t - \cos\omega_n t) + \tag{38}$$

$$\left.+ \beta_k(\nu_k \sin\nu_k t - \omega_n \sin\omega_n t))\right]$$

$$k_n = \frac{2a}{l}(-1)^n\frac{\omega_n}{\omega_k^2 - \omega_n^2}, \qquad \omega_k \neq \omega_n$$

Es ist leicht einzusehen daß die Funktionen (37), (38) die Anfangs- und Randbedingungen (20), (21) befriedigen.

Die Funktionen c_k^*, p_k^* können wir noch vereinfachen.

Im Falle c_k^* gilt nämlich

$$g(x) = \frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l} + \omega_k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{\omega_n}\sin\frac{\omega_n}{a}x \equiv 0 \tag{39}$$

Auf Grund der Anfangsbedingung (23) und der Funktion (32) gilt

$$g'(x) = \frac{\omega_k}{a}\left(\frac{\cos\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l} + \sum_{n=0}^{\infty}k_n\cos\frac{\omega_n}{a}x\right) \equiv 0 \tag{40}$$

und somit $g(x) = \text{const.}$, da aber $g(0) = 0$ ist folgt $g(x) \equiv 0$.

Bezüglich der Funktion p_k^* gilt

$$G(x) = \frac{\cos\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l} + \omega_k^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{\omega_n^2}\cos\frac{\omega_n}{a}x \equiv 1 \tag{41}$$

Es ist nämlich

$$G''(x) = -\frac{\omega_k^2}{a^2}\left(\frac{\cos\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l} + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos\frac{\omega_n}{a}x\right) \equiv 0 \tag{42}$$

und nach den obigen Überlegungen auch $G'(x) \equiv 0$, d. h. $G(x) = \text{const.}$, da aber $G(l) = 1$, folgt $G(x) \equiv 1$.

Somit können die Funktionen c_k^*, p_k^* in der folgenden Form angegeben werden:

$$\begin{aligned} c_k^* = \frac{1}{\rho a}\Bigg\{ & \frac{\omega_k \sin\frac{\omega_k}{a}x}{\nu_k \cos\frac{\omega_k}{a}l}(\alpha_k \sin \nu_k t - \beta_k \cos \nu_k t) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \sin\frac{\omega_n}{a}x \left[\frac{\omega_k^2}{\omega_n}\left(\alpha_k \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} - \beta_k \frac{\cos \omega_n t}{\nu_k}\right) + \right. \\ & + \frac{\omega_k^2 - \nu_k^2}{\nu_k(\omega_n^2 - \nu_k^2)}(\alpha_k(\omega_n \sin \nu_k t - \nu_k \sin \omega_n t) - \\ & \left. - \beta_k \omega_n (\cos \nu_k t - \cos \omega_n t))\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} p_k^* = -\alpha_k + & \frac{\cos\frac{\omega_k}{a}x}{\cos\frac{\omega_k}{a}l}(\alpha_k \cos \nu_k t + \beta_k \sin \nu_k t) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos\frac{\omega_n}{a}x \left[\frac{\omega_k^2}{\omega_n}\left(\frac{\beta_k}{\nu_k}\sin \omega_n t + \alpha_k \frac{\cos \omega_n t}{\omega_n}\right) + \right. \\ & + \frac{\omega_k^2 - \nu_k^2}{\omega_n^2 - \nu_k^2}(\alpha_k(\cos \nu_k t - \cos \omega_n t) + \\ & \left. + \beta_k\left(\sin \nu_k t - \frac{\omega_n}{\nu_k}\sin \omega_n t\right)\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Funktionen (43), (44) das Differentialgleichungssystem (19) befriedigen da nach (43), (44)

$$L_2[c_k^*, p_k^*] = \frac{1}{\rho a^2} \frac{\omega_k^2 - \nu_k^2}{\nu_k} (\alpha_k \sin \nu_k t -$$

$$-\beta_k \cos \nu_k t) \left(\frac{\cos \frac{\omega_k}{a} x}{\cos \frac{\omega_k}{a} l} + \sum_{n=0}^{\infty} k_n \cos \frac{\omega_n}{a} x \right) = 0 \quad \text{ist}.$$

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist die Verallgemeinerung des im Beitrag [4] gelösten Randwertproblems. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß am Anfang des Rohres an der Stelle $x = 0$ eine zeitlich periodische Geschwindigkeit und am offenen Rohrende ($x = l$) ein zeitlich periodischer Druck vorgeschrieben wird. Das mathematische Modell des Problems ist ein partielles Differentialgleichunssystem mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen. Die Anwendung des Duhamel-Prinzips und die Lösung zweier sehr einfachen Integralgleichungen vom Faltungstyp führen zur Lösung dieses Systems.

Literatur

1. GOLDSTEIN, M. E.: Aeroacoustics. McGraw Hill, N. Y.—London, 1976.
2. SZENTMÁRTONY, T.: Folyadékok mechanikája I. (Mechanik der Flüssigkeiten), Manuskript, Budapest, Tankönyvkiadó, 1967.
3. HOFFMANN, A.—FÉNYES, T.: Rechenverfahren zur Untersuchung von Wellengleichungen in Rohrleitungen. Period. Polyt. Mech. *26* 1982.
4. HOFFMANN, A.: Über ein Randwertproblem des akustischen Schwingungsfeldes in einer Rohrleitung I. Period. Polyt. Mech. *26* 1982.

Dr. Andor HOFFMANN, H-1521 Budapest