HERSTELLUNG DER GESCHLOSSENEN LÖSUNG DES PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS VON GASSCHWINGUNGEN

F. SZLIVKA

Lehrstuhl für Strömungslehre,
Technische Universität, H-1521 Budapest
Eingegangen am 22. April 1983
Vorgelegt von Prof. Dr. T. SZENTMÁRTONY

Summary

The mathematical description of gas-pressure oscillations excited by a piston at the end of a straight duct is dealt with, the other end being opened. Two solutions found in the literature in series form have been transformed into closed form showing the identity of them. The evaluation could be on the other hand significantly simplified.

Instationäre Schwingungen in Rohrleitungen werden nach verschiedenen Verfahren berechnet.

Ist die Schwingungsamplitude genügend klein, wird bei der Berechnung des Strömungsbildes oft von der eindimensionalen Wellengleichung ausgegangen und die den Randbedingungen angepaßte Lösung gesucht.

Bei größeren Schwingungsamplituden muß eine andere Methode angewandt werden, weil in diesem Falle durch die Lösung der Wellengleichung die Wirklichkeit nicht treu wiedergegeben wird. Im weiteren möchten wir die auf der Wellengleichung fußenden Lösungen behandeln. Der konkrete Gegenstand der Untersuchungen ist die mathematische Behandlung der in einem geraden Rohr entstehenden Schwingungen. An dem einen Ende wird die Rohrleitung mit Hilfe eines Kolbens erregt, das andere Rohrende ist offen.

Die numerische Lösung des Problems ist in [2], die analytische in [1] zu finden.

Von den Verfassern des Werkes [1] wurde das Problem vom gleichen mathematischen Modell — von einem partiellen Differentialgleichungssystem sowie Anfangs- und Randbedingungen — ausgehend, jedoch nach unterschiedlichen analytischen Methoden gelöst. Die erhaltenen analytischen Lösungen liefern infolge der Existenz- und Eindeutigkeitssätze das gleiche Ergebnis, obwohl sie in der Form ganz abweichend sind.

In der vorliegenden Arbeit werden die Lösungen von [1] vereinfacht u. zw. wird die erhaltene unendliche Reihe in eine geschlossene Formel umgeformt. Werden beide Lösungen in eine geschlossene Form gebracht, können sie auch formal vollkommen gleich gestaltet werden.

Das aus der dem physikalischen Prozeß entsprechenden Bewegungsgleichung und Kontinuitätsgleichung abgeleitete mathematische Modell ist das auf die Geschwindigkeit $c(x, t)$ und den Druck $p(x, t)$ bezogene partiale Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{array}{ll} c(x, 0) = 0 & p(x, 0) = p_0 \\ c(0, t) = R \cdot \sin \omega t & p(l, t) = p_0 \end{array} \tag{2}$$

Dabei bedeuten:

- ρ die Dichte des Mediums
- a die Schallgeschwindigkeit
- p den Druck
- R den Radius des Kolbenantriebs
- ω dessen Kreisfrequenz
- l die Rohrlänge.

In [1] ist folgende Auflösung nach der Bernoulli–Fourier-Methode zu finden:

$$\begin{aligned} c(x, t) = R\omega & \left[\frac{\sin \omega\left(t - \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right)}{2 \cos \frac{\omega l}{a}} - \frac{\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n\left(t - \frac{x}{a}\right)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] + \\ + R\omega & \left[\frac{\sin \omega\left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right)}{2 \cos \frac{\omega l}{a}} + \frac{\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n\left(t + \frac{x}{a}\right)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} p(x, t) = p_0 + \rho a R\omega & \left[\frac{\sin \omega\left(t - \frac{x}{a} + \frac{l}{a}\right)}{2 \cos \frac{\omega l}{a}} - \frac{\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n\left(t - \frac{x}{a}\right)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] - \\ - \rho a R\omega & \left[\frac{\sin \omega\left(t + \frac{x}{a} - \frac{l}{a}\right)}{2 \cos \frac{\omega l}{a}} - \frac{\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n\left(t + \frac{x}{a}\right)}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] \end{aligned} \tag{4}$$

Mit der Laplace-Transformation ergab sich die Lösung:

$$c(x,t)=R\omega\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left[\sin\omega\left(t-\frac{x+2nl}{a}\right)+\sin\omega\left(t-\frac{2(n+1)l-x}{a}\right)\right] \tag{5}$$

$$p(x,t)=p_0+R\omega\rho a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\sin\omega\left(t-\frac{x+2nl}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\omega\left(t-\frac{2(n+1)l-x}{a}\right)\right] \tag{6}$$

wo $\sin\omega(t-\gamma)=0$, wenn $t\leqq\gamma$, sowie $t>0$, $\gamma>0$.

Im weiteren werden sowohl die Lösung nach der Fourier-Methode (3), (4) als auch die mit der Laplace-Transformation erhaltene Lösung (5), (6) in geschlossene Form gebracht und getrennt behandelt, die erstere unter A, die zweite unter B.

Es ist zu erkennen, daß die Zusammenhänge (3) und (4) voneinander formal nur in den Konstanten und in einem Vorzeichen abweichen, deshalb wird die Vereinfachung nur für die Formel (3) gezeigt, für (4) läßt sie sich analog durchführen.

A) Herstellung des nach der Bernoulli–Fourier-Methode erhaltenen Zusammenhanges (3) in geschlossener Form

Im Zusammenhang (3) werden, um die einzelnen Reihen in geschlossener Form darzustellen, die aus (3) stammenden, hier durch die Nummern (15) und (16) bezeichneten Formeln benutzt. Im weiteren besteht nur mehr die Frage, wie die linke Seite dieser Formeln mit den Reihen in der Lösung mit Reihenentwicklung identifiziert werden kann.

Für die einfachere Behandlung werden die Bezeichnungen

$$T=\frac{at}{l};\ V=\frac{c}{a};\ P=\frac{p}{p_0};\ X=\frac{x}{l};\ \Omega=\frac{\omega l}{a}$$
$$\Omega_n=(2n+1)\frac{\pi}{2};\ B=\frac{R\omega}{a};\ D=\frac{\rho aR\omega}{p_0} \tag{7}$$

eingeführt, dann mit deren Hilfe der Ausdruck (3) umgeschrieben

$$V(x, T) = \frac{B}{2}\left[\frac{\sin \Omega(T-X+1)}{\cos \Omega} - 2\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \Omega_n(T-X)}{\Omega_n^2-\Omega^2}\right] +$$

$$+\frac{B}{2}\left[\frac{\sin \Omega(T+X-1)}{\cos \Omega} + 2\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \Omega_n(T+X)}{\Omega_n^2-\Omega^2}\right] \tag{8}$$

Um die unendlichen Reihen zu summieren, werden die Σ-Ausdrücke in Gl. (8) auf die Differenz zweier Σ zerlegt, wie folgt:

$$2\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)\frac{\pi}{2} y}{\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - \Omega^2} =$$

$$= 2\Omega \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos i\frac{\pi}{2} y}{i^2 - \left(\frac{2\Omega}{\pi}\right)^2} - \frac{2\Omega}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\pi y}{j^2 - \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^2} \tag{9}$$

wo y entweder gleich $T+X$ oder gleich $T-X$ ist und $\Omega \neq k\frac{\pi}{2}$; i, j, k und n sind ganze Zahlen.

Der ungerade Multiplikator $(2n+1)$ der rechten Seite wird auf die Differenz einer natürlichen und einer geraden Zahl zerlegt.

Für die Umformung der zwei unendlichen Summen auf der rechten Seite von Gl. (9) führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{y}{2} = N_1 + z_1, \text{ wo } N_1 = \text{int}\left(\frac{y}{2}\right) \text{ und } 0 \leqq z_1 < 1 \tag{10}$$

sowie

$$y = N_3 + z_3, \text{ wo } N_3 = \text{int}(y) \text{ und } 0 \leqq z_3 < 1 \tag{11}$$

wo int( ) die größte Ganzteilfunktion bedeutet.

$$\begin{aligned} 2N_1 &= N_3 && \text{wenn } N_3 \text{ eine gerade Zahl und} \\ 2N_1 &= N_3 - 1, && \text{wenn } N_3 \text{ eine ungerade Zahl ist.} \end{aligned} \tag{12}$$

Setzen wir in das erste Glied an der rechten Seite der Gleichheit (9) den Ausdruck (10) ein.

$$2\Omega\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos(i\pi N_1+i\pi z_1)}{i^2-\left(\frac{2\Omega}{\pi}\right)^2}=\begin{cases} N_1 \text{ gerade} & 2\Omega\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\cos i\pi z_1}{i^2-\left(\frac{2\Omega}{\pi}\right)^2} \\ N_1 \text{ ungerade} & 2\Omega\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\cos i\pi z_1}{i^2-\left(\frac{2\Omega}{\pi}\right)^2} \end{cases} \tag{13}$$

In das zweite Glied an der rechten Seite der Gleichheit (9) den Ausdruck (11) eingesetzt, erhält man die Gleichheit:

$$\frac{2\Omega}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(j\pi N_3+j\pi z_3)}{j^2-\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^2}=\begin{cases} N_3 \text{ gerade} & \frac{2\Omega}{\pi^2}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{\cos j\pi z_3}{j^2-\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^2} \\ N_3 \text{ ungerade} & \frac{2\Omega}{\pi^2}\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{\cos j\pi z_3}{j^2-\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^2} \end{cases} \tag{14}$$

Unter Anwendung der Gleichheiten

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kz}{k^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\cos\alpha(\pi-z)}{\alpha\sin\alpha\pi} \tag{15}$$

$$\text{mit } 0\leqq z\leqq\pi$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos kz}{k^2-\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}-\frac{\pi}{2}\frac{\cos\alpha z}{\alpha\sin\alpha\pi} \tag{16}$$

$$\text{mit } -\pi\leqq z\leqq\pi$$

aus [3] und mit k als ganze Zahl, α als nicht ganze Zahl, können die Ausdrücke (12) und (13), wenn N_1 und N_3 gerade Zahlen sind, durch den Ausdruck (15), wenn N_1 und N_3 ungerade Zahlen sind, durch den Ausdruck (16) vereinfacht werden, sofern auch die für z angegebenen Nebenbedingungen erfüllt werden.

Im Ausdruck (13) muß, wenn N_1 eine gerade Zahl ist, die Ungleichung

$$0 \leqq \pi z_1 \leqq \pi \tag{17}$$

erfüllt werden. Da definitionsgemäß $0 \leqq z_1 < 1$ (siehe (10)), wird auch die Bedingung (17) erfüllt. Es ist leicht einzusehen, daß nach der Definition von z_1 und z_3 die Nebenbedingungen der Gleichheiten (15) und (16) stets erfüllt werden. Unter Anwendung der vorigen Ausführungen vereinfachen wir den Ausdruck (9) für den Fall, wenn N_1 und N_3 gerade Zahlen sind.

$$2\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)\frac{\pi}{2} y}{\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 - \Omega^2} =$$

$$= 2\Omega \frac{4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos i\pi z_1}{i^2 - \left(\frac{2\Omega}{\pi}\right)^2} - \frac{2\Omega}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\pi z_3}{j^2 - \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cos \Omega(2z_1 - 2)}{\sin 2\Omega} - \frac{\cos \Omega(z_3 - 1)}{\sin \Omega} =$$

$$= \frac{2\cos \Omega[y - 2(N_1+1)] - 2\cos \Omega[y - (N_3+1)] \cos \Omega}{\sin 2\Omega} =$$

Diese Umformung läßt sich nicht nur durchführen, wenn N_1 und N_3 gerade Zahlen sind, sondern auch in allen anderen Fällen. Unter Anwendung der Beziehungen (12) erhält man die Ausdrücke:

$$= \begin{cases} \dfrac{\sin \Omega[y-(2N_1+1)]}{\cos \Omega} & \text{wenn } N_1 \text{ und } N_3 \text{ gerade Zahlen sind} \\ & N_1 \text{ eine gerade, } N_3 \text{ eine ungerade Zahl ist,} \\ -\dfrac{\sin \Omega[y-(2N_1+1)]}{\cos \Omega} & \text{wenn } N_1 \text{ eine ungerade, } N_3 \text{ eine gerade Zahl ist,} \\ & N_1 \text{ und } N_3 \text{ ungerade Zahlen sind} \end{cases}$$

Wird die Bezeichnung

$$\varepsilon = \Omega - \frac{\pi}{2}$$

eingeführt und in die obigen Zusammenhänge eingesetzt, muß also kein Unterschied zwischen Fällen mit geraden und ungeraden Zahlen gemacht werden, so lassen sich die vorstehenden beiden Ausdrücke auf einen reduzieren.

So erhält man schließlich den Ausdruck

$$2\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1)\frac{\pi}{2} y}{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \Omega^2} = \frac{\cos [\Omega y - (2N_1+1)\varepsilon]}{\sin \varepsilon}$$

mit dessen Hilfe (8) in folgender Weise geschrieben werden kann, wenn für y, $T+X$ oder $T-X$ substituiert wird:

$$V(X,T) = \frac{B}{2}\left[\frac{\sin \Omega(T-X+1)}{\cos \Omega} - \frac{\cos [\Omega(T-X)-(2N_1+1)\varepsilon]}{\sin \varepsilon}\right] + \tag{18}$$
$$+\frac{B}{2}\left[\frac{\sin \Omega(T+X-1)}{\cos \Omega} + \frac{\cos [\Omega(T+X)-(2N_4+1)\varepsilon]}{\sin \varepsilon}\right]$$

dabei sind

$$N_1 = \operatorname{int}\left(\frac{T-X}{2}\right) \quad N_4 = \operatorname{int}\left(\frac{T+X}{2}\right) \tag{19}$$

und

$$\varepsilon = \Omega - \frac{\pi}{2}$$

Der Ausdruck (18) läßt sich mit den gleichen Umformungen weiter vereinfachen, der vereinfachte Ausdruck läßt sich nicht nur für die Geschwindigkeit, sondern auch für den Druck aufschreiben, also

$$V(X,T) = B\frac{\sin [\Omega(T-X)-N_1\varepsilon] \cdot \sin (N_1+1)\varepsilon}{\sin \varepsilon} - \tag{20}$$
$$-B\frac{\sin [\Omega(T+X)-(N_4+1)\varepsilon] \sin N_4\varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

und

$$P(X,T) = 1 + D\frac{\sin [\Omega(T-X)-N_1\varepsilon] \cdot \sin (N_1+1)\varepsilon}{\sin \varepsilon} + \tag{21}$$
$$+D\frac{\sin [\Omega(T+X)-(N_4+1)\varepsilon] \cdot \sin N_4\varepsilon}{\sin \varepsilon}$$

$$\varepsilon \neq k \cdot \pi$$

Es ist wichtig zu überprüfen, ob sich durch die Umformungen nicht etwa ein Ergebnis ergeben hat, das die Anfrags- und Randbedingungen (2) nicht erfüllt. Untersuchen wir daher die Ausdrücke (20) und (21) im Anfangszeitpunkt und an den Rändern.

Hierzu schreiben wir die Bedingungen (2) mit den Bezeichnungen (7) in dimensionslose Form um, also:

$$\begin{array}{lll} T=0 & V(X,0)=0; & P(X,0)=1 \\ X=0 & V(0,T)=B\cdot\sin\Omega T & \\ X=1 & P(1,T)=1 & \end{array}$$

Bei $T=0$ ist aus (19) zu erkennen, daß $N_1=-1$ und $N_4=0$. Die Faktoren $\sin(N_1+1)\varepsilon$ und $\sin N_4\varepsilon$ in (20) und (21) ergeben Null, und so ist direkt einzusehen, daß $V(X,0)=0$ und $P(X,0)=1$.

Bei $X=0$ ergibt sich aus (19), daß $N_1=N_4$; dies in (20) eingesetzt und mit trigonometrischen Identitäten transformiert erhält man die vorgeschriebene Randbedingung:

$$V(0,T)=B\frac{\sin(\Omega T-N_1\varepsilon)\cdot\sin(N_1+1)\varepsilon-\sin[\Omega T-(N_1+1)\varepsilon]\cdot\sin N_1\varepsilon}{\sin\varepsilon}=$$

$$=B\frac{-\cos(\Omega T+\varepsilon)+\cos(\Omega T-\varepsilon)}{2\sin\varepsilon}=$$

$$=B\frac{\sin\Omega T\cdot\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon}=B\sin\Omega T$$

Bei $x=1$ ist aus (19) zu sehen, daß $N_1=N_4-1$; dies in (21) gesetzt und zusammengezogen, erhält man:

$$P(1,T)=1+D\frac{\{\sin[\Omega T-\Omega-(N_4-1)\varepsilon]+\sin[\Omega T+\Omega-(N_4+1)\varepsilon]\}\sin N_4\varepsilon}{\sin\varepsilon}$$

Wird die Identität bezüglich der Summe der Sinusse der beiden Winkel benutzt, erhält man den Ausdruck:

$$P(1,T)=1+D\frac{\sin N_4\varepsilon}{\sin\varepsilon}\cdot\sin(\Omega T-N_4\varepsilon)\cdot\cos(\Omega-\varepsilon)$$

Aus (19) folgt, daß $\Omega-\varepsilon=\frac{\pi}{2}$, dessen Cosinus gleich Null ist, also gilt $P(1,T)=1$, das mit der gewünschten Randbedingung übereinstimmt.

Die Ausdrücke (20) und (21) befriedigen die dimensionslosen Formen des Gleichungssystems (1), mit der Ausnahme der Punkte wo $P(X,T)$ und $V(X,T)$ nicht derivierbar sind. An diesen Stellen haben jedoch auch die ursprünglichen Ausdrücke (3) und (4) Knickpunkte. Letzteres wird nur aufgrund der Aufzeichnung der Funktionen behauptet.

B) Herstellung der geschlossenen Formen der durch Laplace-Transformation erhaltenen Zusammenhänge (5), (6)

Nur der Ausdruck (5) der Geschwindigkeit wird reduziert — wie unter *A* —, weil der Ausdruck des Druckes in analoger Weise transformiert werden kann. Mit den Bezeichnungen (7) wird Gl. (5) geschrieben:

$$\begin{aligned} V(X, T) = {} & B \cdot \sin \Omega(T-X) \cdot \sum_{n=0}^{N_1} (-1)^n \cos 2n\Omega - \\ & - B \cdot \cos \Omega(T-X) \cdot \sum_{n=0}^{N_1} (-1)^n \sin 2n\Omega + \\ & + B \cdot \sin \Omega(T+X-2) \cdot \sum_{n=0}^{N_2} (-1)^n \cos 2n\Omega - \\ & - B \cdot \cos \Omega(T+X-2) \cdot \sum_{n=0}^{N_2} (-1)^n \sin 2n\Omega \end{aligned} \tag{22}$$

wo unter Anwendung der Nebenbedingungen $\sin \omega(T-\gamma)=0$ wenn $T \leqq \gamma$ und $T>0$; $\gamma>0$ der Gleichungen (5) und (6), und die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} N_1 &= \mathrm{Max}\left[0; \mathrm{int}\left(\frac{T-X}{2}\right)\right] \\ N_2 &= \mathrm{Max}\left[0; \mathrm{int}\left(\frac{T+X}{2} - 1\right)\right] \end{aligned} \tag{23}$$

eingeführt, die Bedingungen

ist $T-X<0$, dann ist $\sin \Omega(T-X) = \cos \Omega(T-X) = 0$

und

ist $T+X-2<0$, dann ist $\sin \Omega(T+X-2) = \cos \Omega(T+X-2) = 0$

erfüllt sein müssen.

Die Ausdrücke mit Σ in (22) können in gleicher Weise in einfacherer Form geschrieben werden.

Betrachten wir dazu den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \sin 2n\Omega \tag{24}$$

Die Bezeichnung

$$\varepsilon = \Omega - \frac{\pi}{2}$$

eingeführt und in den Zusammenhang (22) eingesetzt, erhält man nach den gleichen Umformungen

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \sin(n\pi+2n\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \sin n\pi\cdot\cos 2n\varepsilon+$$
$$+\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\cdot\cos n\pi\cdot\sin 2n\varepsilon$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist stets gleich Null, der Faktor $(-1)^n\cdot\cos n\pi$ im zweiten Glied ergibt für alle n Eins, daher ist Gl. (24) weiter gleich dem Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{N}\sin 2n\varepsilon=\frac{\sin(N+1)\varepsilon\cdot\sin N\varepsilon}{\sin\varepsilon} \tag{25}$$

Die Gleichheit wurde der Tafel [3] entnommen. Wird der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\cos 2n\Omega$$

in der gleichen Weise vereinfacht, erhält man die vereinfachte Form:

$$\frac{\sin(N+1)\varepsilon\cdot\cos N\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

Die Ergebnisse auf den Ausdruck (22) für $V(X, T)$ angewandt, erhält man den vereinfachten Zusammenhang

$$\begin{aligned}V(X,T)=&B\cdot\sin\Omega(T-X)\frac{\sin(N_1+1)\varepsilon\cdot\cos N_1\varepsilon}{\sin\varepsilon}-\\&-B\cos\Omega(T-X)\frac{\sin(N_1+1)\varepsilon\cdot\sin N_1\varepsilon}{\sin\varepsilon}+\\&+B\sin\Omega(T+X-2)\frac{\sin(N_2+1)\varepsilon\cdot\cos N_2\varepsilon}{\sin\varepsilon}-\\&-B\cos\Omega(T+X-2)\frac{\sin(N_2+1)\varepsilon\cdot\sin N_1\varepsilon}{\sin\varepsilon}\end{aligned} \tag{26}$$

Führen wir die Bezeichnung

$$N_4=N_2+1$$

ein und vereinfachen wie (26) unter Anwendung der bekannten trigonometrischen Gleichheiten, also:

$$\begin{aligned}V(X,T)=&B\frac{\sin[\Omega(T-X)-N_1\varepsilon]\cdot\sin(N_1+1)\varepsilon}{\sin\varepsilon}-\\&-B\frac{\sin[\Omega(T-X)-(N_4+1)\varepsilon]\cdot\sin N_4\varepsilon}{\sin\varepsilon}\end{aligned} \tag{27}$$

Nach ähnlichen Vereinfachungen ergibt sich der Druck zu

$$P(X, T) = 1 + D\frac{\sin[\Omega(T-X) - N_1\varepsilon]\cdot\sin(N_1+1)\varepsilon}{\sin\varepsilon} + \\ + D\frac{\sin[\Omega(T+X) - (N_4+1)\varepsilon]\cdot\sin N_4\varepsilon}{\sin\varepsilon} \tag{28}$$

wo

$$\varepsilon \neq k\pi \text{ und } T > 0$$

und

$$N_1 = \operatorname{int}\left(\frac{T-X}{2}\right) \quad N_4 = \operatorname{int}\left(\frac{T+X}{2}\right)$$

In (23) wurde für N_1 und $N_2(N_4 = N_2 + 1)$ die Bedingung gemacht, daß sie nicht negativ sein dürfen. Ist $T > 0$, muß diese Bedingung nicht gemacht werden, weil das Ergebnis durch Weglassen dieser Bedingung nicht beeinflußt wird. Die Orte $\varepsilon = k\pi$ gehören nicht zu dem Definitionsbereich der Geschwindigkeits- und Druckformeln (27) und (28), während diese Orte bei den Formeln (5) und (6) einen Teil des Definitionsbereichs bilden, die entsprechenden Ausdrücke jedoch im Grenzwert übereinstimmen. Es ist zu erkennen, daß die mit Hilfe der Fourier-Methode erhaltenen und im vorigen vereinfachten Geschwindigkeits- und Druckbeziehungen (20) und (21) mit den mit Laplace-Transformation gewonnenen und oben vereinfachten Beziehungen (27) und (28) übereinstimmen.

Durch die Gleichungen (2) wurden die Randbedingungen des physikalischen Prozesses angegeben. Es wurde eine rein sinusoidale Erregung angenommen. Da die Gleichungen (1) und die Randbedingungen homogen linear sind, läßt sich die resultierende Lösung als Summe getrennter Auflösungen mehrerer sinusoidaler Erregungen mit verschiedenen Amplituden und Randbedingungen herstellen. Die vereinfachten Formen haben besonders in diesen Fällen große Vorteile den in [1] angegebenen Endformeln gegenüber. Die Vorteile machen sich in der einfacheren Berechnung und im geringeren Zeitaufwand geltend. In der vorliegenden Arbeit sollen keine konkreten Berechnungen beschrieben werden, die Ergebnisse solcher wurden in [4] publiziert.

Die Darstellung unendlicher Reihen in geschlossener Form wurde verhältnismäßig ausführlich dargelegt, weil die hier angewandten Verfahren voraussichtlich auch in anderen Fällen herangezogen werden können. In einer ähnlich einfachen Form kann, zum Beispiel, die Auflösung des Differentialgleichungssystems (1) bei den Randbedingungen eines an dem einen Ende geschlossenen, an dem anderen Ende mittels eines Kolbens angeregten Rohres beschrieben werden.

Zusammenfassung

Es wurde die mathematische Beschreibung von Gasschwingungen in einer geraden Rohrleitung behandelt. Das eine Rohrende ist offen, das andere wird mittels eines Kolbens angeregt. Die in der Literatur vorliegenden zwei verschiedenen mathematischen Lösungen werden aus der Form einer unendlichen Reihe in geschlossene Form gebracht. Dadurch wurde einerseits die Gleichheit der beiden Lösungen nachgewiesen, anderseits die Berechnung der Lösung wesentlich vereinfacht.

Literatur

1. HOFFMAN, A.—FÉNYES, T.: Period. Polytechn. Mech. Eng. *26*, 61 (1982)
2. JIMENEZ, I.: Fluid Mech. Great Britain *1*, 23 (1973)
3. RYSHIK, I. M.—GRADRTEIN, I. S.: Tafeln, Berlin Deutscher Verlag der Wissenschaften
4. BENCZE, F.—HOFFMAN, A.—SZLIVKA, F.: ZAMM, Berlin, *63*, (1983)

Dr. Ferenc SZLIVKA, H-1521 Budapest.