RECHENVERFAHREN ZUR UNTERSUCHUNG VON WELLENERSCHEINUNGEN IN ROHRLEITUNGEN

Von

A. HOFFMANN und T. FÉNYES*

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität Budapest

* Mathematisches Inst. der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

Eingegangen am 28. August 1981
Vorgelegt von Prof. Dr. T. SZENTMÁRTONY

Bei der Lösung aeroakustischer Aufgaben wird oft von der eindimensionalen Wellengleichung ausgegangen und die den Randbedingungen angepaßte Lösung gesucht.

Für die Prüfung von Druckschwingungen in Rohrleitungen scheint bei hinreichend kleinen Schwingungsamplituden der Einsatz des obengenannten physikalischen bzw. mathematischen Modells ebenfalls zweckdienlich zu sein.

Der konkrete Gegenstand der Untersuchungen ist im vorliegenden Falle die Bestimmung des Schwingungsbildes in einer kolbenerregten Rohrleitung mit offenem Ende. (Das Problem wurde im Laufe der Forschungsarbeit am Lehrstuhl für Strömungslehre der TU Budapest aufgeworfen.)

Das Problem wurde bis jetzt in der Regel unter Anwendung einer numerischen Methode gelöst. Solche Methoden gaben jedoch über die Resonanzfrequenz keinen Aufschluß und waren in deren Bereich ganz unsicher. In diesem Beitrag geben wir eine exakte Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation an, u. zw. in zwei Formen. Die erste Form erhält man unter Anwendung des Entwicklungssatzes, durch welche die gesuchten Geschwindigkeitsfunktionen $c(x, t)$ und Druckfunktionen $p(x, t)$ in Form einer unendlichen Reihe angegeben werden. Die zweite Form ist mit den Reihen der Verschiebungsoperatoren hergestellt und enthält im Falle einer endlichen Zeit t endlich viele Glieder. Schließlich wird eine nach einer elementaren (Bernoulli-Fourier-) Methode erhaltene, ebenfalls exakte Lösung angegeben, die formal gleich der unter Anwendung des Entwicklungssatzes erhaltenen Lösung ist.

Diese Lösungen haben die Vorteile einfacherer Übersichtlichkeit und einer wesentlich kürzeren Rechenzeit als die für die numerische Lösung erforderliche. Diese Methoden lassen sich auch — neben der Lösung der gegenwärtigen konkreten Aufgaben, für allgemeingültigere Probleme anwenden.

Das aus den dem physikalischen Prozeß entsprechenden Bewegungs- und Kontinuitätsgleichungen hergeleitete mathematische Modell wird bezüglich der Geschwindigkeit $c(x, t)$ und der Druckes $p(x, t)$ durch das partielle Differentialgleichungssystem (im weiteren PDGLS)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad 0 \leqq t < \infty$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{\rho a^2}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad 0 \leqq x \leqq l \tag{I}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$c(x, 0) = 0 \qquad p(x, 0) = p_0$$

$$c(0, t) = A \sin \omega t \qquad p(l, t) = p_0 \tag{II}$$

dargestellt, wo die Dichte ρ, die Schallgeschwindigkeit a und der atmosphärische Druck p_0 Konstanten sind [11].

Das Gleichungssystem (I) im weiteren (GLS) ist das Analogon der reduzierten Telegrafengleichung, wenn der Ohmsche Widerstand R und die Ableitung G von einem Draht zum anderen gleich Null sind.

1. Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformation

Führen wir die Laplace-Transformierte der Funktionen $c(x, t)$ und $p(x, t)$ ein:

$$\bar{c}(x, s) = \int_0^\infty c(x, t) e^{-st}\, dt$$

$$\bar{p}(x, s) = \int_0^\infty p(x, t) e^{-st}\, dt \tag{1.1}$$

Beide Seiten des Differentialgleichungssystems (im weiteren DGLS) (I) der Laplace-Transformation unterzogen, ergibt sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen — aufgrund der bekannten Elementarregeln der Laplace-Transformation [9] —, daß

$$s\bar{c} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx}$$

$$\frac{d\bar{c}}{dx} = -\frac{1}{\rho a^2}(s\bar{p} - p_0)\,. \tag{1.2}$$

Aus der ersten Gleichung von (1.2) $\bar{c}$ ausgedrückt und in die zweite Gleichung von (1.2) eingesetzt, erhält man für $\bar{p}$ die Differentialgleichung (im weiteren DGL)

$$\frac{d^2\bar{p}}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}\bar{p} = -\frac{sp_0}{a^2}. \tag{1.3}$$

Diese ist für die Funktion $\bar{p}(x, s)$ eine gewöhnliche, inhomogene DGL zweiter Ordnung.

Die allgemeine Lösung von (1.3) angeschrieben und in die erste Gleichung von (1.2) eingesetzt, erhält man die allgemeine Lösung des DGLS-s (1.2) in der Form

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \alpha \operatorname{ch}\frac{x}{a}s + \beta \operatorname{sh}\frac{x}{a}s + \frac{p_0}{s} \\ \bar{c} &= -\frac{\alpha}{\rho a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}s - \frac{\beta}{\rho a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}s, \end{aligned} \tag{1.4}$$

wo die Koeffizienten α, β beliebige Konstanten sind. Die Werte letzterer lassen sich aus den Laplace-Transformierten der Randbedingungen des Problems eindeutig ermitteln, da

$$\begin{aligned} \bar{c}(0, s) &= \int_0^\infty c(0, t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty A \sin \omega t \, e^{-st}\,dt = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \\ \bar{p}(l, s) &= \int_0^\infty p(l, t)\, e^{-st}\,dt = \int_0^\infty p_0\, e^{-st}\,dt = \frac{p_0}{s}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichheiten (1.4) und (1.5) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{s} &= \alpha \operatorname{ch}\frac{l}{a}s + \beta \operatorname{sh}\frac{l}{a}s + \frac{p_0}{s} \\ \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} &= -\frac{\beta}{\rho a}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

und davon

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{A\omega\rho a}{s^2+\omega^2} \\ \alpha &= \frac{A\omega\rho a}{s^2+\omega^2}\operatorname{th}\frac{l}{a}s. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Werden nun die Werte α und β in die Formeln (1.4) wieder eingesetzt, so erhält man mit den sich auf die hyperbolischen Funktionen beziehenden, elementaren Umformungen für die Laplace-Transformierten der Funktionen $c(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ und $p(\mathrm{x}, \mathrm{t})$ die letzten Formeln:

$$\bar{p}(x, s) = \frac{p_0}{s} + \frac{A\omega\rho a \operatorname{sh}\left(\frac{l-x}{a} s\right)}{(s^2+\omega^2) \operatorname{ch} \frac{l}{a} s}$$

$$\bar{c}(x, s) = \frac{A\omega \operatorname{ch}\left(\frac{l-x}{a} s\right)}{(s^2+\omega^2) \operatorname{ch} \frac{l}{a} s}. \tag{1.8}$$

Es bleibt noch die Rücktransformation der Operatoren (1.8). Diese kann mit Hilfe des sog. Entwicklungssatzes durchgeführt werden, der ausführlich für $\bar{c}(x, s)$ gezeigt wird, während für $\bar{p}(x, s)$ nur das Ergebnis mitgeteilt werden soll.

Entwicklungssatz: Die Laplace-Transformierte sei der Form $\frac{F(s)}{G(s)}$ und alle Wurzeln von $G(s)$ seien einfach, dann läßt sich die inverse Laplace-Transformierte von $\frac{F(s)}{G(s)}$ in der Form

$$\sum_n \frac{F(s_n)}{G'(s_n)} e^{s_n t} \tag{1.9}$$

anschreiben, wo s_n die verschiedenen einfachen Wurzeln von $G(s)$ bezeichnet, und in (1.9) die Summierung für sämtliche s_n durchzuführen ist. In (1.8) sind für $\bar{c}(x, s)$, von dem Faktor $A\omega$ abgesehen

$$F(s) = \operatorname{ch}\left(\frac{l-x}{a} s\right), \quad G(s) = (s^2+\omega^2) \operatorname{ch} \frac{l}{a} s.$$

Die Wurzeln von $G(s)$ sind einerseits sich aus $s^2+\omega^2=0$ ergebende Zahlen

$$s = \pm i\omega, \tag{1.10}$$

anderseits die sich aus

$$\operatorname{ch} \frac{l}{a} s = \cos i \frac{l}{a} s = 0$$

$$s_n = i\frac{a}{l}(1+2n)\frac{\pi}{2}, \quad |n| = 0, 1, 2 \ldots \tag{1.11}$$

ergebenden Zahlen.

Es ist zu erkennen, daß sich sämtliche Wurzeln auf der imaginären Achse befinden. Die erhaltenen Wurzeln sind einfach, wenn

$$\omega \neq \frac{a}{l}(1+2n)\frac{\pi}{2} = \omega_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{1.12}$$

Im weiteren wird angenommen, daß (1.12) erfüllt ist.

Wir werden sehen, daß die Frequenzen ω_n die Eigenfrequenzen (Resonanzfrequenzen) des Systems sind. So stellt (1.12) eine auch physikalisch plausible Voraussetzung dar.

Da

$$G'(s) = 2s \operatorname{ch}\frac{l}{a}s + \frac{l}{a}(s^2+\omega^2)\operatorname{sh}\frac{l}{a}s \tag{1.13}$$

gelten,

$$G'(\pm i\omega) = \pm 2i\omega \operatorname{ch}\frac{l}{a}i\omega = \pm 2i\omega \cos\frac{l}{a}\omega$$

$$F(\pm i\omega) = \operatorname{ch}\left(\frac{l-x}{a}i\omega\right) = \cos\left(\frac{l-x}{a}\omega\right).$$

Damit ergibt sich die Summe der zu den Wurzeln $s = \pm i\omega$ gehörenden beiden Glieder in (1.9) zu

$$\frac{\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega\right)}{2\omega\cos\frac{l}{a}\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}}{i} - \frac{e^{-i\omega t}}{i}\right) = \frac{\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega\right)\sin\omega t}{\omega\cos\frac{l}{a}\omega}. \tag{1.14}$$

Anderseits hat man bei nicht negativem n mit (1.12)

$$G'\left[i\frac{a}{l}\frac{\pi}{2}(1+2n)\right] = \frac{l}{a}\left[\omega^2 - \frac{a^2}{l^2}\frac{\pi^2}{4}(1+2n)^2\right]\operatorname{sh}\left[i\frac{\pi}{2}(1+2n)\right] =$$

$$= i\frac{l}{a}(\omega^2-\omega_n^2)\sin\left[\frac{\pi}{2}(1+2n)\right] = (-1)^n i\frac{l}{a}(\omega^2-\omega_n^2) \tag{1.15}$$

und

$$F\left[i\frac{a}{l}\frac{\pi}{2}(1+2n)\right]=\mathrm{ch}\left[\left(\frac{l-x}{a}\right)\frac{a}{l}i\frac{\pi}{2}(1+2n)\right]=$$

$$=\cos\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{\pi}{2}(1+2n)\right]=\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega_n\right). \tag{1.16}$$

Wird anstelle von n $-n-1$ geschrieben, bleibt der Wert von $F(\ldots)$ unverändert, während $G'(\ldots)$ das Vorzeichen ändert, wie es aus (1.15) zu sehen ist. Damit ergibt sich die Summe der zu den Werten n und $-n-1$ gehörenden beiden Glieder in (1.9) zu

$$\frac{(-1)^n\frac{a}{l}\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega_n\right)}{i(\omega^2-\omega_n^2)}\left[e^{i\omega_n t}-e^{-i\omega_n t}\right]=$$

$$=\frac{2a}{l}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega_n\right)}{\omega^2-\omega_n^2}\sin\omega_n t\,. \tag{1.17}$$

Danach auf den Faktor $A\omega$ zurückgebracht, ergibt sich nach (1.9), (1.14) und (1.17)

$$c(x,t)=\frac{A\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega\right)\sin\omega t}{\cos\frac{l}{a}\omega}+\frac{2A\omega a}{l}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\left(\frac{l-x}{a}\omega_n\right)}{\omega^2-\omega_n^2}\sin\omega_n t\,. \tag{1.18}$$

Wiederholt man das Verfahren Wort für Wort, ergibt sich für die Funktion $p(x, t)$

$$p(x,t)=p_0+A\rho a\left[\frac{\sin\left(\frac{l-x}{a}\omega\right)\cos\omega t}{\cos\frac{l}{a}\omega}+\frac{2\omega a}{l}\cdot\right.$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{l-x}{a}\omega_n\right)}{\omega^2-\omega_n^2} \cos \omega_n t \Bigg] . \tag{1.19}$$

Ist bei festgesetztem n $\omega \to \omega_n$, so ist zu erkennen, daß die Amplitude der Schwingung mit einer Frequenz ω_n immer größer wird. Die Frequenzen ω_n sind also tatsächlich die Resonanzfrequenzen des Systems. Im Grenzfall, wenn $\omega = \omega_n$, stellt sich die Resonanz ein und die Zusammenhänge (1.18) und (1.19) werden sinnlos.

Das Problem kann auch bei Resonanz unter Anwendung der für den Fall von mehrfachen Wurzeln gültigen, modifizierten Form des Entwicklungssatzes gelöst werden. Dies wird jedoch in dem vorliegenden Beitrag nicht behandelt. Statt dessen wird eine andere Rücktransformationsmethode gezeigt, die auch den Fall der Resonanz erfaßt. Auch diese Methode soll nur in Verbindung mit der Funktion $\bar{c}(x, s)$ ausführlich dargelegt werden, während wir uns für $\bar{p}(x, s)$ mit der Angabe des Endergebnisses begnügen werden.

Der zweite Zusammenhang von (1.8) läßt sich in Form

$$\bar{c}(x, s) = A\omega \frac{e^{\frac{l-x}{a}s} + e^{-\frac{l-x}{a}s}}{(s^2+\omega^2)\left(e^{\frac{l}{a}s} + e^{-\frac{l}{a}s}\right)} =$$

$$= A\omega \frac{e^{-\frac{x}{a}s} + e^{-\left(\frac{2l-x}{a}\right)s}}{(s^2+\omega^2)\left(1 + e^{-\frac{2l}{a}s}\right)} \tag{1.20}$$

umschreiben. Da es für s mit hinreichend großem Realteil gilt, daß

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{2l}{a}s}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{2nl}{a}s},$$

ist

$$\bar{c}(x, s) = \frac{A\omega}{s^2+\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[e^{-\frac{x+2nl}{a}s} + e^{-\frac{2l(n+1)-x}{a}s} \right]. \tag{1.21}$$

Die erhaltene Formel enthält unendliche Reihen von Verschiebungsoperatoren, kann also leicht rücktransformiert werden.

Da die Inverstransformierte von $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ist $\sin \omega t$, ergibt sich unter Anwendung des Verschiebungssatzes der Laplace-Transformation sogleich

$$c(x,t)=A\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\gamma\left(t-\frac{x+2nl}{a}\right)+\gamma\left(t-\frac{2(n+1)l-x}{a}\right)\right], \quad (1.22)$$

wo

$$\gamma(t)=\begin{matrix} \sin\omega t, & \text{wenn } t\geqq 0 \\ 0, & \text{wenn } t<0 \end{matrix}. \quad (1.23)$$

In einem beliebigen *endlichen* Zeitintervall reduziert sich die unendliche Reihe (1.22) auf eine endliche, weil bei festgesetztem t_0 ein n_0 existiert, bei dem im Falle von $n>n_0$ die Argumente der in (1.22) vorkommenden Funktionen negativ sind. In bezug auf eine je längere Zeitdauer der Vorgang untersucht wird, um so mehr Glieder müssen in der Reihe (1.22) berücksichtigt werden.

Den Gedankengang bezüglich $\bar{p}(x,s)$ wiederholt, erhält man

$$p(x,t)=p_0+A\rho a\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\gamma\left(t-\frac{x+2nl}{a}\right)-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(t-\frac{2(n+1)l-x}{a}\right)\right]. \quad (1.24)$$

Die Lösungen (1.22) und (1.24) sind für jeden ω-Wert gültig, aus diesen läßt sich also feststellen, wieviel Zeit bei $\omega=\omega_n$, d. h. bei der Resonanzfrequenz, vergehen muß, damit die obengenannten Lösungen eine gewisse obere Schranke überschreiten.

Übrigens müssen bei $\omega\neq\omega_n$ die Lösungen (1.18) und (1.19) im Sinne des Existenz- und des Eindeutigkeitssatzes gleich den Lösungen (1.22) und (1.24) sein.

2. Lösung nach der Bernoulli-Fourier-Methode

Betrachten wir die Randwertaufgaben (I) (II), und setzen wir die gesuchten Funktionen $c(\mathrm{x},\mathrm{t})$ und $p(\mathrm{x},\mathrm{t})$ als Summen von Produktfunktionen an., d. h.

$$c=\sum_{n=-1}^{\infty}c_n(x)d_n(t)$$

$$p=\sum_{n=-1}^{\infty}p_n(x)q_n(t). \quad (2.1)$$

Die Funktionen (2.1) in das DGLS (I) eingesetzt, erhält man die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \frac{c_n(x)}{p_n'(x)} &= -\frac{1}{\rho}\frac{q_n(t)}{d_n(t)} = \lambda_n^2 \\ \frac{c_n'(x)}{p_n(x)} &= -\frac{1}{\rho a^2}\frac{\dot{q}_n(t)}{d_n(t)} = -\mu_n^2 , \end{aligned} \tag{2.2}$$

wo λ_n und μ_n einstweilen beliebige reale Zahlen sind und durch einen Punkt die Derivierte nach der Zeit bezeichnet wurde. Die Trennung der Veränderlichen kann auch durchgeführt werden, wenn die Funktionen in den Nennern nicht überall von Null verschieden sind; es genügt, daß es in dem betreffenden Bereich einen solchen Ort gebe (s. [12], [13]).

Aus den Zusammenhängen (2.2) ergeben sich für p_n und d_n die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} p_n''(x) + \nu_n^2 p_n(x) &= 0 \\ \ddot{d}_n(t) + a^2\nu_n^2 d_n(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit $\nu_n = \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$.

Die allgemeine Lösung der DGL (2.3) lautet:

$$\begin{aligned} p_n &= c_{n1}\cos \nu_n x + c_{n2}\sin \nu_n x \\ d_n &= k_{n1}\cos a\nu_n t + k_{n2}\sin a\nu_n t . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dann erhält man aus dem ersten Zusammenhang von (2.2) auch die Funktionen $c_n(x)$ und $q_n(t)$:

$$c_n = \lambda_n\mu_n(c_{n2}\cos \nu_n x - c_{n1}\sin \nu_n x)$$

$$q_n = -\rho a\lambda_n\mu_n(k_{n2}\cos a\nu_n t - k_{n1}\sin a\nu_n t) .$$

Schreiben wir die Lösungen der Form (2.1) in folgender Form:

$$\begin{aligned} c &= \lambda_{-1}\mu_{-1}(\cos \nu_{-1}x - c_{-1,1}\sin \nu_{-1}x)k_{-1,2}\sin a\nu_{-1}t - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\mu_n c_{n1}k_{n2}\sin \nu_n x \sin a\nu_n t \\ p &= p_0 - \rho a[(c_{-1,1}\cos \nu_{-1}x + \sin \nu_{-1}x)\lambda_{-1}\mu_{-1}k_{-1,2}\cdot \\ &\quad \cdot \cos a\nu_{-1}t + \sum_{n=0}^{\infty} c_{n1}\cos \nu_n x\cdot\lambda_n\mu_n k_{n2}\cos a\nu_n t] \end{aligned} \tag{2.5}$$

Daraus wird durch $c(x, t)$ die Anfangsbedingung $c(x, 0)=0$ befriedigt, und für die Randbedingung ergibt sich die Gleichung:

$$c(0, t)=\lambda_{-1}\mu_{-1}k_{-1,2} \sin a\nu_{-1}t = A \sin \omega t\,.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung können die Lösungen (2.5) in der Form

$$\begin{aligned} c &= A\left(\cos\frac{\omega}{a}x - c_{-1,1}\sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}_{n2} \sin \nu_n x \sin a\nu_n t \\ p &= p_0 - \rho a\left[A\left(c_{-1,1}\cos\frac{\omega}{a}x + \sin\frac{\omega}{a}x\right)\cos\omega t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{k}_{n2}\cos\nu_n x \cos a\nu_n t\right] \end{aligned} \tag{2.6}$$

geschrieben werden.

Die Konstanten $c_{-1,1}$ und $\bar{k}_{n2}$ werden aus den für die Funktion p festgelegten Rand- und Anfangsbedingungen bestimmt. Aus $p(l, t)=p_0$ ergibt sich, daß

$$c_{-1,1} = -\mathrm{tg}\frac{\omega}{a}l \quad \text{und} \quad \nu_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l},$$

und aus der Bedingung $p(x, 0)=p_0$

$$\bar{k}_{n2} = -\frac{2A\omega a}{l\left[\omega^2 - \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)a\frac{\pi}{l}\right)^2\right]} = -\frac{2A\omega a}{l(\omega^2-\omega_n^2)}\,.$$

Damit ergeben sich die gesuchten Funktionen zu

$$\begin{aligned} c &= A\left(\cos\frac{\omega}{a}x + \mathrm{tg}\frac{\omega}{a}l\cdot\sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t + \frac{2A\omega a}{l}\cdot \\ &\quad \cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega_n}{a}x\sin\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$p = p_0 + \rho a A \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\omega}{a} l \cdot \cos \frac{\omega}{a} x - \sin \frac{\omega}{a} x \right) \cos \omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\omega_n}{a} x \cos \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} \right].$$

Es ist gleich zu erkennen, daß die Lösungen (2.7) gleich den Lösungen (1.18) und (1.19) sind.

Die Funktionen (2.7) können auch in der Form

$$c = \frac{A}{2} \left[\sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) + \sin \omega \left(t + \frac{x}{a} \right) + \operatorname{tg} \frac{\omega}{a} l \left(\cos \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos \omega \left(t + \frac{x}{a} \right) \right) \right] + \frac{A\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \left(t - \frac{x}{a} \right) - \cos \omega_n \left(t + \frac{x}{a} \right)}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

$$p = p_0 + \rho a A \left\{ \frac{1}{2} \left[\sin \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) - \sin \omega \left(t + \frac{x}{a} \right) + \right. \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + tg \frac{\omega}{a} l \left(\cos \omega \left(t - \frac{x}{a} \right) + \cos \omega \left(t + \frac{x}{a} \right) \right) \right] +$$

$$\left. + \frac{\omega a}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \left(t - \frac{x}{a} \right) + \cos \omega_n \left(t + \frac{x}{a} \right)}{\omega^2 - \omega_n^2} \right\}$$

angeschrieben werden, wodurch die physikalische Interpretation der Lösung (fortschreitende Welle) ermöglicht wird.

Die Lösungsfunktionen (2.8) können auch noch in der Form

$$\begin{aligned} c &= f\left(t - \frac{x}{a} \right) + F\left(t + \frac{x}{a} \right) \\ p &= p_0 + \rho a \left[f\left(t - \frac{x}{a} \right) - F\left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

geschrieben werden. Die letzteren Formeln können aus dem DGLS I direkt ermittelt werden, wenn die unabhängigen Veränderlichen nach der Charakteristik

$$\xi = t - \frac{x}{a}, \quad \eta = t + \frac{x}{a}$$

transformiert werden. Dann erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial \xi}. \tag{2.10}$$

Werden nun die Funktionen c und p in der Form

$$c = c_1(\xi) + d_1(\eta), \quad p = p_1(\xi) + q_1(\eta). \tag{2.11}$$

angenommen und in (2.10) eingesetzt, erhält man die Beziehungen

$$d_1 = -\frac{1}{\rho a} q_1, \quad c_1 = \frac{1}{\rho a} p_1. \tag{2.12}$$

Die Beziehungen $c_1 = f$ und $d_1 = F$ eingeführt, erhält man die Formeln (2.9).

Wird die Trennung der Veränderlichen angewandt, besteht die übliche Art und Weise der Lösung des PDGLS-es (I) darin, daß es nach Euler auf eine PDGL zweiter Ordnung zurückgeführt wird. Im vorliegenden Falle bietet jedoch die Befriedigung der Randbedingungen (II) große Schwierigkeiten. Nach dem oben beschriebenen Verfahren wird die Trennung der Veränderlichen direkt auf das Differentialgleichungssystem angewandt, und so können die Randbedingungen (II) ohne jede Schwierigkeit befriedigt werden. Das DGLS (I) ergibt sich aber unmittelbar aus dem physikalischen Modell.

3. Anwendung

Betrachten wir ein an dem einen Ende offenes Rohr von 5 m Länge, wo sich am anderen Rohrende ein Kolben mit der Geschwindigkeit $A \sin \omega t$ bewegt. $A = r\omega$, wobei $r = 0{,}022$ m die Länge des Pleuels ist, während die Kreisfrequenz $\omega = 447{,}8$, die Schallgeschwindigkeit $a = 347{,}8$, der atmosphärische Druck $p_0 = 108\,004$, die Dichte $= 1{,}25$ sind.

In der Sekunde $t = 0{,}216$ wird das Verhältnis der Geschwindigkeitsverteilung zu der Druckverteilung die Rohrlänge entlang wie folgt sein:

		$\frac{c}{a}$	$\frac{p}{p_0}$
$x=0$	1	0,017 463 21	0,988 708 651 9
	3	0,026 377 80	0,999 165 807 4
	5	0,032 582 98	1,009 708 647 4
	7	0,035 441 38	1,019 254 258 6
	9	0,034 659 40	1,026 822 158 2
	11	0,030 317 37	1,031 635 005 5
	13	0,022 861 26	1,033 198 446 3
	15	0,013 056 95	1,031 351 890 8
	17	0,001 911 49	1,026 285 009 1
	19	−0,009 430 31	1,018 518 248 5
	21	−0,019 803 47	1,008 849 376 2
	23	−0,028 142 51	0,998 271 535 4
	25	−0,033 590 88	0,987 871 234 8
	27	−0,035 588 94	0,978 716 746 8
	29	−0,033 931 46	0.971 748 379 6
	31	−0,028 788 69	0,967 681 892 6
	33	−0,020 688 88	0,966 934 977 4
	35	−0,010 464 00	0,969 584 353 7
	37	0,000 835 69	0,975 357 889 4
	39	0,012 049 55	0,983 662 552 7
$x=5m$	41	0,017 486 68	1.000 000 000 0

Zusammenfassung

Zweck der Arbeit ist, das sich in einer durch einen Kolben angeregten Rohrleitung mit offenem Ende ausgestaltende Schwingungsbild zu ermitteln. Das mathematische Modell der Aufgabe ist das PDGLS mit entsprechenden Randbedingungen, das das Analogon der Telegrafengleichung ist. Die Lösung wird — im Gegensatz zu den bisher üblichen, numerischen Methoden — nach einem exakten Verfahren analytisch angegeben. So ist die Lösung mathematisch leicht übersichtlich und die Berechnung wesentlich weniger zeitaufwendig als eine numerische Methode.

In der Arbeit wird die Lösung zuerst mit Hilfe der Laplace-Transformation, dann nach der Bernoulli-Fourier-Methode hergestellt, u. zw. direkt aus dem DGLS, das sich aus dem physikalischen Modell ergeben hat. Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird das Problem zuerst unter Anwendung des Entwicklungssatzes, und dann mit den Verschiebungsoperatoren gelöst. Die letztere Lösung ist für alle Kreisfrequenzen ω, also auch für die Resonanzfrequenz gültig, und besteht für eine endliche Zeit aus Gliedern endlicher Zahl. So kann die Zeit bestimmt werden, nach der die durch die Resonanzfrequenz erregte Schwingung gefährlich wird.

Literatur

1. HORT, W.: Technische Schwingungslehre. Springer, Berlin 1922.
2. TIMOSHENKO, S.: Schwingungsprobleme der Technik. Springer, Berlin, 1932.
3. FÖPPL, A.: Technische Mechanik 4. Bd. Oldenbourg, München—Berlin, 1944.
4. SKUDRZYK, E.: Die Grundlagen der Akustik. Springer, Wien, 1954.
5. TARNÓCZY, T.: Akusztika. Fizikai hangtan (Akustik. Physikalische Schallehre). Akadémiai K., Bp. 1963.
6. ZIEREP, J.: Theoretische Gasdynamik 1. G. Braun, Karlsruhe, 1972.
7. MORSE, PH. M.—INGARD, K. U.: Theoretical Acoustics. McGraw-Hill, New York—London, 1968.
8. GOLDSTEIN, M. E.: Aeroacoustics. McGraw-Hill, New York—London, 1976.
9. DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. R. Oldenbourg, München, 1961.
10. TYIHONOV, A. N.—SZAMARSZKIJ, A. A.: A matematikai fizika differenciálegyenletei (Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik), Akadémiai K. Bp., 1956.
11. SZENTMÁRTONY, T.: Folyadékok mechanikája (Mechanik der Flüssigkeiten) I. Manuskript. Tankönyvkiadó, Bp. 1967.
12. ACZÉL, J.: Megjegyzés a „változók szétválasztásának módszeréhez" és annak általánosítása (Bemerkung zu der „Methode der Trennung der Veränderlichen" und ihre Verallgemeinerung). Matematikai Lapok, *12* 1961.
13. HOFFMANN, A.: Megjegyzés a „változók szétválasztása módszerének" általánosításához (Bemerkung zu der Verallgemeinerung der „Methode der Trennung der Veränderlichen"). Matematikai Lapok, *26*. 1975.

Dr. Andor HOFFMANN, Dr. Tamás FÉNYES,

Budapest, H-1521
Mathematisches Inst. d. Ungarischen
Akad. d. Wissenschaften, Budapest,
Reáltanoda u. 13—15. H-1053