ÜBER DIE SCHWINGUNGSGLEICHUNG MIT ZUFÄLLIGEN KOEFFIZIENTEN

Von

TRAN VAN NHUNG

Lehrstuhl für Mathematik, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 24. September 1981
Vorgelegt von Prof. Dr. M. FARKAS

Die Schwingungsgleichung mit zufälligen Koeffizienten wurde von einigen Autoren, z. B. F. KOZIN [5], T. K. CAUGHEY und A. H. GRAY [2], E. F. INFANTE [3] und H. BUNKE [1], untersucht. Als Andwendung der allgemeinen Resultate aus [1] und [6] betrachten wir in dieser Arbeit das asymptotische Verhalten von Lösungen der Schwingungsgleichung mit asymptotisch streng stationären zufälligen Koeffizienten.

Im weiteren brauchen wir folgende Begriffe und Resultate.

Einen stochastischen Prozess x_t $(t \in T \subset R^1)$, dessen Realisierungen fast alle auf T stetig sind, nennen wir *R-stetig auf* T ([1]).

Ein stochastischer Prozess x_t heißt in einem Intervall T *R-Lösung* (realisierungsweise Lösung) der stochastischen Gleichung

$$\dot{x} = f(x, t, \omega),$$

wobei $\omega \in \Omega$, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wenn fast alle Realisierungen von x_t im Intervall T der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}_t(\omega) = f(x_t(\omega), t, \omega)$$

genügen ([1], [4]).

Ein n-dimensionaler stochastischer Prozess x_t heißt *strengt stationär*, wenn alle endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen der Gestalt $F(x_1, \ldots, x_k; t_1+\tau, \ldots, t_k+\tau)$ $(x_i \in R^n; t_i, \tau \in T, i = 1, \ldots, k)$ unabhängig von τ sind ([1]).

Im Folgenden bezeichnen wir mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm von Vektoren bzw. von Matrizen, und mit Ex den Erwartungswert von x.

Aus Satz 5.15 in [1], S.120, von H. BUNKE folgt unmittelbar das folgende Resultat für den stationären Fall.

SATZ 1. (H. BUNKE, [1], S. 123) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\dot{x}_t = f(x_t, z_t) + g(x_t, z_t). \tag{1}$$

Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(i) $f(x, z)$ und $g(x, z)$ sind auf $R^n \times R^m$ stetigen n-dimensionale Vektorfunktionen. Es sei $f(0, z) = 0$, $z \in R^m$.

(ii) z_t ist ein R-stetiger streng stationärer m-dimensionaler Vektorprozeß.

(iii) Es gilt $\| g(x, z_t) \| \leqq \varphi(z_t)$ (mod P) mit $E\varphi(z_t) < \infty$ und

$$\|g(x_1, z_t) - g(x_2, z_t)\| \leqq \beta \| x_1 - x_2 \| \qquad (\text{mod } P),$$

wobei β hinreichend klein ist.

(iv) Es gibt eine reelle Matrix A, deren charakteristische Zahlen negative Realteile haben:

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} Re\lambda_i < -\rho < 0,$$

so daß

$$\| f(x_1, z_t) - f(x_2, z_t) - A(x_1 - x_2) \| \leqq \chi \| x_1 - x_2 \| \qquad (\text{mod } P)$$

mit hinreichend kleinem χ gilt.

Dann existiert auf R^1 eine R-Lösung x_t^0 von (1), für die (x_t^0, z_t) streng stationär ist, und jede R-Lösung x_t von (1) konvergiert fast sicher exponentiell gegen diese streng stationäre R-Lösung.

Wegen der Voraussetzung (iv) haben wir die Abschätzung

$$\|e^{At}\| \leqq ke^{-\rho t} \quad (k = \text{const}, t \geqq 0). \tag{2}$$

H. BUNKE hat gezeigt, dass

$$\lim_{t \to \infty} (e^{\varepsilon t} \| x_t - x_t^0 \|) = 0 \quad (\text{mod } P) \tag{3}$$

mit $0 < \varepsilon < \rho - k(\chi + \beta)$ für jede R-Lösung x_t von (1) gilt.

Aus Satz 2.2 in [6] folgt unmittelbar das folgende Resultat für die Gleichung

$$\dot{x}_t = f(x_t, z_t) + g(x_t, z_t) + h(x_t, t, z_t), \tag{4}$$

bei der die Störung $h(x_t, t, z_t)$ asymptotisch klein und im allgemeinen abhängig von t ist.

SATZ 2. ([6]) Es seien die Voraussetzungen (i), (ii), (iii), (iv) des Satzes 1 und folgende Voraussetzung erfüllt:

(v) $h(x, t, z)$ ist eine auf $R^n \times R^1 \times R^m$ stetige n-dimensionale Vektorfunktion und es gibt eine stetige Funktion $\psi: R^1 \times R^m \to [0, \infty)$, so daß

$$\| h(x, t, z_t) \| \leqq \psi(t, z_t) \quad (\text{mod } P)$$

gilt. Wenn

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t, z_t)=0 \quad (\mathrm{mod}\ P)$$

erfüllt ist, dann konvergiert jede R-Lösung x_t von (4) fast sicher gegen die streng stationäre R-Lösung x_t^0 von (1), d. h.

$$\lim_{t\to\infty} \| x_t - x_t^0 \| = 0 \quad (\mathrm{mod}\ P)$$

gilt. Wenn

$$\lim_{t\to\infty} (e^{\delta t}\psi(t, z_t))=0 \quad (\mathrm{mod}\ P)$$

für ein $\delta>0$ erfüllt ist, dann konvergiert jede R-Lösung x_t von (4) fast sicher exponentiell gegen die streng stationäre R-Lösung x_t^0 von (1), d. h.

$$\lim_{t\to\infty} (e^{\varepsilon t} \| x_t - x_t^0 \|)=0 \quad (\mathrm{mod}\ P)$$

mit $0<\varepsilon<\min\,[\delta, \rho-k(\chi+\beta)]$ gilt.

Als Anwendung des obigen Satzes 1 hat H. Bunke ([1], S. 123) die Schwingungsgleichung mit zufälligen Koeffizienten

$$\ddot{y}_t + (a+z_{1t})\dot{y}_t + (b+z_{2t})y_t = \sigma(y_t, \dot{y}_t)z_{3t} + z_{4t}, \tag{5}$$

wobei $a>0$, $4b-a^2>0$ und $E\,|z_{4t}|<\infty$, $z_t=(z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}, z_{4t})$ ein R-stetiger streng stationärer Prozeß, σ eine auf R^2 definierte stetige beschränkte reelle Funktion mit

$$|\sigma(u)-\sigma(v)| \leqq \mu \| u-v \|, \quad u, v \in R^2,$$

ist, betrachtet. Gilt

$$|z_{1t}|+|z_{2t}|+\mu |z_{3t}| < k^{-1}\left(\frac{a}{2} - \delta\right) \quad (\mathrm{mod}\ P)$$

mit ein $\delta>0$, wobei

$$k=\left(\alpha+\frac{2}{\lambda}\right)\left(1+\frac{1}{2}(a+\lambda)\right),$$

$$\lambda=\sqrt{4b-a^2},$$

$$\alpha=|\sin \arctan \lambda a^{-1}|^{-1},$$

dann hat (5) eine R-Lösung y_t^0, für die $(y_t^0, \dot{y}_t^0, z_t)$ streng stationär ist, und für jede R-Lösung y_t von (5) gilt mit $0<\varepsilon\leqq\delta$

$$\lim e^{\varepsilon t}(|y_t-y_t^0|+|\dot{y}_t-\dot{y}_t^0|)=0 \quad (\bmod P).$$

Nun betrachten wir als Anwendung des obigen Satz 2 das asymptotische Verhalten von R-Lösungen der allgemeineren Schwingungsgleichung mit zufälligen Koeffizienten

$$\begin{gathered}\ddot{y}_t+[a+z_{1t}+k_1(y_t, \dot{y}_t, t, z_t)]\dot{y}_t+\\ +[b+z_{2t}+k_2(y_t, \dot{y}_t, t, z_t)]y_t=\sigma(y_t, \dot{y}_t)z_{3t}+z_{4t}+\\ +k_3(y_t, \dot{y}_t, t, z_t),\end{gathered} \tag{6}$$

wobei a, b, σ und z_{it} $(i=1, 2, 3, 4)$ wie bei (5) sind. Es seien folgende Voraussetzungen für die Störungen k_i $(i=1, 2, 3)$ in (6) erfüllt: $k_i: R^4\to R^1$ $(i=1, 2, 3)$ sind stetige Funktionen, und es gibt stetige Funktionen $\psi_i: R^2\to[0, \infty)$ $(i=1, 2, 3)$, so daß

$$|k_i(x, t, z_t)|\leqq\psi_i(t, z_t)\,\|x\|^{-1} \quad (\bmod P),$$

$$x\in R^2\setminus\{0\}, \quad t\in R^1, \quad i=1, 2,$$

und

$$|k_3(x, t, z_t)|\leqq\psi_3(t, z_t) \quad (\bmod P),$$

$$x\in R^2, \quad t\in R^1,$$

gilt.

Mit der Substitution $x_1=y_t$, $x_2=\dot{y}_t$ erhalten wir aus der skalaren Gleichung (6) folgendes System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{x}=&\begin{bmatrix}0 & 1\\ -(b+z_{2t}) & -(a+z_{1t})\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \sigma(x)z_{3t}+z_{4t}\end{bmatrix}+\\ &+\begin{bmatrix}0\\ -k_2(x, t, z_t)x_1-k_1(x, t, z_t)x_2+k_3(x, t, z_t)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

mit $x=\operatorname{col}(x_1, x_2)$. Das System (7) hat die Form (4) mit

$$f(x, z_t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -(b+z_{2t}) & -(a+z_{1t})\end{bmatrix}x,$$

$$g(x, z_t) = \mathrm{col}\,(0, \sigma(x) z_{3t} + z_{4t}),$$

und

$$h(x, t, z_t) = \mathrm{col}\,(0, \ -k_2(x, t, z_t)x_1 - k_1(x, t, z_t)x_2 + k_3(x, t, z_t)).$$

Wegen unserer Voraussetzungen für die Störungen k_i $(i=1, 2, 3)$ gilt

$$\| h(x, t, z_t) \| \leqq |k_2| \, |x_1| + |k_1| \, |x_2| + |k_3| \leqq \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$$

$$(x \neq 0, \quad \mathrm{mod}\, P),$$

und

$$\| h(0, t, z_t) \| = | k_3(0, t, z_t) | \leqq \psi_3(t, z_t) \quad (\mathrm{mod}\, P),$$

d. h., die Voraussetzung (v) des Satzes 2 in diesem Fall mit $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ ist erfüllt.

Durch Anwendung des Satzes 2 auf das System (7) erhalten wir folgendes Resultat für Gleichung (6): Es seien die Voraussetzungen von H. Bunke für die Koeffizienten der Gleichung (5) und die obigen Voraussetzungen für die Störungen k_i $(i=1, 2, 3)$ in (6) erfüllt. Wenn

$$\lim_{t \to \infty} \psi_i(t, z_t) = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad \mathrm{mod}\, P)$$

erfüllt ist, dann gilt für jede R-Lösung y_t von (6)

$$\lim_{t \to \infty} (| y_t - y_t^0 | + | \dot{y}_t - \dot{y}_t^0 |) = 0 \quad (\mathrm{mod}\, P),$$

wobei y_t^0 die streng stationäre R-Lösung von (5) ist. Wenn

$$\lim_{t \to \infty} (e^{\delta_i t} \psi_i(t, z_t)) = 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad \mathrm{mod}\, P)$$

für ein $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt ist, dann gilt für jede R-Lösung y_t von (6)

$$\lim_{t \to \infty} e^{\varepsilon t}(| y_t - y_t^0 | + | \dot{y}_t - \dot{y}_t^0 |) = 0 \quad (\mathrm{mod}\, P)$$

mit $0 < \varepsilon \leqq \min\,(\min\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \delta)$, wobei y_t^0 die streng stationäre R-Lösung von (5) ist.

Wir bemerken, daß die streng stationäre R-Lösung y_t^0 von (5) mit Hilfe der sukzessiven Approximation gesucht werden kann (siehe den Beweis des Satzes 5.15 in [1], S. 120–123).

Der Autor dankt Prof. M. Farkas für das Durchlesen des Manuskriptes.

Zusammenfassung

Wir zeigen unter gewissen Voraussetzungen, daß die R-Lösungen der Schwingungsgleichung mit asymptotisch streng stationären zufälligen Koeffizienten

$$\ddot{y}_t+[a+z_{1t}+k_1]\dot{y}_t+[b+z_{2t}+k_2]y_t=\sigma(y_t,\dot{y}_t)z_{3t}+z_{4t}+k_3,$$

$k_i=k_i(y_t,\dot{y}_t,t,z_t)$ $(i=1,2,3)$, asymptotisch streng stationär sind.

Literatur

1. Bunke, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern. Akademie-Verlag, Berlin 1972.
2. Caughey, T. K. and Gray, A. H.: On the almost sure stability of linear dynamic systems with stochastic coefficients. Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech. 32 (1965), 365—372.
3. Infante, E. F.: On the stability of some linear non-autonomous random systems. Trans. ASME Ser. E, J. Appl. Mech. 35 (1968), p. 7—12.
4. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Наука, Москва 1969.
5. Kozin, F.: On almost sure stability of linear systems with random coefficients. J. Math. and Phys. 42 (1963), p. 59—66.
6. Tran Van Nhung: Über Lösungen asymptotisch periodischer stochastischer Systeme. (im Druck)

Tran Van Nhung
Lehrstuhl für Mathematik,
Maschinenbauingenieurfakultät
der Technischen Universität
Budapest, H-1521