ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Д. БЕДА

Кафедра Технической механики, Будапештский технический университет, H-1521 Budapest
Поступило 5 октября 1982 г.

Для исследования тела подвергающегося малой деформации служит закон сохранения массы, уравнение движения и кинематические (или геометрические) уравнения. Число неизвестных функций, основных функций, в этих уравнениях превосходит число уравнений на 6. Поэтому требуется еще 6 уравнений. Эти уравнения можно обобщить под названием закона материала.

1. Используя уравнение движения и кинематические уравнения можно показать, что если в каком-либо теле вызываем волну ускорения, то за фронтом волны $\varphi(x, y, z, t)$ обычно тело становится анизотропным. Это происходит и тогда, если тело первоначально было изотропным. Все это выявляется из нижеследующих.

Пусть будут вдоль фронта волны скачек ускорения $v\mathbf{g}$, скачек в производных тензора напряжения $\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{n}$ и в производных деформациях $\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы, $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ — симметричные тензоры второй степени. $\mathbf{n}$ — нормаль фронта волны и пусть еще будет a — скорость распространения волны, и наконец ρ — плотность массы тела. После этого условием кинематической совместимости волны ускорения является

$$-a\boldsymbol{\kappa}=v(\mathbf{gn}+\mathbf{ng}) \tag{1}$$

где векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ диадически умножены. Условием динамической совместимости волны ускорения является

$$-\rho a v\mathbf{g}=\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{n} \tag{2}$$

($\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{n}$ — скалярно умножены.)

Предположим, что единичный вектор $\mathbf{e}$ является таким, что

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{e}=\mu\mathbf{e},$$

то есть является собственным вектором тензора $\boldsymbol{\mu}$. Умножая 1. на $\mathbf{e}$ и вводя обозначения $\mathbf{e}\cdot\mathbf{g}=\cos\alpha$ и $\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}=\cos\beta$ получаем следующее выражение:

$$-a\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{e}=v(\mathbf{g}\cos\beta+\mathbf{n}\cos\alpha) \tag{3}$$

Видно, что $\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{e}$ вообще не параллельно $\mathbf{e}$, то есть $\mathbf{e}$ на является собственным вектором тензора $\mathbf{\kappa}$, и, таким образом, за фронтом волны тело обычно становится анизотропным. Из 3. также следует, что $\mathbf{\kappa}\cdot\mathbf{e}$, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{n}$ находятся в одной плоскости.

2. Закон материала принимают в различных формах, имеются предложения и для его определения [1]. Ь дальнейшем на основе до сих пор не примененного соображения, попытаемся построить общий закон материала, удовлетворяющий условию, требующему существование волны ускорения и ее ограниченное распространение [2], [3], по-прежнему учитывая только механические взаимодействия.

Принимая во внимание, что основные функции: скорость v_i, координаты тензора напряжения σ_α и координаты тензора деформации ε_α в перечисленных известных общих уравнениях фигурируют в форме первых производных по месту и времени, закон материала $F_\alpha=0$ ищем как функцию основных функций, их первых производных и координат места и времени. Пусть координатами места будут x_1, x_2, x_3, координатой времени $-x_4$; обобщая x_i. Индекс принимает значение 1, 2, 3, 4. Сопровождающий индекс $\underset{\sqcup}{\hat{q}}$ не означает суммирование. Индекс i принимает значение 1, 2, 3 и v_i является координатой скорости в прямоугольной декартовой системе координат. Индекс α принимает значение 1, 2, 3, 4, 5, 6 и означает соответствующие координаты тензоров в вышеуказанной системе координат. Введем следующие обозначение для частного производного по x_i координаты σ_α: $\dfrac{\partial\sigma_\alpha}{\partial x_i}\equiv\sigma_{\alpha i}$; обозначения частных производных по месту и времени аналогичные и в других случаях.

Пусть $\varphi(x_i)=0$ — фронт волны ускорения. В случае вектора скорости обобщенную амплитуду волны ускорения обозначим через v_i, в случае производного тензора напряжений через μ_α и в случае производного тензора деформаций κ_α. Кроме уравнения динамической и кинематической совместимости волны ускорения [4] введем условие совместимости материала. Если значение закона материала перед фронтом волны $\mathring{F}_\alpha=0$, и за фронтом волны $F_\alpha=0$, тогда уравнение совместимости материала имеет вид

$$f_\alpha\equiv F_\alpha-\mathring{F}_\alpha=0$$

Эти шесть уравнений содержат одну и ту же неизвестную функцию $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}\equiv\varphi_i$, и таким образом представляют дифференциальное уравнение фронта волны. Эта частная система дифференциальных уравнений не является линейной и только тогда можно определенно получить ту же функцию $\varphi(x_i)$, если функции f_α образуют инволютивную систему функций [5], [6]. Система функций f_α является инволютивной, если скобка Пуассона тождественно равна нулю, то есть удовлетворяется тождество [5]

$$(f_\alpha, f_\beta) \equiv 0 .$$

Из этого следует следующие общие свойства закона материала:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{\vartheta i}} - L_{i\vartheta\gamma} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon_{\gamma i}} = 0 \tag{4}$$

и при этом

$$L_{\hat{p}\vartheta\eta}\mu_{\vartheta i} + \kappa_{\eta i} = 0 , \tag{5a}$$

к чему присоединяется

$$\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{\beta i}} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathring{\sigma}_{\beta i}}\right]\mathring{\sigma}_{\beta i\hat{p}} + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon_{\beta i}} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathring{\varepsilon}_{\beta i}}\right]\mathring{\varepsilon}_{\beta i\hat{p}} +$$

$$+\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{\vartheta}} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathring{\sigma}_{\vartheta}}\right]\mathring{\sigma}_{\vartheta\hat{p}} + \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon_{\vartheta}} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathring{\varepsilon}_{\vartheta}}\right]\mathring{\varepsilon}_{\vartheta\hat{p}} + f_{\alpha\hat{p}} = 0 \tag{6}$$

И тогда является определенно инволютивной система функций, то есть существует волна ускорения, если наряду с уравнением (4)

$$L_{i\vartheta\eta}\mu_\vartheta + \kappa_\eta = 0 . \tag{5б}$$

В этом случае нет необходимости в уравнении (6). $L_{i\vartheta\eta}$ фигурирующая в уравнениях обычно является функцией основных функций, их производных и координат места-времени. Совпадающие индексы в произведении членов формул означают суммирование.

Из уравнения (6) следует, что если тело неоднородное и реономное, тогда это связано с полем начальной деформации, напряжения, или с обеими. В случае неоднородных реономных тел не можем исходить из естественного состояния см. [7] или [8]).

И наконец, одно замечание к уравнениям. Экспериментальное определение закона материала на основании уравнений (5а) и (5б) кажется возможным путем измерения фронтов волны ускорения $\varphi(x_i)$, измерения скорости распространения волны и обобщенных амплитуд волны напряжения и деформации с использованием дифференциального уравнения (4).

Резюме

Задача исследований относится к тому случаю, когда описываемое движение тела уравнения движения и геометрические уравнения недостаточны для определения 15 неизвестных функций. Недостающие шесть уравнений ищем, предполагая, что можно в

теле возбудить волну ускорений и что искомые функции содержат первые производные координат тензора напряжений и деформаций, фигурирующих уже в известных уравнениях. Во время исследований выявляется, что за фронтом волны ускорения вначале изотропное тело станет анизотропным. Можно определить и то, что искомые щесть уравнений составляют инволютивную систему функций после исправления начальных значений приближения и вследствие этого можно согласиться и с тем, что если тело анизотропное и реономное, тогда к начальной стадии относится какое-то поле напряжений или поле деформации или оба.

Литература

1. BÉDA, GY: A szilárd testek anyagtörvényei. Műszaki Tudomány 47. (1973)
2. BÉDA, GY.: Módszer a képlékeny hullám vizsgálatára. Miskolc, 1959. (Kandidátusi értekezés)
3. BÉDA, GY.: Egy képlékenységtani vizsgálat matematikai módszere. Alkalmazott Matematikai Lapok 5. (1979)
4. ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S.: Elastodynamics. Vol. 1. Academic Press, New York, London (1974)
5. KAMKE, E.: Differentialgleichungen II. kötet. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K. G. Leipzig (1956) pp. 124.
6. BÉDA, GY.: Eine Eigenschaft des möglichen Materialsgesetzes von Körpern. Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Ser. D. Natural Sciences, Vol. 33. (1978)
7. PRAGER, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart (1961)
8. BÉDA, GY., KOZÁK, I.: A klasszikus kontinuummechanika általános elmélete. Antal J.: Fizikai kézikönyv műszakiaknak. Müszaki Könyvkiadó (1980) (Könyv részlet)

Prof. Dr. Gyula BÉDA H-1521 Budapest