ÜBER EIN RANDWERTPROBLEM DES AKUSTISCHEN SCHWINGUNGSFELDES IN EINER ROHRLEITUNG

A. HOFFMANN

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 25. September 1982
Vorgelegt von Prof. Dr. T. SZENTMÁRTONY

In einer vorigen Arbeit [7] habe ich die analytische Lösung des räumlich eindimensionalen linearisierten $p(x, t)$ Druck- und $c(x, t)$ Geschwindigkeitsfeldes einer Gassäule in einer Rohrleitung unter folgenden Voraussetzungen angegeben. Das geradlinige Rohr habe die Länge $l(0 \leqq x \leqq l)$. Die Gassäule wird im Rohre an der Stelle $x=0$ mit der vorgeschriebenen (Kolben, oder Membran) Geschwindigkeit $c(0,t)=A \sin \omega t$ angeregt. Am Ende des Rohres herrsche der Druck $p(l, t)=p_0=\text{const.}$ des angekoppelten (technischen) Systems.

Zur Zeit $t=0$ sei die Geschwindigkeit der Gassäule $c(x, 0)=0$, und der Druck $p(x, 0)=p_0$.

Die Randbedingung $p(l, t)=p_0$ kann technisch nur als eine Näherung nullter Ordnung angesehen werden. Daher wollen wir im folgenden annehmen, dass sich am Ende der Rohrleitung der Rückkoppelungsdruck des angeschlossenen Systems zeitlich ändert, also durch $p(l, t)=p_0+\Delta p(t)$ dargestellt wird, wobei $\Delta p(0)=0$ ist.

Die linearisierte Eulersche Bewegungsgleichung und die Kontinuitätsbedingung ergeben das hyperbolische partielle Differentialgleichungssystem

$$L_1[c, p] \equiv \frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$L_2[c, p] \equiv \frac{\partial c}{\partial x}+\frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t}=0 \tag{1}$$

mit den Anfangs- bezw. Randbedingungen

$$c(0, t)=A \sin \omega t, \quad c(x, 0)=0$$

$$p(l, t)=p_0+\Delta p(t), \quad p(x, 0)=0 \tag{2}$$

Um zu einer (vorläufigen) technischen Übersicht zu gelangen wollen wir $\Delta p(t)$ in der speziellen Form

$$\Delta p(t)=B(\cos \nu t-1) \tag{3}$$

annehmen.

Damit ist die Bedingung $\Delta p(0)=0$ erfüllt.

Es ist also das Randwertproblem (1), (2) zu lösen.

Zum Aufbau der Lösung benutzen wir die wiederholte Anwendung des Duhamel-Prinzips. Nehmen wir die Lösung in der Form:

$$\begin{aligned} c &= c^1(x,t)+\int_0^t \varphi(\tau)c^2(x,t-\tau)\,d\tau \equiv c^1+c^* \\ p &= p^1(x,t)+\int_0^t \varphi(\tau)p^2(x,t-\tau)\,d\tau \equiv p^1+p^* \end{aligned} \tag{4}$$

an.

Die Funktionen c^1 und p^1 sollen das partielle Differentialgleichungssystem

$$L_1[c^1,p^1]=0, \qquad L_2[c^1,p^1]=0 \tag{5}$$

und die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} c^1(0,t)&=A\sin\omega t, \qquad & c^1(x,0)&=0 \\ p^1(l,t)&=p_0, & p^1(x,0)&=p_0 \end{aligned} \tag{6}$$

befriedigen. Das ist gerade das Problem, das in [7] bereits gelöst wurde.

$$\begin{aligned} c^1(x,t) &= A\left[\left(\cos\frac{\omega}{a}x+\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l\sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t+\right. \\ &\quad \left.+\frac{2\omega a}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega_n}{a}x\sin\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2}\right] \\ p^1(x,t) &= p_0+\rho a A\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l\cdot\cos\frac{\omega}{a}x-\sin\frac{\omega}{a}x\right)\cos\omega t+\right. \\ &\quad \left.+\frac{2\omega a}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\omega_n}{a}x\cdot\cos\omega_n t}{\omega^2-\omega_n^2}\right] \end{aligned} \tag{6a}$$

mit

$$\omega_n=\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)a\frac{\pi}{l}$$

Die Funktionen

$$c^*(x,t)=\int_0^t \varphi(\tau)c^2(x,t-\tau)\,d\tau, \quad p^*(x,t)=\int_0^t \varphi(\tau)p^2(x,t-\tau)\,d\tau \tag{7}$$

müssen also die Lösungen der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L_1[c^*, p^*] &= 0, & L_2[c^*, p^*] &= 0 \\ c^*(0, t) &= 0, & c^*(x, 0) &= 0 \\ p^*(l, t) &= B(\cos \nu t - 1) & p^*(x, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

sein.

Diese Randwertaufgabe geht aber für die Funktionen c^2, p^2 in die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L_1[c^2, p^2] &= 0 & L_2[c^2, p^2] &= 0 \\ c^2(0, t) &= 0, & c^2(x, 0) &= 0 \\ p^2(l, t) &= -\rho a A \sin \omega t, & p^2(x, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

über.

Das problem (9) wird nun weiter zerlegt. Wir setzen

$$c^2 = c_1^2(x, t) + c_2^2(x, t), \quad p^2 = p_1^2(x, t) + p_2^2(x, t) \tag{10}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} L_1[c_1^2, p_1^2] &= 0, & L_2(c_1^2, p_1^2) &= 0 \\ c_1^2(0, t) &= A(1 - \cos \omega t), & c_1^2(x, 0) &= 0 \\ p_1^2(l, t) &= -\rho a A \sin \omega t, & p_1^2(x, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

sowie

$$\begin{aligned} L_1[c_2^2, p_2^2] &= 0, & L_2[c_2^2, p_2^2] &= 0 \\ c_2^2(0, t) &= A(\cos \omega t - 1), & c_2^2(x, 0) &= 0 \\ p_2^2(l, t) &= 0, & p_2^2(x, 0) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Die Funktionen c_2^2, p_2^2 werden mit Hilfe der bereits bekannten Funktionen c^1, p^1 (6a) hergestellt.

$$\begin{aligned} c_2^2 &= \int_0^t \psi(\tau) c^1(x, t-\tau)\, d\tau \\ p_2^2 &= \int_0^t \psi(\tau) [p^1(x, t-\tau) - p_0]\, d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

Das Randwertproblem (12) führt zu der Lösung der Integralgleichung vom Faltungstypus

$$c_2^2(0, t) = \int_0^t \psi(\tau) c^1(0, t-\tau)\, d\tau = A \int_0^t \psi(\tau) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= A(\cos \omega t - 1)$$

aus der $\psi(\tau) = -\omega$ folgt.

So ist nach (13)

$$c_2^2 = A\left[\left(\cos\frac{\omega}{a}x + \operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l\cdot\sin\frac{\omega}{a}x\right)(\cos\omega t - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega^2 a}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega_n}{a}x\cdot(\cos\omega_n t - 1)}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\right] \tag{14}$$

$$p_2^2 = -\rho a A\left[\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}\, l\cdot\cos\frac{\omega}{a}x - \sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{2\omega^2 a}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\omega_n}{a}x\cdot\sin\omega_n t}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}\right]$$

Nun kommen wir auf die Lösung der Randwertaufgabe (11) zurück. Nehmen wir die Funktionen c_1^2 und p_1^2 in der Form

$$c_1^2 = \int_0^t \chi(\tau)\bar{c}_1^2(x, t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad p_2^2 = \int_0^t \chi(\tau)\bar{p}_1^2(x, t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{15}$$

an, wo die Funktionen $\bar{c}_1^2$ und $\bar{p}_1^2$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} &L_1[\bar{c}_1^2, \bar{p}_1^2] = 0, && L_2[\bar{c}_1^2, \bar{p}_1^2] = 0 \\ &\bar{c}_1^2(0, t) = A\sin\omega t, && \bar{c}_1^2(x, 0) = 0 \\ &\bar{p}_1^2(l, t) = -\rho a A\cos\omega t, && \bar{p}_1^2(x, 0) = 0, \quad (x \neq l) \end{aligned} \tag{16}$$

befriedigen sollen. Die Lösung von (15) ergibt nach der bereits bekannten Methode:

$$\bar{c}_1^2 = A\left[\left(\cos\frac{\omega}{a}x + \left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l - \frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}\right)\sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}\bar{k}_{n2}\sin\frac{\omega_n}{a}x\cdot\sin\omega_n t\right]$$

$$\bar{p}_1^2 = \rho a A\left[\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l - \frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}\right)\cos\frac{\omega}{a}x - \sin\frac{\omega}{a}x\right)\cos\omega t - \right. \tag{17}$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty}{}'\,\bar{k}_{n2}\cos\frac{\omega_n}{a}x\cdot\cos\omega_n t\right]$$

Aus (17) können die Funktionen c_1^2 und p_1^2 bestimmt werden, wenn die Integralgleichung vom Faltungstypus

$$p_1^2(l,t)=\int_0^t \chi(\tau)\bar{p}_1^2(l,t-\tau)\,d\tau=-\rho aA\int_0^t \chi(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau=$$
$$=-\rho aA\sin\omega t$$

gelöst wird. Diese Lösung ist $\chi(\tau)=\omega$.
Damit ist

$$c_1^2=A\left[\left(\cos\frac{\omega}{a}x+\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l-\frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}\right)\sin\frac{\omega}{a}x\right)(1-\cos\omega t)-\right.$$
$$\left.-\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{k}_{n2}}{\omega_n}\sin\frac{\omega_n}{a}x\cdot(1-\cos\omega_n t)\right]$$
$$p_1^2=\rho aA\left[\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{a}l-\frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l}\right)\cos\frac{\omega}{a}x-\sin\frac{\omega}{a}x\right)\sin\omega t-\right.$$
$$\left.-\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{k}_{n2}}{\omega_n}\cos\frac{\omega_n}{a}x\cdot\sin\omega_n t\right] \tag{18}$$

Unter Anwendung der Funktionen (14) und (18) erhält man die Funktionen

$$c^*=\int_0^t \varphi(\tau)c^2(x,t-\tau)\,d\tau,\quad p^*=\int_0^t \varphi(\tau)p^2(x,t-\tau)\,d\tau \tag{19}$$

Für die Bestimmung von $\varphi(\tau)$ ergibt sich die Integralgleichung vom Faltungstypus

$$p^*(l,t)=\int_0^t \varphi(\tau)p^2(l,t-\tau)\,d\tau=$$
$$=-\rho aA\int_0^t \varphi(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau=B(\cos\nu t-1) \tag{20}$$

aus der

$$\varphi(\tau)=\frac{B}{\rho aA}\left(\omega+\frac{\nu^2-\omega^2}{\omega}\cos\nu\tau\right). \tag{21}$$

Wenn $\nu=\omega$, so ist $\varphi(\tau)=\dfrac{B\omega}{\rho aA}$.

Mit der Funktion (21) ergeben sich aus der Bestimmungsgleichungen die Funktionen (19):

$$c^* = \frac{B}{\rho a}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\left(\frac{\omega}{\nu}\sin\nu t - \omega t\right) + \right.$$

$$+\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{\omega_n}\sin\frac{\omega_n}{a}x\left(\frac{1}{\omega(\nu^2-\omega_n^2)}\left(\frac{\nu^2(\omega^2-\omega_n^2)}{\omega_n}\sin\omega_n t + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\omega_n^2(\nu^2-\omega^2)}{\nu}\sin\nu t\right) - \omega t\right)\right]$$

$$p^* = B\left[\frac{\cos\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}(\cos\nu t - 1) - \right.$$

$$-\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{\omega_n}\cos\frac{\omega_n}{a}x\left(\frac{\omega}{\omega_n} + \frac{1}{\omega(\omega_n^2-\nu^2)}\left(\frac{\nu^2(\omega^2-\omega_n^2)}{\omega_n}\cos\omega_n t + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \omega_n(\nu^2-\omega^2)\cos\nu t\right)\right)\right]$$

$p^*(x, 0) = 0.$

Zur Bestimmung der Koeffizienten K_n wird die Differentialgleichung

$$L_2[c^*, p^*] = 0$$

benutzt, nach der

$$\frac{\cos\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l} + \sum_{n=0}^{\infty} K_n\cos\frac{\omega_n}{a}x = 0$$

$$0 \leqq x \leqq l, \quad \frac{\omega_n}{a} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l},$$

und daraus folgt.

$$K_n = (-1)^n\frac{2a}{l}\frac{\omega_n}{\omega^2-\omega_n^2},$$

Bei $\nu=\omega$ erhält man die Lösung

$$c^*=\frac{B\omega}{\rho a}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-t\right)+\omega\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{\omega_n}\sin\frac{\omega_n}{a}x\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}-t\right)\right]$$

$$p^*=B\left[\frac{\cos\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}(\cos\omega t-1)-\omega^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{\omega_n^2}\cos\frac{\omega_n}{a}x\cdot(1-\cos\omega_n t)\right]$$

bezw.

$$c^*=\frac{B\omega}{\rho a}\left[\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-t\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2a\omega}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{\omega_n}{a}x}{\omega^2-\omega_n^2}\left(\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}-t\right)\right]$$

$$p^*=B\left[\frac{\cos\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}(\cos\omega t-1)-\frac{2a\omega^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\omega_n}{a}x}{\omega_n(\omega^2-\omega_n^2)}(1-\cos\omega_n t)\right]$$

$$\omega_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)a\frac{\pi}{l}$$

Als Beispiel seien

$l=5$ m	$\omega=400\ \mathrm{s}^{-1}$
$a=340$ m/s	$p=110\,000$ Pa
$\rho=1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$	$A=10$ m
t s,	x m

x	t	$\frac{c^1}{a}$	$\frac{c^*}{a}$	$\frac{p^1}{p_0}$	$\frac{p^*}{p_0}$
x	0	0	0	0	0
0	1	$-2{,}5\cdot10^{-3}\,A$	0	$9{,}05\cdot10^{-1}$	$1{,}5\cdot10^{-5}\,B$
5	1	$-2{,}7\cdot10^{-3}\,A$	$3{,}5\cdot10^{-4}\,B$	1	$1{,}4\cdot10^{-5}\,B$

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist die Verallgemeinerung des im Beitrag [7] gelösten Randwertproblems. Die Verallgemeinerung des Randwertproblems besteht darin daß am offenen Rohrende ein zeitlich periodischer Druck vorgeschrieben wird.

Das mathematische Modell des Problems ist ein partielles Differentialgleichungssystem mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen. Die Lösung beruht auf die wiederholte Anwendung des Duhamel-Prinzips und der sehr einfachen Integralgleichungen von Faltungstypus.

Das Schwingungsfeld ergibt sich als Summe der Lösungen des „klassischen" Randwertproblems ($p(l, t) = p_0$) und die des Korrektionsgliedes.

Literatur

1. SKUDRZYK, E.: Die Grundlagen der Akustik, Springer, Wien, 1954.
2. ZIEREP, J.: Theoretische Gasdynamik 1. G. Braun, Karlsruhe, 1972.
3. MORSE, PH. M.—INGARD, K. U.: Theoretical Acoustics, McGraw Hill, N. Y. — London, 1968.
4. GOLDSTEIN, M. E.: Aeroacoustics, McGrawe Hill, N. Y. — London, 1976.
5. SZENTRMÁRTONY, T.: Folyadékok mechanikája I (Mechanik der Flüssigkeiten), Manuskript, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
6. SAUER, R.—SZABÓ, I.: Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs II Springer, Berlin—Heidelberg, N. Y., 1969.
7. HOFFMANN, A. FÉNYES, T.: Rechenverfahren zur Untersuchung von Wellenerscheinungen in Rohrleitungen. Periodica Polytechnica Mech. Eng. 26/1, 1982.

Dr. Andor HOFFMANN, H-1521 Budapest