ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ

Е. Н. БЕЗВЕСИЛЬНАЯ

Киевский политехнический институт

Поступило 25 сентября 1982 г.

Представлено проф. д-р. О. Петрик

Решим задачу об устойчивости измерителя линейных ускорений (ИЛУ), представляющего собой тяжелый симметричный гироскоп в трехстепенном кардановом подвесе с вертикально расположенной осью вращения наружной рамки. Центр масс подвижной части прибора смещен относительно оси кожуха гиромотора на величину l (рис. 1). Ориентация главной оси ИЛУ в земной системе координат обеспечивается системами горизонтальной и азимутальной коррекции, осуществляемыми от гировертикали (ГВ) и гирокомпаса (ГК) с помощью электрических датчиков угла (ДУ) и датчиков момента (ДМ), имеющих пропорциональные характеристики.

Введем следующие системы координат (рис. 2): $Oxyz$-жестко связанную с объектом; $Ox_iy_iz_i$, $i=1,2,3$-с наружной ($i=1$), внутренней ($i=2$) рамками и ротором ($i=3$). Обозначим α, β, γ-углы поворота гироскопа.

Запишем проекции угловых скоростей элементов гироскопа на оси, связанные с наружной, внутренней рамками и ротором в виде

$$\omega_{x1}=\omega_x\cos\alpha+\omega_y\sin\alpha; \qquad \omega_{x2}=\dot\beta+\omega_{x1};$$

$$\omega_{y1}=\omega_y\cos\alpha-\omega_x\sin\alpha; \qquad \omega_{y2}=\omega_{z1}\sin\beta+\omega_{y1}\cos\beta;$$

$$\omega_{z1}=\dot\alpha+\omega_z; \qquad \omega_{z2}=\omega_{z1}\cos\beta-\omega_{y1}\sin\beta;$$

$$\omega_{x3}=\omega_{x2}\cos\gamma-\omega_{z2}\sin\gamma;$$

$$\omega_{y3}=\omega_{y2}+\dot\gamma;$$

$$\omega_{z3}=\omega_{z2}\cos\gamma+\omega_{x2}\sin\gamma. \tag{1}$$

Учтем следующие тождества:

$$\frac{\partial\omega_{x1}}{\partial\alpha}=\omega_{y1}; \quad \frac{\partial\omega_{y1}}{\partial\alpha}=-\omega_{x1}; \quad \frac{\partial\omega_{z1}}{\partial\alpha}=1; \quad \frac{\partial\omega_{x1}}{\partial\omega_x}=\cos\alpha; \quad \frac{\partial\omega_{y1}}{\partial\omega_y}=\cos\alpha. \tag{2}$$

Для составления дифференциальных уравнений движения ИЛУ воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента [2]

$$\frac{\tilde{d}\bar{k}_i}{dt} + \bar{\omega}_i \times \bar{k}_i = \bar{M}_i - [m\bar{\rho} \times \bar{w}]_i . \qquad (3)$$

Здесь $\bar{k}_i$ $(i=1,2,3)$-кинетический момент i-го тела подвижной системы ИЛУ относительно центра масс 0;• $\bar{\omega}_i$-угловая скорость переносного

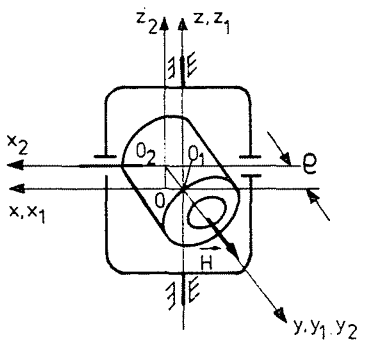

Рис. 1

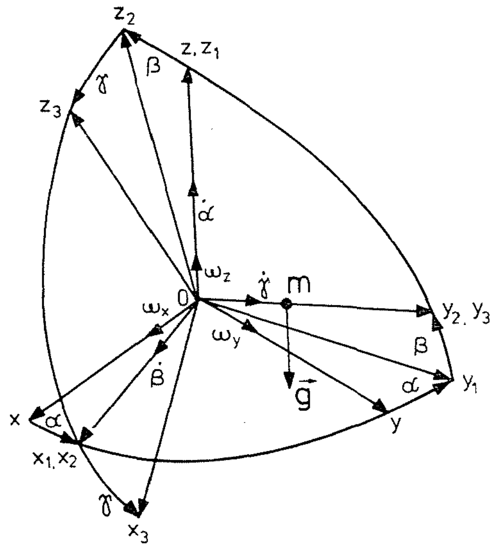

Рис. 2

движения подвижной системы координат; $\bar{M}_i$-главный момент внешних сил, приложенных к системе относительно центра масс 0; $\bar{\rho}$ $(0, l, 0)$-смещение относительно точки 0; $\bar{w}_i$-линейное ускорение объекта.

Затем по известной методике [3] получим дифференциальные уравнения движения исследуемого ИЛУ. Опустив промежуточные выкладки, запишем эти уравнения движения в конечном виде

$$\alpha(p) = [(Bp^2 + n_2 p)M_{\text{п}1} + (Hp + k_1)(mlg - M_{\text{п}2})]\Delta^{-1} ;$$
$$\beta(p) = [(Ap^2 + n_1 p)(M_{\text{п}2} - mlg) + (Hp + n_2)M_{\text{п}1}]\Delta^{-1} ; \qquad (4)$$

где

$$\Delta = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 ; \quad a_0 = AB ; \quad a_1 = Bn_1 + An_2 ;$$
$$a_2 = H^2 + n_1 n_2 ; \quad a_3 = H(k_1 + k_2) ; \quad a_4 = k_1 k_2 .$$

В системе уравнений (4) α, β-углы поворота гироскопа относительно осей наружной, внутренней рамок; H — кинетический момент гироскопа; A, B — моменты инерции; n_1, n_2 — коэффициенты сил вязкого трения; k_1, k_2 — передаточные коэффициенты каналов коррекции и измерения, действующие по осям подвеса гироскопа; — маятниковый момент; $M_{п1}, M_{п2}$ — моменты-помехи, действующие по осям подвеса гироскопа; $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования.

В соответствии с критерием Гурвица, для обеспечения устойчивости рассматриваемой системы необходимо, чтобы

$$a_i > 0\,, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 4)\,;$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0\,; \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0\,. \tag{5}$$

Как видно из (4) и (5), устойчивость ИЛУ определяется параметрами H, A, B, k_1, k_2, n_1, n_2. Для изучения влияния конструктивных параметров прибора на его устойчивость, построим области устойчивости для некоторых из параметров.

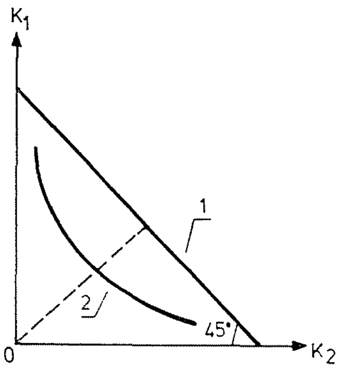

Рис. 3

Перепишем условия устойчивости (5) длв коэффициентов k_1 и k_2 в следующем виде:

$$k_1 + k_2 < a_1 a_2 (a_0 H)^{-1}\,;$$

$$k_1 k_2 < (k_1 + k_2) H [a_1 a_2 - a_0 H (k_1 + k_2)] a_1^{-2}\,. \tag{6}$$

Решим систему неравенств (6) графически (см. рис. 3), где график первого уравнения системы (5) есть) прямая (прямая 1), а второго-гипербола (кривая 2).

При $k_1 = k_2 = k$ неравенства (6) примут вид

$$k < 2Ha_1a_2(4a_0H^2,)^{-1};$$

$$k < 2Ha_1a_2(a_1^2 + 4a_0H^2)^{-1}. \qquad (7)$$

Из системы неравенств (7) очевидно, что второе неравенство является более строгим, т.е. область устойчивости будет определяться гиперболой. С учетом выражений для a_0, a_1, a_2 ясно, что расширения области устойчивости по к необходимо увеличивать A, B, n_1, n_2 и уменьшать H, что может провести к снижению точности.

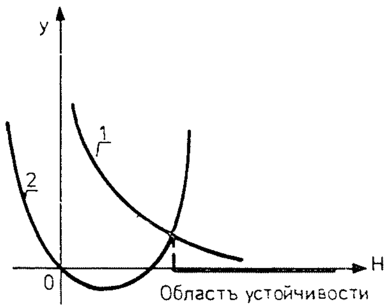

Рис. 4

Запишем условия устойчивости (5) для кинетического момента H

$$a_1(H^2 + n_1n_2) - a_0H(k_1 + k_2) > 0;$$

$$H(k_1 + k_2)[a_1(H^2 + n_1n_2) - a_0H(k_1 + k_2)] - a_4a_1^2 > 0. \qquad (8)$$

Из системы неравенств (8) видно, что второе неравенство является более строгим. Полагаем, что первое неравенство выполняется. Тогда условие устойчивости может быть записано в форме

$$fH^3 - rH^2 + zH - g > 0, \qquad (9)$$

где $f = a_1(k_1 + k_2)$; $r = a_0(k_1 + k_2)^2$; $z = a_1(k_1 + k_2)n_1n_2$; $g = a_4a_1^2$.

Переписав (9) в виде

$$fH^2 - rH + z > g \cdot H^{-1}, \qquad (10)$$

решим неравенство (10) графически (см. рис. 4), где кривая 1 соответствует уравнению $y = gH^{-1}$, кривая 2 — $y = fH^2 - rH + z$.

Из (10) очевидно, что расширению области устойчивости по H способствует рост передаточных коэффициентов каналов коррекции, измерения (k_1, k_2) и уменьшение коэффициентов сил вязкого трения (n_1, n_2).

Условия устойчивости (5) по параметрам n_1 и n_2 в частном случае $n_1=n_2=n$ имеют вид

$$n^3-a_4a_3^{-1}(A+B)n^2+H^2n-a_0a_3(A+B^{-1})>0\,. \tag{11}$$

Перепишем (10) в форме

$$n^2-a_4a_3^{-1}(A+B)n+H^2>a_0a_3(A+B^{-1})n^{-1}\,. \tag{12}$$

Это неравенство также решаем графически (см. рис. 5), где кривая 1 соответствует уравнению $y=a_0a_3[(A+B)n]^{-1}$, а кривая 2 соответствует — $y=n^2-a_4a_3^{-1}(A+B)n+H^2$. Получим область устойчивости по параметру n.

Условия устойчивости (5) для параметров A и B могут быть записаны

$$a_3a_2(Bn_1+An_2)-a_3^2AB-a_4(Bn_1+An_2)^2>0\,. \tag{13}$$

Приняв $A=B$, из (13) легко получим область устойчивости по параметру A

$$A<a_2a_3(n_1+n_2)[a_4(n_1+n_2)^2+a_3]^{-1}\,. \tag{14}$$

Если в рассмотренных случаях не принимать упрощений типа $k_1=k_2$; $n_1=n_2$ и $A=B$, то тогда можно исследовать устойчивость по одному параметру, а другой задавать.

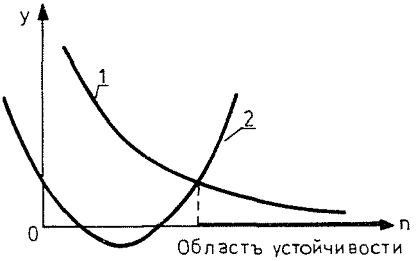

Рис. 5

Рассмотрим устойчивость системы для следующих значений параметров [1] ИЛУ:

$$H=2\cdot10^{-2}\text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с};\; n_1=n_2=5\cdot10^{-4}\text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с};$$

$$k_1=k_2=5\cdot10^{-2}\text{ Н}\cdot\text{м};\quad A=B=0.55\cdot10\text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2.$$

Условия устойчивости (5) примут вид

$$\begin{cases}2kH[2An(H^2+n^2)-2kHA^2]-4A^2n^2>0\,;\\ 2An(H^2+n^2)-2kHA^2>0\end{cases}$$

или

$$Ak < Hn;$$

$$Ak < nH^2 + n^2)H^{-1}. \qquad (15)$$

Очевидно, что первое неравенство системы (15) более строгое. Таким образом, условие устойчивости ИЛУ может быть записано в форме

$$Ak < Hn.$$

ИЛУ будет сохранять устойчивость при значениях параметров, лежащих в следующих областях: $A < 2 \cdot 10^{-4}$ Н · м · с^2; $K < 18 \cdot 10^{-2}$ Н · м; $n > 1{,}38 \cdot 10^{-4}$ Н · м · с; $H > 0{,}55 \cdot 10^{-2}$ Н · м · с.

Сравнив эти значения с заданными значениями параметров, можно сделать вывод, что прибор находится достаточно далеко от границы устойчивости.

Резюме

В статье решается задача об устойчивости измерителя линейных ускорений, представляющего собой тяжелый симметричный гироскоп в трехстепенном кардановом подвесе с вертикально расположенной осью вращения наружной рамки. Приводится уравнение движения и решается задача об устойчивости прибора. Основные положения иллюстрированы численным примером.

Литература

1. Арутюнов С. С. Систамтические погрешности маятниковых акселерометров, обусловленных вибрацией основания. — «Известия вузов. Приборостроение», 1968, № 4, с. 104—108.
2. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963, 482 с.
3. Лунц Я. Л. Ошибки гироскопических приборов. Л., «Судостроение», 1968, 230 с.

Безвесильная Елена Николаевна доцент
Киевский политехнический институт
252056 Киев-56, Брест-Литовский проспект 39. Кафедра приборов точной механики