

ALLGEMEINE LÖSUNG VON OPTIMALPROBLEMEN IN DER FERTIGUNGSGESTALTUNG SPANENDER PROZESSE MITTELS DES LAGRANGESCHEN MULTIPLIKATORS

Von

H. J. JACOBS*, M. HORVÁTH und I. MÉSZÁROS

Lehrstuhl für Fertigungstechnik, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 12. Oktober 1980

1. Problemstellung

Die bisher vorliegenden Lösungen zur Polyoptimierung fertigungstechnischer und fertigungsorganisatorischer Prozeßparameter der spanenden Teilefertigung erfordern entweder ein graphisches oder ein iteratives Vorgehen [1], [2], [3], [7].

Auch die für diesen Zweck entwickelten Rechnerprogramme enthalten einen speziellen iterativen Weg, d. h., bei Anwendung der Optimierregel für Serienfertigung nach [4] und [1] ist keine explizite Darstellung der Kompromißwerte für jede Arbeitsstufe eines Arbeitsganges, z. B. für die Schnittgeschwindigkeit, im allgemeinen Fall möglich.

Die in [7] veröffentlichte Lösung, die auch auf der Lösung mittels des Lagrangeschen Multiplikators basiert, ist nicht zu verallgemeinern:

— bei der Formulierung der Optimierungsstrategie verwendet sie für die Verfahrensoptimierung (als Primäroptimierung) und für Prozeßoptimierung (als Sekundäroptimierung) gleiche Kostenzielfunktionen;

— bei der Zeitzielfunktion betrachtet sie nur die Maschinengrundzeit als relevanten Teil der die Schnittwerte beeinflussenden Zeiten;

— diese Lösung führt zu keiner allgemeinen Lösung des Problems Prozeßoptimierung.

Im folgenden soll untersucht werden, ob durch Anwendung des Lagrangeschen Multiplikators [5], der in der Mathematik zur Lösung von Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher bei Beachtung von Nebenbedingungen benutzt wird und sich deshalb auch zur Lösung von Aufgaben der technologischen Optimierung eignet, eine allgemeine mathematische Lösung möglich ist. Weiterhin soll auch untersucht werden, ob die neuentwickelte Optimierungsregel auch so darstellbar ist. Damit soll eine Erweiterung des Erkenntnisstandes zur Fertigungsgestaltung mittels mathematischer Modelle erreicht werden.

* Technische Universität Dresden

2. Aufgabenformulierung

Abzuleiten ist die analytische Darstellung der optimalen Standzeiten T für die Arbeitsstufen eines definierten Arbeitsganges bzw. Arbeitsplatzes mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikators. Dabei sind in Fortführung der Untersuchung in [2] die aktuellen technischen Lösungsfelder für die hinsichtlich Fertigungsaufgabe und Fertigungsmittel definierten Arbeitsstufen gegeben. Auf dieser Grundlage ist ein einfaches und übersichtliches Iterationsverfahren zu entwickeln.

Abzuleiten ist weiterhin die analytische Darstellung der Schnittgeschwindigkeiten v für die Arbeitsstufen eines definierten Arbeitsganges mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikators. Es ist zu untersuchen, ob auf dieser Weise einfachere Lösungen erhalten werden können.

Schließlich ist zu beweisen, daß die mittels des Lagrangeschen Multiplikators entwickelte Methode dieselben Ergebnisse bringt, wie die graphische Methode [1] mit der Anwendung der Optimierregel für Serienfertigung.

3. Grundtypen für technische Lösungsfelder

Die effiziente Zielkurve einer Polyoptimierung [6] liegt für die Belange der Parameterbestimmung in der spanenden Teilefertigung zwischen den Minima der Kosten- und Zeitzielfunktionen für eine Arbeitsstufe (Bild 1). Durch das Lösungsfeld wird diese Zielkurve weiter begrenzt. Dies ist bei Anwendung der Optimierregel für Serienfertigung zu beachten.

Folgendes wird vereinbart:

1. Die Lösungsfälle 5, 6 und 7 für Lage und Form des technischen Lösungsfeldes nach [2] werden, ihrer praktischen Häufigkeit entsprechend, vernachlässigt. Als optimaler Vorschub gilt im allgemeinen der maximal mögliche. Die nach [2] verbleibenden 4 Lösungsfälle werden, den Belangen der Prozeßoptimierung entsprechend, zusammengefaßt und durch die Restriktion „Spanform“ beim Drehen erweitert, so daß sich wiederum 4 Fälle ergeben.

2. Die untersuchten Restriktionen berücksichtigen die Gegebenheiten beim Drehen und Fräsen. Die algebraische Vorgehensweise ist jedoch auf weitere Fertigungsverfahren der Spannungstechnik übertragbar.

Bild 2 zeigt die vereinbarten Lösungstypen mit den Steuervariablen und ihren möglichen Stellbereichen sowie die zugeordneten Restriktionen. Die Lösungstypen 2 und 4 lassen die Anwendung der Optimierregel für Serienfertigung bei Kapazitätsüberschreitung [3] in der Form

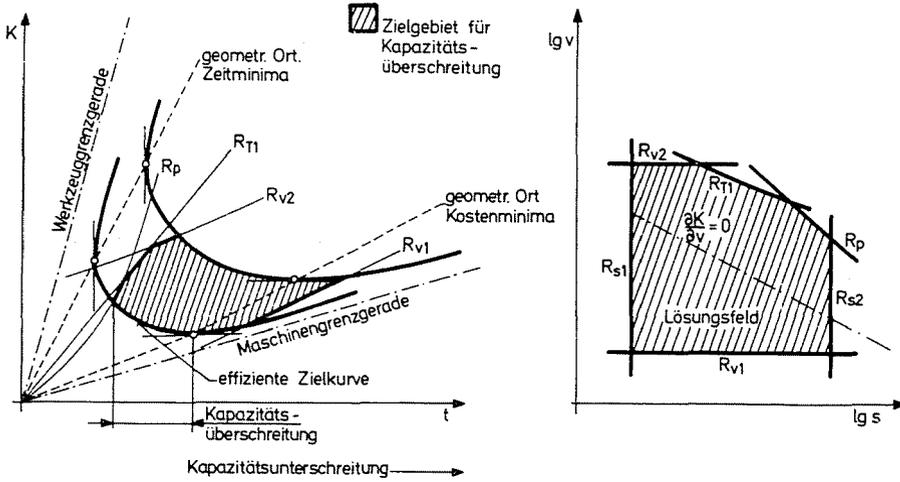


Abb. 1. Aktuelles Zielgebiet und Lösungsfeld für Arbeitsstufen der spanenden Teilefertigung
 Kurzzeichenerläuterungen siehe Abb. 2

$$\frac{dK_i}{dt_i} = \frac{d \sum_{i=1}^m K_i}{d \sum_{i=1}^m t_i} \quad (1)$$

nicht zu.

Dabei bedeuten:

- m – Arbeitsstufenzahl
 - K_i – Kostenzielfunktion
 - t_i – Zeitfunktion
- } der Arbeitsstufe

Für Arbeitsstufen mit den Indizes k und r sind die Schnittpunkte im Sinne der genannten Optimierregel nicht mehr beeinflussbar. Die Form des Lösungsfeldes läßt keine Wertminderung der Zielfunktionen t_k und t_r zu, wie das bei Kapazitätsüberschreitung erforderlich wäre. Alle weiteren Betrachtungen wenden sich ausschließlich dieser Kapazitätslage zu. Für Kapazitätsunterschreitung liegt eine befriedigende Lösung nach [2] und [3] vor. Beide Kapazitätslagen sind in Bild 1 mit eingezeichnet.

4. Bestimmung des aktuellen Kompromißgebietes im Kosten—Zeit-Feld für einen Arbeitsplatz

Die Anwendung der Gleichung (1) zur Bestimmung von Prozeßparametern bei vorgegebenem, effektivem Maschinenzeitfonds pro Teil t_{Meff} ist nach Abschnitt 3 nur für die Lösungstypen 1 und 3 möglich.

Das erfordert, wie bereits in [3] erkennbar, eine Korrektur der fertigungsorganisatorischen Restriktion [6].

$$\sum_{i=1}^m t_i = t_{Meff} \quad (2)$$

Die wegen der Lösungsfeldform nach Bild 2 bereits festliegenden Werte für die Zeitzielfunktionen t_k und t_r sind aus den Betrachtungen zur Gleichung (1) zu eliminieren.

Damit lautet die aktualisierte Nebenbedingung nach Gleichung (2) nunmehr (Bild 2)

$$\sum_{j=1}^{m_1} t_j + \sum_{p=1}^{m_3} t_p = t_{Meff} - \left(\sum_{k=1}^{m_2} t_k + \sum_{r=1}^{m_4} t_r \right) \quad (3)$$

$$\text{mit} \quad m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = m \quad (4)$$

Die Werte für t_k und t_r sind also vor Anwendung der Optimierregel zu berechnen, nachdem die Lösungsfelder für jede Arbeitsstufe bekannt sind.

Die Bestimmung des infolge technischer Restriktionen noch vorhandenen aktuellen Kompromißgebietes in der Kosten—Zeit-Kurve für den betrachteten Arbeitsplatz in Zuordnung zum Wert für

$$t_{Meff} - \left(\sum_{k=1}^{m_2} t_k + \sum_{r=1}^{m_4} t_r \right)$$

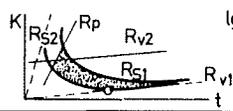
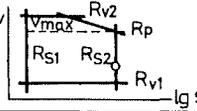
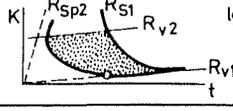
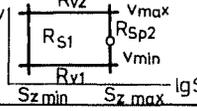
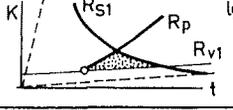
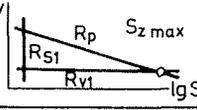
erfolgt unter Berücksichtigung der Kompromißbeschränkungen in den Arbeitsstufen $m - (m_2 + m_4)$.

Für die Bestimmung der optimalen Werte gilt das durch folgenden Ungleichung gekennzeichnete Kompromißgebiet als Bedingung

$$\sum_{i=1}^{m_1+m_3} t_{oi} \leq t_{Meff} - \left(\sum_{k=1}^{m_2} t_k + \sum_{r=1}^{m_4} t_r \right) \leq \sum_{i=1}^{m_1+m_3} t_{oti} \quad (5)$$

dabei sind:

- t_{oti} — zeitoptimale Bearbeitungszeit für die i -te Arbeitsstufe
- t_{oi} — kostenoptimale Bearbeitungszeit für die i -te Arbeitsstufe.

Typ.	Steuervariable	Stellbereich der Steuervariablen im aktuellen Zielgebiet	Restriktion	Zeitzielfunktion und Änderungsmöglichkeiten	Graphik (Beispiele) Wirtschaftlichkeit - Produktivität	Stellbereich der Steuervariablen
1	Schnittgeschw. v	$R_{v1} \leq v \leq v_{max}$ $S = R_{S2}$	R_{S2} m_1 Arbeitsstufen 	$t_j \uparrow \downarrow$ m_1 Arbeitsstufen 		
2	Schnittgeschw. v	$v = v_{max}$ $S = R_{S2}$				
3	Schnittgeschw. v Vorschub S_z bei $R_{Sp2} = konst.$	$v_{max} \geq v \geq v_{min}; S_{max} \geq S \geq S_{min}$ $v_{max}; S_{max}$ durch Schnitt v. R_{Sp2} mit R_{v2} oder R_{T1} oder R_p oder R_{u2} $v_{min}; S_{min}$ durch Schnitt von R_{Sp2} mit R_{v1}	R_{Sp2}	$t_p \downarrow \uparrow$ m_3 Arbeitsstufen 		
4	Schnittgeschw. v Vorschub S_z bei $R_p = konst.$ oder $R_{T1} = konst.$ oder $R_{u2} = konst.$ oder	$v = R_{v1}; S = S_{max}$ $S_{max} = \min \left\{ \frac{R_p}{R_{v1}} \frac{1}{1+K}; \left(\frac{R_{T1}}{R_{v1} A_2} \right)^{\frac{1}{A_4}}; \frac{R_{u2}}{R_{v1}} \right\}$	R_p R_{T1} R_{u2}	$t_r \uparrow$ m_4 Arbeitsstufen 		

Effektiver Maschinenzeitfonds für den betrachteten Arbeitsplatz $T_{Meff} = \frac{m_1}{\sum} t_j + \frac{m_2}{\sum} t_k + \frac{m_3}{\sum} t_p + \frac{m_4}{\sum} t_r$; $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

Kostenzielfunktion pro Arbeitsstufe $K = K_L \cdot t_{Gm} + \frac{t_{Gm}}{T} K_w'$

Zeitzielfunktion $t = t_{Gm} + \frac{t_{Gm}}{T} t_w$

K_L = zeitbezogene Lohnkosten
 K_w' = Werkzeugkosten
 t_{Gm} - Grundzeit; T - Standzeit; t_w - Werkzeugwechselzeit

Restriktionen: (C_2 - Exponent der Spanformgleichung; K_2 - Exponent der Spanungskraftgleichung; A_2, A_4 - Exponent der Standzeitgleichung)

Minim. Vorschub $R_{S1} \leq S_z$ Spanformklasse 6 $R_{Sp2} \leq v \cdot S_z^{C_2}$
 Max. Vorschub $R_{S2} \geq S_z$ Maschinenleistung $R_p \leq v \cdot S_z^{1+K_2}$
 Min. Schnittgeschw. $R_{v1} \leq v$ Min. Standzeit $R_{T1} \leq v \cdot A_2^{A_4}$
 Max. Schnittgeschw. $R_{v2} \geq v$ Max. Vorschubgeschwindigkeit $R_{u2} \leq v \cdot s$

Abb. 2. Aktuelle Zielgebiete für das Kosten-Zeit Feld von Arbeitsstufen mit Dreh- bzw. Fräseroperationen

5. Bestimmung der optimalen Standzeit mittels des Lagrangeschen Multiplikators

Das Hauptziel der Prozeßoptimierung in der Serienfertigung ist, minimale Fertigungskosten zu erreichen, wobei die Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^m t_i = t_{Meff} \quad (6)$$

erfüllt sein muß. Dabei ist

t_i – Bearbeitungszeit für die i -te Arbeitsstufe.

Die zu minimierende Kostenzielfunktion lautet explizit [2]

$$K(v_i, s_i, T_i) = \sum_{i=1}^m \frac{F_{1i}}{v_i s_i} \left(1 + \frac{F_{2i}}{T_i} \right) \quad (7)$$

wobei

$$T_i = A_{3i} v_i^{A_{2i}} s_i^{A_{4i}} \quad (8)$$

F -Verfahrensfaktoren:

z. B. gelten für Drehen:

$$F_{1i} = K_L \cdot \pi \cdot l_i d_i$$

$$F_{2i} = t_{wzi} + \frac{K_{wi}}{K_L}$$

l_i – Vorschubweglänge

d_i – Drehdurchmesser

und für Fräsen

$$F_{1i} = \frac{K_L \cdot \pi \cdot l_i \cdot d_{wzi}}{z_i}$$

$$F_{2i} = t_{wzi} + \frac{K_{wi}}{K_L}$$

d_{wzi} – Werkzeugdurchmesser

z_i – Werkzeugschneidenzahl

K_L – spezifische Lohnkosten als Arbeitsplatzkosten

K_{wi} – Werkzeugkosten

t_{wzi} – Werkzeugwechselzeit

bei der i -ten Arbeitsstufe.

Für alle Restriktionen gilt der allgemeine Ansatz

$$s_i = x_{1ji} v_i^{x_{2ji}} \quad (9)$$

Die folgende Tabelle zeigt die Zuordnung für x_1 und x_2 .

Restriktion	x_1	x_2
R_{s_1}	R_{s_1}	0
R_{s_2}	R_{s_2}	0
R_{r_1}	$\frac{s}{R_{r_1}}$	1
R_{r_2}	$\frac{s}{R_{r_2}}$	1
R_{s,p_2}	$R_{s,p_2} \cdot \frac{1}{c_2}$	$-\frac{1}{c_2}$
R_p	$\frac{1}{R_p^{1+K_2}}$	$-\frac{1}{1+K_2}$
R_T	$R_T^{-A_2}$	$-\frac{A_2}{A_2}$
R_v	R_v	-1

Im allgemeinen Fall ist der Index j von 1 bis n_i zu steigern (n_i — Zahl der Restriktionen für die i -te Arbeitsstufe); für das vorliegende Problem ist es jedoch ausreichend, wenn der Index j von 1 bis n_{0i} läuft (n_{0i} — Zahl der Restriktionen, die im Kompromißgebiet liegen).

Zur Lösung der am Anfang des Abschnitts formulierten Aufgabe wird eine Hilfsfunktion nach [5] eingeführt.

$$L = \sum_{i=1}^m K_i(t_i, s_i, T_i) + \lambda_0 \left(\sum_{i=1}^m t_i(s_i, v_i, T_i) - t_{Meff} \right) \quad (10)$$

wobei

$$t(s_i, v_i, T_i) = \frac{F_{3i}}{v_i \cdot s_i} \left(1 + \frac{t_{wzi}}{T_i} \right) \quad (11)$$

F_{3i} — Verfahrensfaktor:

z. B. gilt für Drehen:

$$F_{3i} = l_i \cdot d_i \cdot \pi$$

und für Fräsen:

$$F_{3i} = \frac{l_i \cdot d_{wzi} \cdot \pi}{z_i}$$

Mit dem Einsetzen der Gleichungen (7) und (11) in Gleichung (10) erhält man die folgende Form der Hilfsfunktion

$$L = \sum_{i=1}^m \frac{F_{1i}}{v_i s_i} \left(1 + \frac{F_{2i}}{T_i} \right) + \lambda_0 \left[\sum_{i=1}^m \frac{F_{3i}}{v_i s_i} \left(1 + \frac{t_{wzi}}{T_i} \right) - t_{Meff} \right] \quad (12)$$

Um die Zahl der Veränderlichen zu reduzieren, sind die Gleichungen (8) und (9) in Gleichung (12) einzusetzen. So erhält man

$$L = \sum_{i=1}^m \left[\frac{F_{1i}(A_{3i} \cdot X_{1ji}^{A_{4i}})^{1+x_{2ji}}}{X_{1ji} \cdot T_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}} \left(1 + \frac{F_{2i}}{T_i} \right) \right] + \\ + \lambda_0 \left[\sum_{i=1}^m \frac{F_{3i}(A_{3i} \cdot X_{1ji}^{A_{4i}})^{1+x_{2ji}}}{X_{1ji} \cdot T_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}} \left(1 + \frac{t_{wzi}}{T_i} \right) - t_{Meff} \right] \quad (13)$$

Für die Arbeitsstufe i ergibt sich die optimale Standzeit T_i unter Berücksichtigung der Nebenbedingung mit

$$\frac{\partial L}{\partial T_i} = 0 \quad (14)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 0 \quad (15)$$

Die erste partielle Ableitung nach (14) führt zu folgendem Ausdruck

$$T_i = - \frac{1+x_{2ji}+A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}{1+x_{2ji}} \frac{F_{1i} \cdot F_{2i} + \lambda_0 F_{3i} \cdot t_{wzi}}{F_{1i} + \lambda_0 F_{3i}} \quad (16)$$

Mit dem Einsetzen der Verfahrensfaktoren F in Gleichung (16) ergibt sich für die optimale Standzeit für die Arbeitsstufe i

$$T_i = - \frac{1+x_{2ji}+A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}{1+x_{2ji}} \left(t_{wzi} + \frac{K_{wi}}{K_L + \lambda_0} \right) \quad (17)$$

Setzt man in Gleichung (17) $\lambda_0 = 0$, erhält man die Standzeit für das absolute Kostenminimum in der Prozeß- bzw. Verfahrensoptimierung.

Die erste partielle Ableitung nach (15) führt zur folgenden trivialen Lösung

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_{3i}(A_{3i} X_{1ji}^{A_{4i}})^{1+x_{2ji}}}{X_{1ji} \cdot T_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}} \left(1 + \frac{t_{wzi}}{T_i} \right) = t_{Meff} \quad (18)$$

Mit dem Einsetzen der Gleichungen (8) und (9) erhält man

$$\sum_{i=1}^m \frac{F_{3i}}{v_i S_i} \left(1 + \frac{t_{wzi}}{T_i} \right) = t_{Meff} \quad (19)$$

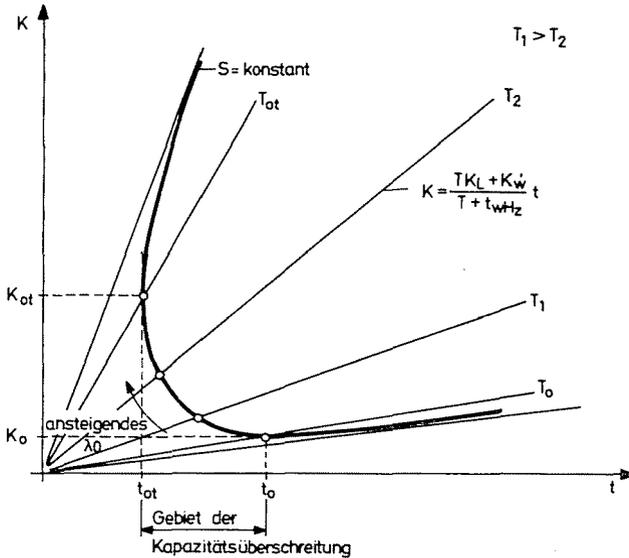


Abb. 3

Aus dem Gleichungssystem, bestehend aus (18) und (17), können die möglichen Extremwerte für die optimale Standzeit T_i und der Multiplikator λ_0 nicht explizit berechnet werden. Näherungsverfahren sind erforderlich. Mit Hilfe der Gleichung (17) und nach [8] kann ein einfaches und übersichtliches Iterationsverfahren entwickelt werden.

6. Ein Iterationsverfahren zur Lösung des Optimalproblems für Prozeßoptimierung bei Kapazitätsüberschreitung

In [8] wurde folgende Gleichung für die Kosten—Zeit-Funktion bei konstanter Standzeit abgeleitet.

$$K = \frac{T \cdot K_L + K'_w}{T + t_{wz}} \cdot t \quad (20)$$

Aus Gleichung (20) ergibt sich, daß die Linien einer konstanten Standzeit im $K-t$ -Koordinatensystem durch Geraden darstellbar sind, die alle durch den Koordinatenursprung verlaufen (Bild 3).

Aus der Gleichung (17) ist zu erkennen, daß bei wachsendem Multiplikator λ_0 der Optimalpunkt in die in Bild 3 gezeichnete Richtung wandert. Davon ausgehend kann ein einfaches und übersichtliches Iterationsverfahren ent-

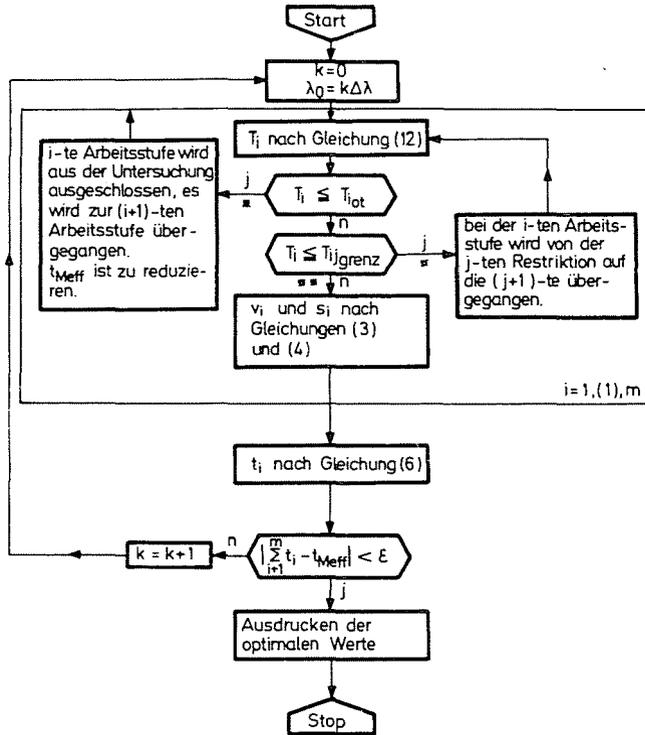


Abb. 4. Bemerkungen: $v_i(T_{ij\text{grenz}})$ — Grenzwerte der j -ten Restriktion, *—der Punkt liegt außerhalb des aktuellen Gültigkeitsbereiches; **—der Punkt liegt innerhalb des aktuellen Gültigkeitsbereiches

wickelt werden. Das Bild 4 stellt den prinzipiellen Ablauf des Iterationsverfahrens dar. Beginnend mit $\lambda_0 = 0$ und weiter mit $\lambda_0 = n \cdot \Delta\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) werden schrittweise Standzeiten T_i berechnet, die dem aktuellen Wert für λ_0 zugeordnet sind. Nach jedem Schritt ist zu kontrollieren, ob T_i innerhalb des technischen Lösungsfeldes liegt oder nicht. Wenn die Standzeit T_i innerhalb dieses Bereiches liegt, kann das dazugehörige Wertepaar $(v_i; s_i)$ berechnet werden. Anderenfalls muß die i -te Arbeitsstufe aus den weiteren Untersuchungen ausgeschlossen werden bzw. ist die benachbarte technische Restriktion zu beachten (Bild 5). Wenn für alle Arbeitsstufen technisch mögliche Wertekombinationen (v_i, s_i, T_i) zur Verfügung stehen, kann mittels der organisatorischen Bedingung nach Gleichung (19) die zum Kostenoptimum führende Iteration erfolgen. Wenn die Gleichung (19) erfüllt wird, ist die Iteration beendet und die optimalen Werte können ausgedruckt werden.

Das Iterationsverfahren ist einfacher, wenn man aus der Gleichung (12) die Standzeit T_i und den Vorschub s_i mittels der Schnittgeschwindigkeit eliminiert.

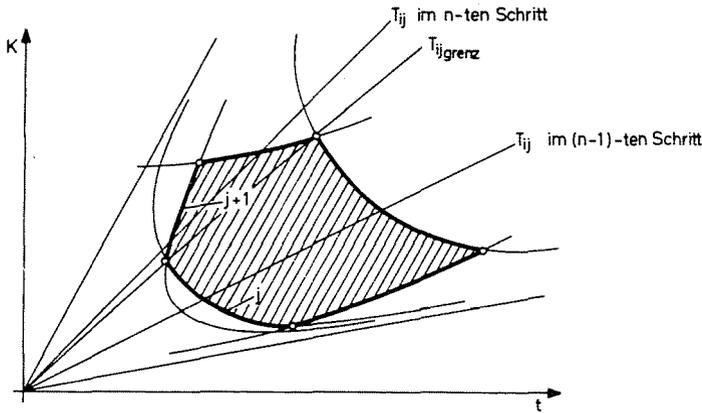


Abb. 5

7. Schnittgeschwindigkeitsoptimierung mittels der Lagrangeschen Multiplikatoren

Mit dem Einsetzen der Gleichungen (8) und (9) in Gleichung (12) erhält man nach Umformung die nächste Form der Hilfsfunktion

$$L(v_i, \lambda_0) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{F_{1i}^*}{x_{1ji} v_i^{1+x_{2ji}}} + \frac{F_{2i}^*}{x_{1ji}^{A_{4i}+1} v_i^{A_{2i}+1+x_{2ji}(A_{4i}+1)}} \right) + \lambda_0 \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{F_{3i}^*}{x_{1ji} v_i^{1+x_{2ji}}} + \frac{F_{4i}^*}{x_{1ji}^{A_{4i}+1} v_i^{A_{2i}+1+x_{2ji}(A_{4i}+1)}} \right) - t_{Meff} \right] \quad (21)$$

wobei

F^* = Verfahrensfaktoren

z. B. gelten für Drehen:

$$F_{1i}^* = K_L \pi l_i d_i$$

$$F_{2i}^* = \frac{K'_w \cdot \pi \cdot l_i d_i}{A_{3i}}$$

wobei

$$K'_w = t_{wz} K_L + K_w$$

$$F_{3i}^* = \pi l_i d_i$$

$$F_{4i}^* = \frac{t_{wz} \pi l_i d_i}{A_{3i}}$$

Für die Arbeitsstufe i ergibt sich die kostenoptimale Schnittgeschwindigkeit v_i unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (9) und (19) mit

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 \quad (22)$$

Die erste partielle Ableitung nach (22) führt zu folgendem Ausdruck

$$v_i^{A_{2i} + x_{2ji}A_{4i}} = - \frac{A_{2i} + 1 + x_{2ji}(A_{4i} + 1)}{x_{1ji}^{A_{4i}}(1 + x_{2ji})} \frac{F_{2i}^* + \lambda_0 F_{4i}^*}{F_{1i}^* + \lambda_0 F_{3i}^*} \quad (23)$$

Mit dem Einsetzen der Verfahrensfaktoren in Gleichung (23) erhält man die nächste Form für die Schnittgeschwindigkeit v_i

$$v_i^{A_{2i} + x_{2ji}A_{4i}} = - \frac{A_{2i} + 1 + x_{2ji}(A_{4i} + 1)}{A_{3i}x_{1ji}^{A_{4i}}(1 + x_{2ji})} \left(t_{wzi} + \frac{K_{wi}}{K_L + \lambda_0} \right) \quad (24)$$

Mit Hilfe der Gleichung (24) ergibt sich die Möglichkeit für ein einfacheres aber nicht so übersichtliches Iterationsverfahren, wie es im Abschnitt 6 dargestellt wurde.

Den prinzipiellen Ablauf des Iterationsverfahrens stellt das Bild 6 dar.

8. Beziehungen zwischen der Lösung mittels des Lagrangeschen Multiplikators und der Lösung mit Hilfe der Optimierregel

Mit der Umformung der Gleichung (23) ergibt sich für den Lagrangeschen Multiplikator λ_0 der folgende Ausdruck

$$\lambda_0 = - \frac{[A_{2i} + 1 + x_{2ji}(A_{4i} + 1)]F_{2i}^* + v_i^{A_{2i} + A_{2ji}A_{4i}}(1 + x_{2ji})x_{1ji}^{A_{4i}}F_{1i}^*}{(1 + x_{2ji})x_{1ji}^{A_{4i}}F_{3i}^*v_i^{A_{2i} + x_{2ji}A_{4i}} + [A_{2i} + 1 + x_{2ji}(A_{4i} + 1)]F_{4i}^*} \quad (25)$$

Der Absolutwert der rechten Seite der Gleichung (25) entsteht auch, wenn

$$\frac{dK_1}{dv_1} = \dots = \frac{dK_i}{dv_i} = \dots = \frac{dK_m}{dv_m} \quad (26)$$

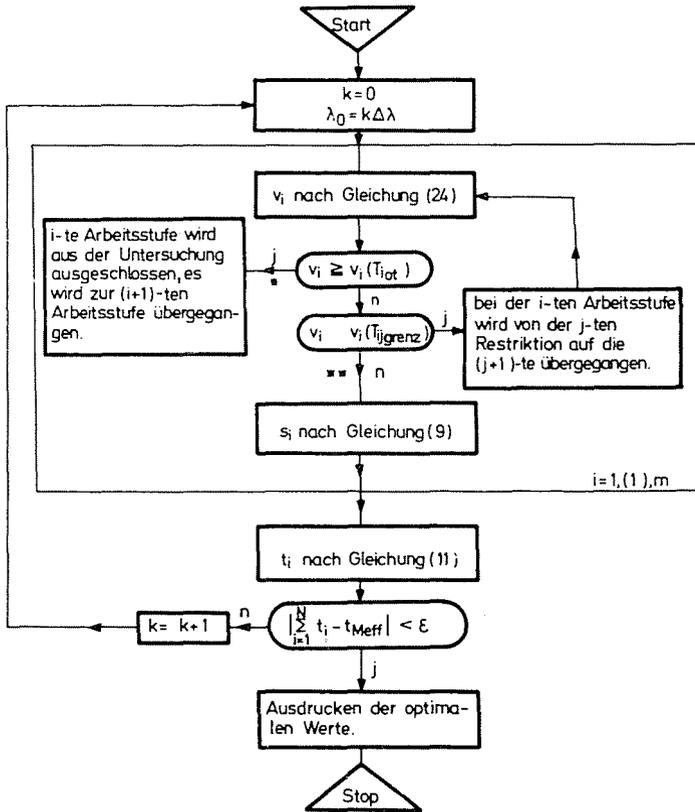


Abb. 6. Bemerkungen: $v_i(T_{ijgrenz})$ – Grenzwerte der j -ten Restriktion. * – der Punkt liegt außerhalb des aktuellen Gültigkeitsbereiches; ** – der Punkt liegt innerhalb des aktuellen Gültigkeitsbereiches

und damit auch

$$\frac{dK_1}{dt_1} = \dots = \frac{dK_i}{dt_i} = \dots = \frac{dK_m}{dt_m} \quad (27)$$

gebildet werden.

Aus Plausibilitätsgründen folgt, daß

$$\frac{\sum_{i=1}^m dK_i}{\sum_{i=1}^m dt_i} = \frac{d \sum_{i=1}^m K_i}{d \sum_{i=1}^m t_i} \quad (28)$$

Die Gleichung (28) beschreibt genau die Optimierregel nach [1] und [4] für Serienfertigung bei Kapazitätsüberschreitung. Damit liegt eine einfache mathematische Ableitung für die genannte Regel vor.

9. Verringerung des Iterationsaufwandes

Im folgenden soll untersucht werden, ob der Iterationsaufwand weiter verringert werden kann. Zur weiteren Ableitung der gesuchten optimalen Schnittgeschwindigkeiten für alle betrachteten Arbeitsstufen eines Arbeitsganges wird im Interesse einer kürzeren Schreibweise vereinbart:

In Gleichung (25) gelten

$$(1 + x_{2ji})x_{1ji}^{A_{4i}} = B_{ji} \quad (29)$$

$$A_{2i} + 1 + x_{2ji}(A_{4i} + 1) = C_{ji} \quad (30)$$

Mit diesen eingeführten Termbezeichnungen ergibt sich aus Gleichung (25) die Gleichungskette

$$\begin{aligned} & \frac{B_{j1}F_{11}^*v_1^{A_{21}+x_{2j1}A_{41}} + C_{j1}F_{21}^*}{B_{j1}F_{31}^*v_1^{A_{21}+x_{2j1}A_{41}} + C_{j1}F_{41}^*} = \dots = \\ & = \frac{B_{ji}F_{1i}^*v_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}} + C_{ji}F_{2i}^*}{B_{ji}F_{3i}^*v_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}} + C_{ji}F_{4i}^*} = Q_i = \dots = Q_m \end{aligned} \quad (31)$$

Nach Gleichung (31) gilt also

$$\frac{B_{ji}F_{1i}^*v_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}} + C_{ji}F_{2i}^*}{B_{ji}F_{3i}^*v_i^{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}} + C_{ji}F_{4i}^*} = Q_1 \quad (32)$$

Aus (32) folgt für v_i

$$v_i = \left[\frac{C_{ji}(Q_1 F_{4i}^* - F_{2i}^*)}{B_{ji}(F_{1i}^* - Q_1 F_{3i}^*)} \right]^{\frac{1}{A_{2i} + x_{2ji}A_{4i}}} \quad (33)$$

Dabei kann für Q_1 auch Q_2, Q_3, \dots, Q_m gesetzt werden. Das Ergebnis für v_i nach Gleichung (33) wird in die Nebenbedingung für Serienfertigung nach Gleichung (19) eingesetzt. Gleichzeitig wird zweckmäßig umgeformt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{F_{31}^*x_{1j1}^{A_{41}}v_1^{A_{21}+x_{2j1}A_{41}} + F_{41}^*}{x_{1j1}^{A_{41}+1}v_1^{A_{21}+1+x_{2j1}(A_{41}+1)}} + \dots + \\ & + \frac{F_{3i}^*x_{1ji}^{A_{4i}} \left(\frac{C_{ji}(Q_1 F_{4i}^* - F_{2i}^*)}{B_{ji}(F_{1i}^* - Q_1 F_{3i}^*)} \right) + F_{4i}^*}{x_{1ji}^{A_{4i}+1} \left(\frac{C_{ji}(Q_1 F_{4i}^* - F_{2i}^*)}{B_{ji}(F_{1i}^* - Q_1 F_{3i}^*)} \right)^{1 + \frac{x_{2ji}+1}{A_{2i}+x_{2ji}A_{4i}}}} = t_{Meff} \end{aligned} \quad (34)$$

wobei $Q_1 = f(v_1)$

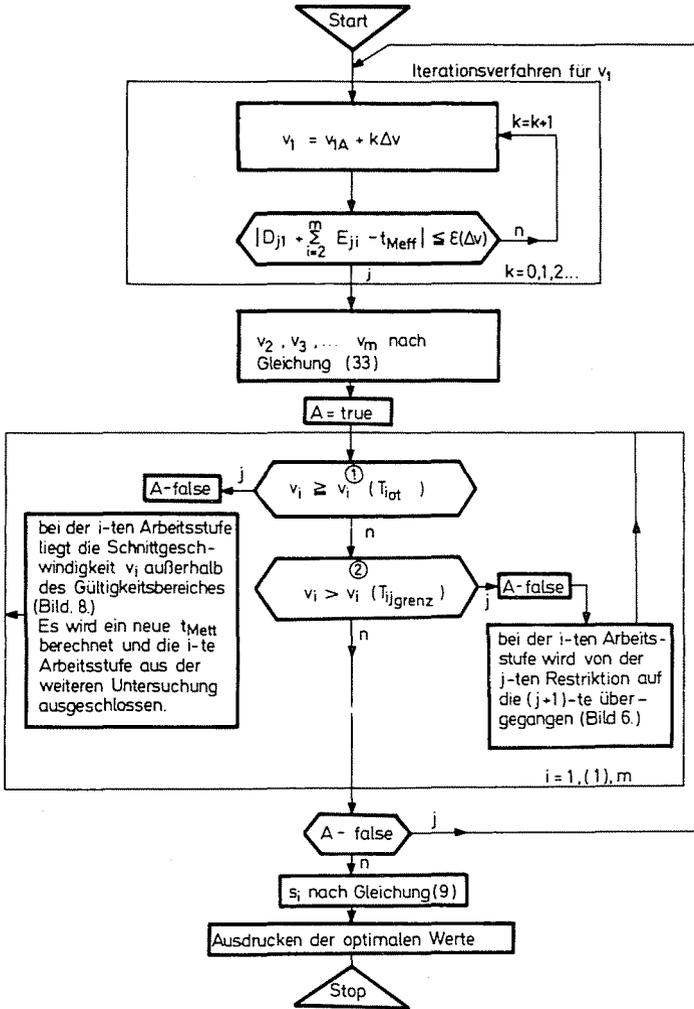


Abb. 7

Gleichung (34) stellt eine nach v_1 nicht explizit auflösbare Gleichung dar. Näherungsverfahren der numerischen Mathematik sind erforderlich. Wenn v_1 mit Hilfe einer iterativen Lösung bestimmt wird, lassen sich nach Gleichung (33) alle zu optimierenden Schnittgeschwindigkeiten der weiteren Arbeitsstufen mit Indizes $2 \dots m$ explizit darstellen.

Es wird im Interesse einer kürzeren Schreibweise vereinbart:
In Gleichung (34) gelten:

$$D_{j1} = \frac{F_{31}^* x_{1j1}^{A_{41}} v_1^{A_{21} + x_{2j1} A_{41}} + F_{41}^*}{x_{1j1}^{A_{41} + 1} v_1^{A_{21} + 1 + x_{2j1} (A_{41} + 1)}} \quad (35)$$

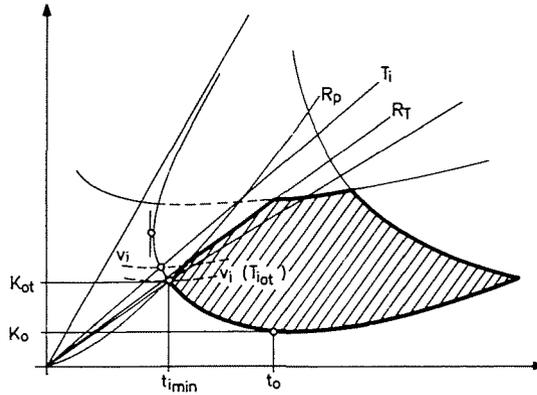


Abb. 8

$$E_{ji} = \frac{F_{3i}^* x_{1ji}^{A_{4i}} \left(\frac{C_{ji}(Q_1 F_{4i}^* - F_{2i}^*)}{B_{ji}(F_{1i}^* - Q_1 F_{3i}^*)} \right) + F_{4i}^*}{x_{1ji}^{A_{4i} + 1} \left(\frac{C_{ji}(Q_1 F_{4i}^* - F_{2i}^*)}{B_{ji}(F_{1i}^* - Q_1 F_{3i}^*)} \right)^{1 + \frac{1 + x_{2ji}}{A_{2i} + x_{2ji} A_{4i}}}} \quad (36)$$

Mit diesen eingeführten Termbezeichnungen ergibt sich aus Gleichung (34)

$$D_{j1} + \sum_{i=2}^m E_{ji} = t_{Meff} \quad (37)$$

Den Grob Ablauf der Rechenmethode stellt das Bild 7 dar.

Im ersten Schritt wird mit Hilfe des prinzipiell gezeichneten Iterationsverfahrens die Schnittgeschwindigkeit v_1 für die erste Arbeitsstufe berechnet. Anfangswert ist die kostenoptimale Schnittgeschwindigkeit. Wenn die Bedingung nach Gleichung (37) erfüllt ist, lassen sich nach Gleichung (33) alle weiteren Schnittgeschwindigkeiten berechnen.

Im zweiten Schritt ist zu kontrollieren, ob die Schnittgeschwindigkeiten innerhalb ihres technischen Gültigkeitsbereiches liegen oder nicht. Wenn auch nur ein einziges Mal eine der Bedingungen 1 oder 2 erfüllt wurde, ist die Iteration für alle Arbeitsstufen mit den aktuellen Daten neu zu beginnen. Wenn für alle Arbeitsstufen technisch mögliche Schnittgeschwindigkeiten v_i zur Verfügung stehen, können nach Gleichung (9) der optimale Vorschub s_i berechnet, und die optimalen Wertepaare ausgedrückt werden.

10. Zusammenfassung

Es wurden für die Optimierung der Fertigungsgestaltung spanender Prozesse drei Lösungen dargestellt. Der mit diesen Ansätzen verbundene Rechenaufwand hängt davon ab, wie schnell die erforderlichen Iterationen konvergieren und wie genau das Ergebnis erwartet wird. Eine weitere Forschungsaufgabe ist, auf dieser Grundlage zwei oder drei Programmbausteine zu entwickeln. Durch praktische Untersuchungen kann entschieden werden, welche Methode der Prozeßoptimierung am geeignetsten ist.

Literatur

1. JACOBS, H. J.: Einige Grundlagen zur externen Optimierung von Fertigungsprozessen der spanenden Teilefertigung (Prozeßoptimierung) *Wiss. Zeitschrift der TU Dresden* 26 (1977) 2, S. 405/413.
2. FINK, Heiner: Theoretische Grundlagen zur Optimierung wesentlicher Prozeßparameter der spanenden Teilefertigung. Dissertation B, TU Dresden 1979.
3. JUNKER, FRANK: Theoretische und praktische Untersuchungen zur optimalen Gestaltung von Fertigungsprozeßparametern in der Teilefertigung der Spannungstechnik. Dissertation A, TU Dresden 1979.
4. RAVIGNANI, G. L.: Optimierung von Abspannverfahren mit vorgegebenen Grenzen. *Werkstattstechnik — Zeitschrift für industrielle Fertigung* 65 (1975) 5, S. 249/255
5. Kleine Enzyklopädie — Mathematik. 1967 VEB Verlag Enzyklopädie Leipzig
6. JACOBS, H. J., FINK, A., JUNKER, F., MOUSSA, A.: Gestaltung von Fertigungsprozessen der spanenden Teilefertigung mit Polyoptimierung. *Fertigungstechnik und Betrieb*, 28 (1978) 10, S. 590/593.
7. HORVÁTH, M., SOMLÓ, J.: *Megmunkálási eljárások optimalása és adaptív irányítása*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
8. JACOBS, H.-J.: Funktionspapier zur technologischen Prozeßoptimierung in der spanenden Teilefertigung. Preprint, TU Dresden.

Prof. dr. sc. techn. H. J. JACOBS

Technische Universität Dresden
DDR

Prof. dr. Mátyás HORVÁTH
dr. Imre MÉSZÁROS

} H-1521 Budapest