ÜBER REGULÄRE ÜBERDECKUNGEN DER BOLYAI-LOBATSCHEWSKISCHEN EBENE DURCH KONGRUENTE HYPERZYKELBEREICHE*

Von

I. VERMES

Lehrstuhl für Geometrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 20. Januar 1981
Vorgelegt von Prof. Dr. GY. STROMMER

L. FEJES TÓTH beschäftigte sich in seinen Arbeiten [2], [4] und [3], [5] bzw. in seinem Buch [6] mit den Kreisausfüllungen und Kreisüberdeckungen auf Flächen konstanter Krümmung bzw. mit der dichtesten Horozyklenlagerung und mit der dünnsten Horozyklenüberdeckung der Bolyai-Lobatschewskischen (im Weiteren nur mit B-L gezeichnet) Ebene. In diesen Untersuchungen ergeben sich die regulären Konfigurationen der Bereiche im Falle der maximalen bzw. minimalen Dichte der Ausfüllungen bzw. der Überdeckungen. Auf die Anregung dieser Ergebnisse wurden die oberen Dichtenschranken der Ausfüllungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche und die dichtesten Konfigurationen gegeben [9]. In diesen Untersuchungen zerlegt man die B-L Ebene in geeignete Vielecke, und die oberen bzw. unteren Dichtenschranken können bezüglich der Elemente dieser Zerlegungen angegeben werden. Auf die Schwierigkeiten, mit denen die Definition eines Dichtenbegriffs in der B-L Ebene verbunden ist, hat schon L. FEJES TÓTH [2] hingewiesen, K. BÖRÖCZKY [1] hat aber gezeigt, daß diese Schwierigkeiten tiefer liegen als man im ersten Augenblick erwarten würde. Er hat nämlich ein System aus kongruenten Kreisen und dazu zwei verschiedene Zerlegungen Z_1 und Z_2 der B-L Ebene in kongruente Zellen konstruiert mit der Eigenschaft, daß die Kreisdichte in jeder Zelle von Z_i denselben Wert d_i aufweist ($i=1, 2$) mit $d_1 \neq d_2$. Deswegen muß man die Zerlegung in endliche Gebiete eindeutig bestimmen und die Dichtenschranken bezüglich eines Gebietes angeben. H. ZEITLER beschäftigte sich in seiner Arbeit [10] mit der regulären Horozyklenüberdeckung der B-L Ebene im POINCARÉ-Modell.

In dieser Arbeit untersuchen wir die regulären Überdeckungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche und ihre Dichten.

Man versteht unter einem *Hyperzykel* (oder einer *Abstandslinie* bzw. *Äquidistante*) die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene, die von einer Geraden gleichen Abstand l haben, und alle auf derselben Seite von ihr gelegen

* Prof. Strommer zum 60. Geburtstag gewidmet

sind. Die beiden kongruenten Äquidistanten auf verschiedenen Seiten von der Geraden (d. h. der *Grundlinie*) begrenzen einen Teil der Ebene, der als *Hyperzykelbereich* von Abstand l heißt.

Betrachten wir diejenigen regulären Überdeckungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, die aus der regulären Ausfüllungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche abgeleitet werden können. Diese Ausfüllungen sind in [8] gegeben, aber wir andeuten den Gedankengang zur ihren Konstruktion, denn diese Ausfüllungen spielen eine wichtige Rolle bei der Ableitung der Überdeckungen:

Wir zerlegen die B-L Ebene durch n (von einem Punkt P ausgehende, miteinander den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ einschließende) Halbgeraden in kongruente Teile ($n \geqq 3$). Auf jeder Halbgeraden betrachten wir je einen Punkt mit der Entfernung t von P, so daß $t > \Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)$ sei, wo $\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)$ das zum Winkel $\frac{\pi}{n}$ gehörige Parallellot bedeutet. Wenn man zu jeder Halbgeraden durch den auf derselben vorher bestimmten Punkt je eine senkrechten Gerade zieht, so haben die zu zwei benachbarten Halbgeraden gehörigen Senkrechten je ein gemeinsames Lot. Zu einem solchen gemeinsamen Lot gehört je eine Abstandslinie in jedem Teil der Ebene, die die Halbgeraden (mit dem Anfangspunkt P) in den fixierten Punkten jeweils berühren und folglich paarweise miteinander einen Berührungspunkt haben. Man kann von den Punkten der Halbgeraden, deren Abstand von P gleich $2t$ ist, zu den benachbarten Abstandslinien Tangenten

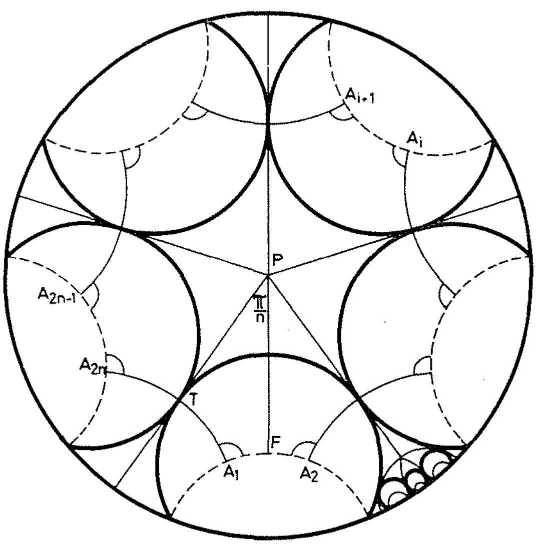

Abb. 1

ziehen, wobei die Länge der Tangentenstrecken ebenfalls t ist. Von diesen Punkten können noch $(n-3)$ Halbgeraden so gezogen werden, daß diese Halbgeraden paarweise miteinander bzw. mit den Tangenten den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ einschließen. In diese Winkel kann je eine mit den vorigen Abstandslinien kongruente Äquidistante auf ähnliche Weise wie vorher gelegt werden. Dieser Prozeß kann unendlich oft fortgesetzt werden, und so ergeben sich unendlich viele Abstandslinien, um jede Abstandslinie je ein unendliches Tangentenpolygon von gleichen Seiten und Winkeln. Die Figur 1 zeigt, falls $n=5$ ist, einen Teil der Konstruktion eines solchen unendlichen Tangentenpolygons im POINCARÉ-schen Kreismodell.

Spiegeln wir gleichzeitig diese Konfiguration an die Grundlinien der vorkommenden Abstandslinien. Nach den Spiegelungen kommen weitere Grundlinien vor, die die neuere Konfiguration begrenzen. In ähnlicher Weise wie vorhin können gleichzeitige Spiegelungen an diese Grundlinien durchgeführt werden, und dieses Spiegelungsverfahren kann unbegrenzt fortgesetzt werden. So bekommen wir eine reguläre Ausfüllung der B-L Ebene durch die Paare von Abstandslinien d. h. durch die kongruente Hyperzykelbereiche.

Falls man die natürliche Zahl n $(n=3, 4, 5, \ldots)$ und den Wert von $t > \Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)$ verändert, so können die reguläre Ausfüllungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche gewonnen werden.

Wenn der zu den Hyperzykelbereichen der regulären Ausfüllung gehörige Abstand l zunimmt, so ist es erreichbar, daß die Hyperzykelbereiche die reguläre Überdeckung der B-L Ebene geben. Die bezüglich der Grundlinie symmetrischen unendlichen Tangentenpolygone der Hyperzykelbereiche begrenzen die zur regulären Ausfüllung gehörigen DIRICHLET-schen Zellen, denn der Begriff der Potenzlinien zweier Abstandslinien läßt sich ebenso, wie im Falle von Kreisen erklären. Unter Potenzlinie zweier Äquidistanten versteht man die Gesamtheit derjenigen Punkte, aus denen die gleichen Tangenten zu den Äquidistanten gezogen werden können. Diese Gesamtheit gibt eine Gerade, und die Potenzlinie zweier kongruenter Abstandslinien ist die Symmetrieachse ihrer Grundlinien.

Nehmen wir die zu den DIRICHLET-schen Zellen gehörige duale Zerlegung der B-L Ebene. In dieser Zerlegung gehört je ein rechtwinkliges $2n$-Eck zu jedem Eckpunkt der DIRICHLET-schen Zellen, dessen Seiten einerseits die gemeinsamen Lote der Grundlinien der Abstandslinien sind, deren Potenzlinien in diesem Eckpunkt sich treffen; andererseits gehören die Strecken zu den Seiten dieses Vieleckes, die zwischen den Fußpunkten der gemeinsamen Lote auf der Grundlinien liegen. Die Seiten eines solchen $2n$-

Eckes liegen abwechselnd auf den Grundlinien bzw. auf ihren gemeinsamen Loten.

Die Dichten der erreichten regulären Überdeckungen werden bezüglich dieser rechtwinkligen $2n$-Ecken untersucht. Die Figur 1 zeigt das zum Punkt P gehörige $2n$-Eck, dessen Ecken die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$ sind. Es ist klar, daß es genügt die Dichte bloß in einem solchen LAMBERT-schen Vierecke zu untersuchen, das sich ergibt, indem man eine senkrechte Gerade aus dem Punkt P auf einer Grundlinie fällt (mit dem Fußpunkt F) und jenes Viereck PFA_1T nimmt, wo der Punkt T der Fußpunkt der aus P ausgehenden Mittelsenkrechten von der Strecke $A_{2n}A_1$ ist (Figur 1). Also kann die Dichte einer Überdeckung auf folgender Weise aufgeschrieben werden[1]:

$$D(l, n) = \frac{FA_1 \cdot \operatorname{sh} l}{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}}$$

Es soll bemerkt werden, daß eine größere Dichte sich im Falle der aus kongruenten Hyperzykelbereichen konstruierten regulären Überdeckungen ergibt, wenn diese Bereiche die Ecken der betrachteten DIRICHLET-schen Zellen als ihre inneren Punkte haben, als im Falle, wenn die Abstandslinien durch diese Ecken hindurchgehen. Die Hyperzykelbereiche, die diese Eckpunkte im Äußeren haben, bilden schon keine Überdeckung der B-L Ebene. Deswegen betrachten wir nur solche Überdeckungen, in deren die DIRICHLET-sche Zellen in die Hyperzykelbereiche eingeschriebene reguläre unendliche Polygone sind. Die Seitengeraden dieser Polygone sind auch Potenzlinien der entsprechenden Äquidistanten in der Überdeckung.

Es ist leicht einzusehen, daß die zu den regulären Ausfüllungen gehörigen Abstände l nur die Ungleichung $0 < l < +\infty$ erfüllen, folglich müssen wir im Falle der regulären Überdeckungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche für die Abstände l bloß die Ungleichung $\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right) < l < +\infty$ vorschreiben.

Es soll noch bemerkt werden, daß die oben erwähnte Dichte eine dem Vieleck $A_1, A_2, \ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$ zugeordnete Dichte ist, denn die Äquidistanten über die Seiten $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$ können das Vieleck übertreten. Wegen der Regelmäßigkeit gleichen sich jedoch die Übertretungen benachbarter Vielecke aus, also ist der obige Begriff der Dichte berechtigt.

[1] Der Flächeninhalt ist zwischen der Strecke a und der zu ihr gehörigen Äquidistante vom Abstand l: $a \cdot \operatorname{sh} l$, und der Flächeninhalt eines LAMBERT-schen Viereckes ist berechenbar aus seinem Winkeldefekt. S. z. B. [7] § 18. S. 95—97.

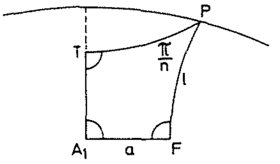

Abb. 2

Betrachten wir jetzt das Viereck PFA_1T und die Äquidistante über FA_1 durch den Punkt P (Figur 2). Auf Grund der trigonometrischen Beziehungen der LAMBERT-schen Vierecke[2] ergibt sich die folgende Beziehung für das Viereck PFA_1T:

$$a = \operatorname{arth} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l},$$

wobei $PF = l$ und $A_1F = a$ sind.

Also ist die Dichtefunktion der betrachteten Überdeckungen:

$$D(l, n) = \frac{\operatorname{sh} l \cdot \operatorname{arth} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\frac{(n-2)\pi}{2n}},$$

wobei $n = 3, 4, 5, \ldots$ natürliche Zahlen und $l > \Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)$ sind.

Im Weiteren wollen wir die Dichtefunktion $D(l, n)$ untersuchen. *Es wird gezeigt, daß $D(l, n)$ als die Funktion von l (n ist eine Konstante) im Intervall $\left(\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right) < l < +\infty\right)$ monoton abnimmt, und*

$$\lim_{l=+\infty} D(l, n) = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\frac{(n-2)\pi}{2n}}$$

bzw.

$$\lim_{l=\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)} D(l, n) = +\infty$$

bestehen.

[2] S. z. B. [7] §§ 15. und 17. S. 37—40, bzw. 71—78.

Es ist leicht zu sehen, daß

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}D(l,n)=\frac{2n}{(n-2)\pi}\operatorname{ch} l\left\{\operatorname{arth}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}-\frac{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{1-\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}\right)^2}\right\}$$

ist.

Es ist klar, daß die Beziehungen

$$\operatorname{arth} x=\operatorname{arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$$

und

$$\operatorname{arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

weiterhin $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}>1$ bestehen, folglich ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}D(l,n)<0$, falls man $\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}$ für x substituiert. Die Funktion $D(l,n)$ von l nimmt monoton ab.

Die Beziehung $\operatorname{sh} l=\operatorname{ctg}\Pi(l)$ besteht zwischen dem Parallelwinkel $\Pi(l)$ und dem zu ihm gehörigen Parallellot l, andererseits gilt $\lim\limits_{x=0}\frac{\operatorname{arth} x}{x}=1$.

Daraus folgt, daß

$$\lim_{l=+\infty}\operatorname{sh} l\cdot\operatorname{arth}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}=\lim_{l=+\infty}\frac{\operatorname{arth}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\quad \text{ist,}$$

also ergibt sich der Grenzwert:

$$\lim_{l=+\infty} D(l,n) = \frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{(n-2)\pi}{2n}}.$$

Die Berechnung des Grenzwertes

$$\lim_{l=\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)} D(l,n) = +\infty$$

liegt an der Hand.

Jetzt soll die dünnste Überdeckung gesucht werden. *Falls man die Dichten der zu demselben Abstand l gehörigen regulären Überdeckungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche betrachtet, so läßt sich beweisen, daß $D(l, n+1) > D(l, n)$, wobei natürlich $l > \Delta\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ beträgt.*

Für die Richtigkeit dieser Behauptung müssen wir die folgenden beiden äquivalenten Ungleichungen (1) bzw. (2) beweisen:

$$\frac{\operatorname{sh} l \cdot \operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh} l}}{\dfrac{(n-1)\pi}{2(n+1)}} > \frac{\operatorname{sh} l \cdot \operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\dfrac{(n-2)\pi}{2n}} \tag{1}$$

bzw.

$$\frac{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh} l}} < \frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)}. \tag{2}$$

Weil die Funktionen $\dfrac{\operatorname{arth} x}{x}$ und $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ (für $x \to 0$) monoton abnehmend dem

Wert 1 zustreben, also

$$\frac{\dfrac{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}}{\dfrac{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh} l}}{\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh} l}}} < 1 \qquad \text{und ebenso} \qquad \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}}}{\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}} < 1$$

bestehen.

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\frac{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sh} l}}{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{sh} l}} < \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+1}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} < \frac{n}{n+1},$$

also müssen wir nur die Ungleichung

$$\frac{n}{n+1} < \frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)}$$

beweisen und ihre Gültigkeit untersuchen.

Die Ungleichung

$$\frac{n}{n+1} < \frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)}$$

besteht dann und nur dann, falls

$$n^2(n-1)<(n-2)\,(n+1)^2$$

bzw.

$$0<n^2-3n-2$$

gelten.

Für die positive Wurzel x_1 der Gleichung $x^2-3x-2=0$ gilt die folgende Ungleichung:

$$3<x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}<4,$$

weshalb die obene Ungleichung für $n\geqq 4$ bewiesen ist. .

Für $n=3$ bestehen die Ungleichungen

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=<\frac{2}{3}$$

folglich auch

$$\frac{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{sh} l}}{\operatorname{arth}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sh} l}}<\frac{2}{3},$$

womit die Ungleichung $D(l, n+1)>D(l, n)$ für $n\geqq 3$ bewiesen ist.

Die Ungleichung

$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n+1}}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}}<\frac{(n-2)\,(n+1)}{n(n-1)}$$

besteht auch für die natürlichen Zahlen $n\geqq 3$, daraus die Ungleichung

$$\lim_{l=+\infty} D(l, n+1)>\lim_{l=+\infty} D(l, n)$$

folgt.

Diese Ungleichungen zeigen, daß die dünnste reguläre Überdeckungen der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche vom Abstand l sich im Falle $n=3$ verwirklichen $\left(l>\Delta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Der Grenzwert

$$\lim_{l=+\infty} D(l,3)=\frac{\sqrt{12}}{\pi}$$

gibt die Dichte der dünnsten Horozyklenüberdeckung der B-L Ebene, folglich kann diese Dichte von der Dichte einer dünnsten regulären Überdeckung der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche — für genügend groß l, im

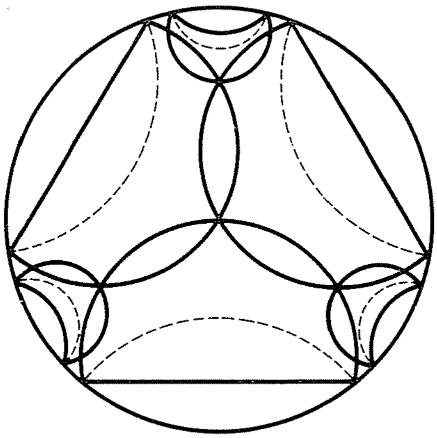

Abb. 3

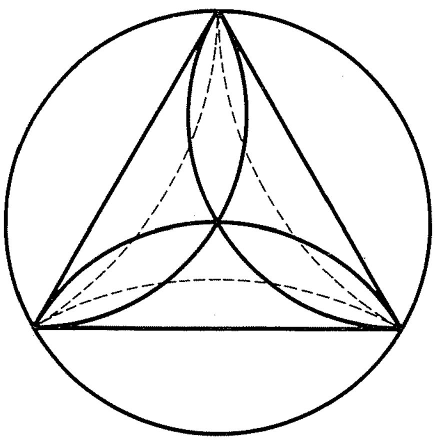

Abb. 4

Falle $n=3$ — willkürlich genau approximiert werden. Die Figur 3 zeigt eine solche dünnste reguläre Überdeckung im POINCARÉ-schen Kreismodell.

Eine reguläre Überdeckung der B-L Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche vom Abstand l kann auch im Falle $l=\Delta\left(\frac{\pi}{n}\right)$ konstruiert werden, wo die Überdeckungsdichte unendlich groß wird. Die Figur 4 zeigt die

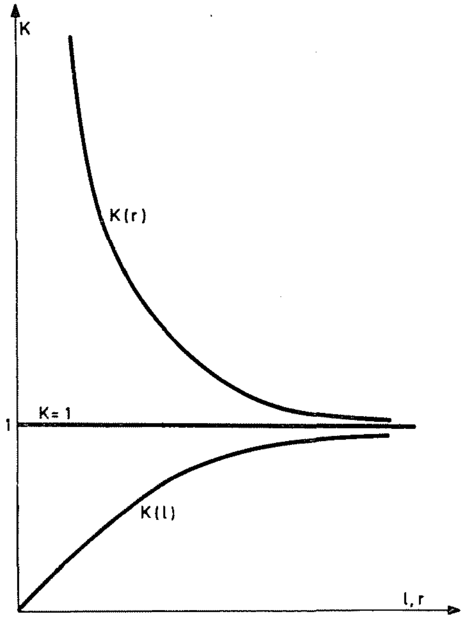

Abb. 5

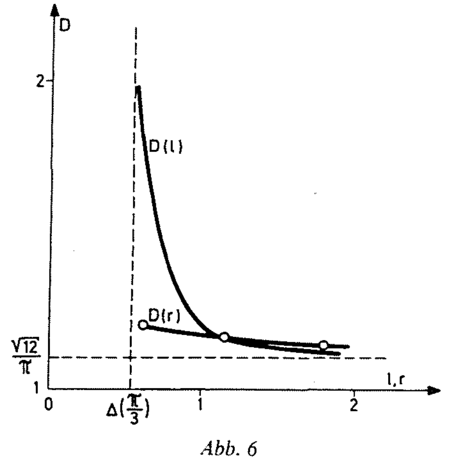

Abb. 6

Überdeckungskonfiguration für $n=3$, $l=\Delta\left(\frac{\pi}{3}\right)$ im POINCARÉ-schen Kreismodell.

Zum Schluß vergleichen wir die Figuren 5 und 6. Die Funktionen

$$K(r)=\frac{1}{k}\operatorname{cth}\frac{r}{k}, \qquad K(l)=\frac{1}{k}\operatorname{th}\frac{l}{k}$$

und

$$K=\frac{1}{k}$$

sind in Figur 5 dargestellt, wo $K(r)$ die Krümmung eines Kreises vom Radius r, $K(l)$ die Krümmung eines Hyperzykels vom Abstand l und $K=\frac{1}{k}$ die Krümmung der Horozyklen angeben. (In dieser Arbeit haben wir die Berechnungen — Einfachheit halber — für $k=1$ gemacht.) Die Funktionen

$$D(r),\ D(l)=D(l,3)$$

und

$$D=\frac{\sqrt{12}}{\pi}$$

sind in Figur 6 dargestellt, wo $D(r)$ die Dichteschranke einer Kreisüberdeckung vom Radius r, $D(l)$ die Dichtefunktion der regulären Überdeckungen der B-L Ebene durch Hyperzykelbereiche vom Abstand l und $D=\frac{\sqrt{12}}{\pi}$ die Dichte der dünnsten Horozyklenüberdeckung angeben.

Zusammenfassung

Diese regulären Überdeckungen der Bolyai-Lobatschewskyschen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche wurden besprochen, wo die Überdeckungen aus den regulären Hyperzyklenausfüllungen der Ebene abgeleitet werden können. Wir betrachten die Funktion $D(l, n)$ der Überdeckungsdichte bezüglich der Zellenzerlegung der Ebene in die rechtwinkligen, kongruenten $2n$-Ecke. (l ist der Abstand der Hyperzykelbereiche in einer regulären Überdeckung). Es wurde bewiesen, daß die folgende Ungleichung $\left(\text{im Falle } n\geqq 3,\ l>\Delta\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right)$ besteht: $D(l, n+1)>D(l, n)$.

Literatur

1. BÖRÖCZKY K.: Sphere packing in spaces of constans curvature I., (Ungarisch) Mat. Lapok *25*, 265—306 (1974)
2. FEJES TÓTH L.: Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4*, 103—110 (1953)
3. FEJES TÓTH L.: Über die dichteste Horozyklenlagerung, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5*, 41—44 (1954)
4. FEJES TÓTH L.: Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4*, 111—114 (1953)
5. FEJES TÓTH L.: Über die dünnste Horozyklenüberdeckung, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *7*, 95—98 (1956)
6. FEJES TÓTH L.: Reguläre Figuren (Verlag der Ung. Akad. der Wissenschaften, Budapest 1965)
7. LIEBMANN H.: Nichteuklidische Geometrie (G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin—Leipzig 1912)
8. VERMES I.: Über ebene hyperbolische Mosaike, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. *17*, 131—137 (1974)
9. VERMES I.: Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, Period. Math. Hung. *10*, 217—229 (1979)
10. ZEITLER H.: Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell, El. Math. *19*, 73—77 (1964)

dr. Imre VERMES, H-1521 Budapest