VERALLGEMEINERTE RANDWERTAUFGABE IN DER MATHEMATISCHEN MODELLIERUNG DER SCHALEN

Von

GY. KRAMM

Lehrstuhl für Maschinenelemente, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 10. Mai 1981
Vorgelegt von Prof. Dr. L. VARGA

Die zum Untersuchen von zufolge verschiedener Belastungen entstehenden Deformationen der Schalen und Platten geeigneten mathematischen Modelle führen zu nicht linearen partiellen Differentialgleichungssystemen höherer Ordnung. Wenn wir unsere Untersuchungen auf die in Abb. 1 dargestellte mit beliebiger Flächenbelastung belastete und eingespannte ebene Platte mit beliebigem Rand beschränken und das Differentialgleichungssystem linearisieren, dann gelangen wir zu dem folgenden Differentialgleichungssystem [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^2}=\frac{1}{D}p(x_1, x_2) \tag{3}$$

wo (u, v, w) der gesuchte Verschiebungsvektor ist.

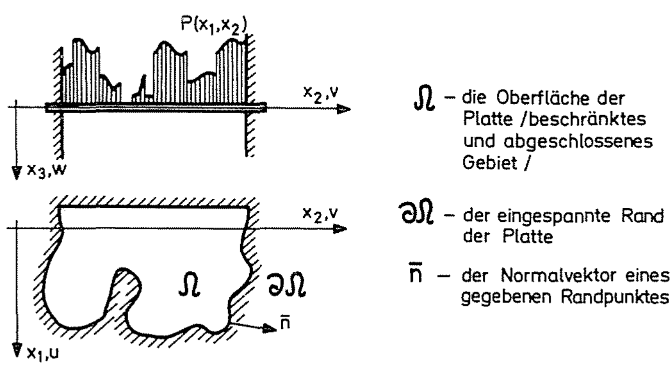

Fig. 1.

Betrachtet man die Gleichungen (1)—(3), dann bemerkt man, daß die Gleichung (3) unabhängig von den Gleichungen (1) und (2) untersucht werden kann. Für uns ist die Verschiebung w interessant, deshalb können wir unsere Untersuchungen auf die Differentialgleichung (3) beschränken.

Setzt man $\frac{1}{D} p(x_1, x_2) = p^*(x_1, x_2)$ und schreibt man diese Gleichung nebst den angenommenen geometrischen Randbedingungen einfacher auf, so hat man:

$$\Delta^2 w = p^*(x_1, x_2) \tag{4}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Man kann annehmen, daß $p^*(x_1, x_2)$ auf Ω quadratisch integrierbar ist, d. h. $p^*(x_1 x_2) \in L^2(\Omega)$. Diese Annahme ist in allen technisch möglichen Fällen erfüllt.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Gleichung (4) mit den gegebenen Randbedingungen auch als eine verallgemeinerte Randwertaufgabe auf dem Sobolew-Raum $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ interpretiert werden kann.

Multipliziert man die Gleichung (4) mit einer beliebigen $v \in C_0^2(\Omega)$ Funktion und integriert man auf Ω, so

$$\int_\Omega v \Delta^2 w \, dx = \int_\Omega v p^* \, dx \tag{5}$$

Führt man $u = \Delta w$ ein und umwandelt man die Beziehung mit Hilfe der symmetrischen Green-Formel, dann

$$\int_\Omega v \Delta(\Delta w) \, dx = \int_\Omega v \Delta u \, dx = \int_\Omega u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dl$$

Wegen der Wahl von v sind

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

und so kann die Gleichung (5) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\int_\Omega \Delta w \Delta v \, dx = \int_\Omega v p^* \, dx \tag{6}$$

Satz 1. Die Gleichung (6) ist gültig für jedes $v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$
Beweis Es ist bekannt, daß für jedes $v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ eine Folge $\{v_m\}$ existiert, wo $v_m \in C_0^2(\Omega)$ und $v_m \to v$, $m \to \infty$.

Für so eine Folge ist

$$\lim_{m \to \infty} \|\Delta v_m - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Da (6) für jedes v_m gültig ist, deshalb ist

$$\int_\Omega \Delta w \Delta v_m \, dx = \int_\Omega v_m p^* \, dx$$

Durch den Grenzübergang dieser Beziehung gelangt man zur Aussage des Satzes.

Satz 2. $\int_\Omega \Delta w \Delta v \, dx \equiv [w, v]$ ist ein Skalarprodukt im Raum $\mathring{W}_2^2(\Omega)$.

Beweis Man muß nachprüfen ob die folgenden 4 Forderungen der Definition des Skalarprodukts erfüllt sind:

1. $[w, v] = \overline{[v, w]}$
2. $[\lambda w, v] = \lambda [w, v]$
3. $[w_1 + w_2, v] = [w_1, v] + [w_2, v]$
4. $[w, w] \geqq 0$, wobei $[w, w] > 0$ ist für $w \neq 0$

Auf Grund der Definition ist es leicht einzusehen, daß die Forderungen 1.—3. erfüllt sind. Die Erfüllung der Forderung 4 läßt sich durch die Existenz der positiven Konstanten C_1 und C_2 — bei welchen die folgenden Ungleichungen befriedigt werden — beweisen.

$$C_1 \|w\|_{W_2^2(\Omega)} \geqq [w, w]^{1/2} \geqq C_2 \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

Bemerkung: Es kann auch bewiesen werden, daß ein C_2' existiert so,

$$[w, w]^{1/2} \geqq C_2' \|w\|_{W_2^2(\Omega)}$$

d. h. es könnte auch bewiesen werden, daß die Norm $\|W\|_{W_2^2(\Omega)}$ und die mit dem neuen Skalarprodukt definierte Norm äquivalent sind. Es ist aber kürzer und zum Beweisen unseres Satzes hinreichend die Existenz von C_2 einzusehen.

Betrachte man den folgenden Ausdruck, integriere man partiell und nütze man gleichzeitig $u|_{\partial\Omega} = 0$ aus. Dann erhält man die Beziehung:

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) u \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega} u_x^2 \, \mathrm{d}x$$

Wende man die Cauchysche Ungleichung an, so kann für die linke Seite die folgende Schätzung angegeben werden:

$$- \int_{\Omega} (\Delta u) u \, \mathrm{d}x \leqq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Daraus ergibt sich

$$\|u_x\|_{L^2(\Omega)} \leqq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{7}$$

Wende man jetzt die Poincaresche Ungleichung an. Laut deren existiert für die Funktionen $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ eine nur von Ω abhängige Konstante auf einem beschränkten Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ womit gilt

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq C_\Omega^2 \|u_x\|_{L^2(\Omega)} \tag{8}$$

Diese Ungleichung ist auch für jedes $u \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ gültig, weil $\mathring{W}_2^2(\Omega) \subset \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Die linke Seite der Ungleichung (7) kann mit Hilfe von (8) weiter verringert werden:

$$\frac{1}{C_\Omega^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Daraus ergibt sich

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \geqq \frac{1}{C_\Omega^2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \tag{9}$$

Weil die Existenz von C_1 auf Grund der Definitionen der Normen evident ist und laut der Beziehung (9) die Existenz von C_2 auch klar geworden ist, so ist der Satz bewiesen.

Danach läßt sich (6) auch in folgender Form schreiben:

$$[w, v] = \int_{\Omega} v p^* \, \mathrm{d}x \equiv g(v)$$

für jedes

$$v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$$

$g(v)$ ist ein stetiges lineares Funktional, dessen Linearität aus der Definition hervorgeht, und dessen Stetigkeit aus seiner Beschränktheit — die unten gezeigt wird — folgt.

$$|g(v)| = \left|\int_{\Omega} v p^* \,\mathrm{d}x\right| \leqq \|p^*\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqq \|p^*\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{\mathring{W}_2^2(\Omega)}$$

Mit Hilfe des Representationssatzes von Riesz läßt sich die eindeutige Existenz eines $v^* \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ einsehen. Bei diesem v^* gilt:

$$g(v) = [v^*, v] \quad \text{und} \quad \|g\| = \|v^*\|_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \equiv [v^*, v^*]^{1/2}$$

Das bedeutet, daß in dem Hilbert-Raum $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ ein Element existiert, mit dem das Funktional $g(v)$ — mit Hilfe des dort definierten und durch uns eingeführten Skalarprodukts — interpretiert werden kann.

So kann (5) in folgender verallgemeinerter Form geschrieben werden.

$$[w, v] = [v^*, v] \quad \text{für jedes} \quad v \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$$

Diese Gleichung kann nur dann befriedigt werden, wenn

$$w = v^*$$

Da v^* – laut des Satzes von Riesz — eindeutig existiert, daraus folgt, daß die $w(x)$ Lösung des Problems existiert und die Randwertaufgabe nur eine einzige Lösung besitzt.

Zusammenfassung

Beschränkt man die Untersuchungen in der mathematischen Modellierung der Schalen und Platten auf eine mit beliebiger Flächenbelastung belastete und eingespannte ebene Platte beliebiger Form und linearisiert man die Differentialgleichungen, so gelangt man zu einer inhomogenen biharmonischen Differentialgleichung. Diese kann beweisbar als eine verallgemeinerte Randwertaufgabe auf einem speziellen Sobolew-Raum interpretiert werden.

Die verallgemeinerte Randwertaufgabe macht uns mit Hilfe des bekannten Rieszschen Representationssatzes der Funktionalanalysis leicht beweisbar, daß die Lösung des originellen Problems existiert und die Randwertaufgabe nur eine einzige Lösung besitzt.

SYMBOLE

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	Plattensteifigkeit
ν	Poisson-Zahl
h	Plattenstärke
E	Elastizitätsmodul
$p(x_1, x_2)$	Intensität der Flächenbelastung

$x = (x_1, x_2) \in R^2, \qquad u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

$u_x = (u_{x_1}, u_{x_2})$

$u_x^2 = u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2, \; u_{xx}^2 = \sum_{i,j=1}^{2} u_{x_i x_j}$

$L^2(\Omega)$ Raum der im Sinne Lebesque quadratisch integrierbaren Funktionen

$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega u^2 \, dx)^{1/2}$

$C^l(\Omega)$ Gesamtheit der auf Ω l-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$C_0^l(\Omega)$ Teilmenge von $C^l(\Omega)$, wo die Funktionen außer einer kompakten Teilmenge von Ω gleich Null sind.

$W_2^l(\Omega)$ Sobolew-Raum, wo das folgende Skalarprodukt definiert ist.

$$(u, v)_{2,\Omega}^{(l)} = \int_\Omega \sum_{k=0}^{l} \sum_k \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \, dx$$

$\|u\|_{W_2^l(\Omega)} = ((u, u)_{2,\Omega}^{(l)})^{1/2}$

$\mathring{W}_2^l(\Omega)$ Unterraum von $W_2^l(\Omega)$, wo die Funktionen am Rand des Bereiches Ω bis zur Ordnung $l-1$ gleich Null sind.

$$\|g\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|g(v)|}{[v, v]^{1/2}}$$

Literatur

1. BERESOVSKIJ, A. A.: Vorträge über nichtlineare Randwertaufgaben der mathematischen Physik (in russischer Sprache), Kiew, (1976).
2. LADÜSCHENSKAJA, O. A.: Randwertaufgaben der mathematischen Physik (in russischer Sprache) Nauka Moskwa, (1973).

György KRAMM H-1521 Budapest