

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE LA LIAISON PARFAITE ET QUELQUES APPLICATIONS

Par

J. HERING

Chaire de Mécaniques Technique, Université Technique de Budapest

Reçu le 13 février 1980

Présenté par Prof. G. BÉDA

1. Interprétation classique de la liaison parfaite

Examinons une particule matérielle de masse m (point de masse) à laquelle au moment t s'appliquent une force active \mathbf{F} et une liaison géométrique ou cinématique déterminées par l'équation de forme

$$f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1)$$

où

$$f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \quad (1.2)$$

où: \mathbf{r} représente le vecteur de position du point de masse dans un système d'inertie quelconque,

$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ la vitesse du point de masse.

Sous l'action de la force active \mathbf{F} et de la réaction \mathbf{R} , créée par la liaison, le point de masse est animé d'un mouvement avec une accélération $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$ et on peut écrire:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = m \cdot \mathbf{a} . \quad (1.3)$$

Une liaison est nommée parfaite — au sens classique — si la puissance virtuelle \tilde{P}^* de la réaction \mathbf{R} est égale à zéro:

$$\tilde{P}^* = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (1.4)$$

où: $\tilde{\mathbf{v}}$ est la vitesse virtuelle du point de masse m , c'est-à-dire la différence de deux vitesses cinématiquement possibles:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'' . \quad (1.5)$$

Dans le cas de la liaison de forme (1.1), la condition (1.4) détermine de manière univoque le sens de la réaction \mathbf{R} . En effet, si on dérive (1.1) par rapport

au temps:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Soient les deux vitesses compatibles à l'équation de liaison (1.6) $\dot{\mathbf{r}}'$ et $\dot{\mathbf{r}}''$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}'' + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (1.7)$$

De la différence des deux équations, en considération de (1.5) on a:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (1.8)$$

En comparaison de (1.4), il est évident que:

$$\mathbf{R} \parallel \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.9)$$

Par contre, la liaison cinématique de forme (1.2), en plus du temps t et du vecteur de position \mathbf{r} , dépend aussi du vecteur vitesse $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_r$ et ainsi en général les vitesses possibles peuvent prendre n'importe quel sens. Il en découle que la différence de deux vitesses possibles, c'est-à-dire la vitesse virtuelle $\tilde{\mathbf{v}}$ aussi peut prendre n'importe quel sens. Donc, l'équation

$$\mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0$$

déterminant la liaison parfaite, en général ne peut s'accomplir que dans le cas si $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, ce qui signifie qu'en ce sens il n'existe pas de liaison parfaite.

Pour illustrer ce qui vient d'être dit, considérons la liaison déterminée par l'équation

$$\dot{\mathbf{r}}^2 - v^2(t) = 0 \quad (1.10)$$

où $v(t)$ est une fonction prescrite. La liaison (1.10) signifie que dans un instant donné la grandeur de la vitesse du point de masse est prescrite, mais son sens peut être quelconque. Le lieu géométrique des extrémités des vecteurs de vitesse possibles est une surface sphérique au rayon $v(t)$. Donc la direction des vitesses

virtuelles peut être quelconque et par suite la condition (1.4) ne peut pas être appliquée pour définir la notion de la liaison parfaite cinématique.

Nous allons montrer ci-après la généralisation de la notion de la liaison parfaite, applicable tant aux liaisons géométriques que cinématiques, ce qui nous conduira à des principes importants sur la base desquels on peut déterminer les équations de mouvements des systèmes mécaniques.

2. Interprétation généralisée de la liaison parfaite

Si une réaction \mathbf{R} est appliquée à une particule matérielle de masse m , se mouvant au moment t avec une vitesse \mathbf{v} , la puissance de la réaction est

$$P^* = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

Au sens général une liaison sera dénommée parfaite, si — étant donné un instant t , une position \mathbf{r} et une vitesse \mathbf{v} — les changements possibles de la puissance de la réaction P^* — pendant un intervalle suffisamment petit Δt — sont les mêmes, c'est-à-dire la vitesse-puissance de la réaction est stationnaire, soit sa variation est égale à zéro :

$$\delta \dot{P}^* = 0. \quad (2.2)$$

Soient à l'instant $t + \Delta t$:

$\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}$ — la réaction,

$\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_2$ — deux vitesses possibles du point de masse.

De cette façon, les deux puissances possibles de la réaction au moment $t + \Delta t$ sont

$$\begin{aligned} P_1^* &= P^* + \Delta P_1^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_1) \\ P_2^* &= P^* + \Delta P_2^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

En conséquence de (2.2), la différence des puissances possibles au moment $t + \Delta t$ est égale à zéro :

$$\Delta P_2^* - \Delta P_1^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) \cdot (\Delta \mathbf{v}_2 - \Delta \mathbf{v}_1) = 0. \quad (2.4)$$

A l'aide des accélérations \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , admises par la liaison au moment t , on peut écrire :

$$\Delta \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 \cdot \Delta t \quad \text{et} \quad \Delta \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \cdot \Delta t \quad (2.5)$$

et après la substitution à (2.4):

$$\Delta P_2^* - \Delta P_1^* = (\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \cdot \Delta t = 0. \quad (2.6)$$

En divisant (2.6) par Δt et faisant la valeur-limite de $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient pour la différence des vitesses-puissance possibles de la réaction que

$$\dot{P}_2^* - \dot{P}_1^* = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) = 0. \quad (2.7)$$

En choisissant l'accélération réelle \mathbf{a} , au lieu de l'accélération possible \mathbf{a}_1 , on obtient la définition générale de la liaison parfaite:

$$\delta \dot{P}^* = \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{a} = 0 \quad (2.8)$$

c'est-à-dire, suivant (2.8):

— Un liaison est parfaite, si le produit scalaire de la réaction par la variation de l'accélération est égal à zéro, soit:

— dans le cas d'une liaison parfaite — dans le champ d'accélération possible, admis par la liaison — la vitesse-puissance de la réaction est stationnaire.

Examinons qu'est-ce que la condition (2.8) veut dire dans le cas d'une liaison géométrique (1.1) et d'une liaison cinématique (1.2):

— Dans le cas d'une liaison géométrique, par la dérivation double de l'équation (1.1) par rapport au temps:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Donc, la variation d'accélération compatible avec la liaison:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.10)$$

et en comparaison avec (2.8), on constate que

$$\mathbf{R} \parallel \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.11)$$

Celui-ci est conforme à la connexion (1.9), obtenue par l'interprétation classique de la liaison parfaite.

— Dans le cas d'une liaison cinématique, par la dérivation de l'équation de liaison (1.2) par rapport au temps on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2.12)$$

d'où:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} = 0. \quad (2.13)$$

En comparant (2.13) à (2.8), on obtient que

$$\mathbf{R} \parallel \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (2.14)$$

qui n'a pas été démontrable par l'interprétation classique.

Dans l'exemple donné par l'équation de liaison (1.10):

$$\mathbf{R} \parallel \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = 2 \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

c'est-à-dire:

$$\mathbf{R} \parallel \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}. \quad (2.15)$$

En substituant dans l'équation (2.8) la valeur de la réaction \mathbf{R} déterminée par (1.3),

$$\mathbf{R} = m \cdot \mathbf{a} - \mathbf{F} \quad (2.16)$$

on obtient le principe de Gauss concernant la particule matérielle:

$$(m \cdot \mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{a} = 0. \quad (2.17)$$

Au lieu de (2.17) on peut écrire:

$$\delta \left(\frac{1}{2} m \cdot \mathbf{a}^2 - \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} \right) = 0. \quad (2.18)$$

En introduisant l'expression de l'énergie d'accélération d'après Appell

$$S = \frac{1}{2} m \cdot \mathbf{a}^2 \quad (2.19)$$

le principe de la vitesse-puissance de la réaction, déterminé par (2.8), est le suivant:

$$\delta S = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{a}. \quad (2.20)$$

3. Propriétés extrémales de la liaison parfaite

Considérons une particule matérielle de masse m se mouvant avec une accélération \mathbf{a} , à laquelle sont appliquées une force active \mathbf{F} et une réaction \mathbf{R} dans un moment t . En séparant l'effet des forces \mathbf{F} et \mathbf{R} , d'une part, on peut dire qu'au cours du mouvement sans liaison (mouvement libre) la force \mathbf{F} provoque une accélération \mathbf{a}^0 :

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}^0 \quad (3.1)$$

d'autre part, la réaction \mathbf{R} modifie cette accélération \mathbf{a}^0 d'une valeur $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{R} = m \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.2)$$

Donc, l'accélération résultante du mouvement forcé est égale à

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 + \boldsymbol{\alpha} \quad (3.3)$$

et ainsi:

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = m(\mathbf{a}^0 + \boldsymbol{\alpha}) = m \cdot \mathbf{a} \quad (3.4)$$

Une valeur possible de l'accélération, et compatible avec la liaison déterminée par l'équation (3.3), est

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}^0 + \boldsymbol{\alpha}_1 \quad (3.5)$$

et en conséquence, la variation de l'accélération est:

$$\delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha} = \delta \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.6)$$

Substituons les expressions (3.2) et (3.6) à (2.8):

$$m \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (3.7)$$

soit:

$$\delta \left(\frac{1}{2} m \cdot \boldsymbol{\alpha}^2 \right) = 0 \quad (3.8)$$

ou:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{R}^2}{m} \right) = 0 \quad (3.9)$$

ou bien, avec la valeur

$$S^* = \frac{1}{2} m \cdot \boldsymbol{\alpha}^2 \quad (3.10)$$

de l'énergie d'accélération forcée:

$$\delta S^* = 0. \quad (3.11)$$

En conclusion, pour les liaisons parfaites nous constatons les principes minimums suivants:

a) La liaison parfaite modifie le mouvement libre du point de masse, se produisant à l'effet de la force active \mathbf{F} , de l'accélération α la plus petite cinématiquement possible:

$$\delta \left(\frac{1}{2} m \cdot \alpha^2 \right) = 0.$$

b) La liaison parfaite provoque une réaction minimum:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{R}^2}{m} \right) = 0.$$

c) L'énergie d'accélération, provoquée par la liaison parfaite, est minimum:

$$\delta S^* = 0.$$

d) La valeur de la vitesse-puissance de la réaction parfaite, dans un champ d'accélération possible et admis par la liaison, est minimum:

$$\delta \dot{P}^* = \delta S^* = 0.$$

En vertu des constatations ci-dessus, on peut énoncer que la liaison parfaite perturbe le mouvement sans liaison (l'accélération) du point de masse dans la mesure la plus petite possible.

4. Systèmes mécaniques, soumis aux liaisons parfaites

Considérons un système mécanique, soumis à des liaisons parfaites et se composant de N particules matérielles, à l' i -ième élément duquel s'appliquent une force active \mathbf{F}_i et une réaction \mathbf{R}_i . Alors:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = m_i \cdot \mathbf{a}_i \quad (4.1)$$

où: m_i la masse de l' i -ième particule,
 \mathbf{a}_i l'accélération de l' i -ième particule.

Si dans le système toutes les liaisons sont parfaites, c'est-à-dire, s'il s'agit d'un système mécanique parfait, en vertu de (2.8), pour toutes les réactions \mathbf{R}_i est valable que:

$$\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0. \quad (4.2)$$

Après la sommation pour tout le système:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0. \quad (4.3)$$

En considération de (4.1) et de (4.3), on obtient le principe de Gauss:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \cdot \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0. \quad (4.4)$$

Le principe de Gauss, exprimé par l'équation (4.4), est le principe le plus général déterminant le mouvement des systèmes mécaniques, pouvant être formulé comme principe minimum. Après la substitution de (3.2) et (3.6) à (4.3):

$$\delta \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{R}_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 = 0 \quad (4.5)$$

c'est-à-dire, dans les systèmes mécaniques parfaits, la somme quadratique des réactions spécifiques — par rapport aux racines carrées des masses m_i — est minimum.

Après la transformation de l'équation (4.4)

$$\delta \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i \cdot \mathbf{a}_i^2 - \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{a}_i \right) = 0 \quad (4.6)$$

et en considération de l'énergie d'accélération

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \mathbf{a}_i^2 \quad (4.7)$$

du système, on obtient:

$$\delta S = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i. \quad (4.8)$$

A titre d'indication d'un système mécanique parfait, considérons un corps rigide défini par des équations de liaison géométrique stationnaires de forme

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \text{constante} \quad (4.9)$$

où \mathbf{r}_i et \mathbf{r}_j sont les vecteurs de position de l' i -ième resp. j -ième particule, dans un système d'inertie quelconque.

Cherchons le système de forces intérieures auquel la liaison est équivalente.

Pour déterminer les interactions des points de masse, divisons en trois parties les forces, appliquées aux points de masse m_i et m_j :

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{B}_i + \mathbf{R}_{ij} = m_i \cdot \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j + \mathbf{R}_{ji} = m_j \cdot \mathbf{a}_j \quad (4.10)$$

où:

- \mathbf{F}_i et \mathbf{F}_j sont les forces actives (extérieures), appliquées aux points de masse examinés,
- $\mathbf{B}_i = \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} \mathbf{B}_{ik}$ et $\mathbf{B}_j = \sum_{\substack{k \neq j \\ k \neq i}} \mathbf{B}_{jk}$ sont les effets, exercés par les particules matérielles du solide — différentes de m_i et m_j — sur les points de masse m_i resp. m_j qui doivent être considérés comme forces extérieures pour le système à deux particules,
- \mathbf{R}_{ij} et \mathbf{R}_{ji} sont les interactions des deux points de masse examinés et déterminés par l'équation de liaison (4.9):

$$\mathbf{R}_{ij} + \mathbf{R}_{ji} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Par la dérivation double de l'équation de liaison (4.9) par rapport au temps on obtient:

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)^2 + (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = 0 \quad (4.12)$$

d'où la variation des accélérations est:

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\delta \mathbf{a}_i - \delta \mathbf{a}_j) = 0. \quad (4.13)$$

Supposons que la liaison (4.9), liant les points de masse m_i et m_j , est parfaite. Dans ce cas, en vertu de (2.8):

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0$$

$$\mathbf{R}_{ji} \cdot \delta \mathbf{a}_j = 0 \quad (4.14)$$

ce qui — en considération de (4.11) — peut être écrit dans la forme

$$\mathbf{R}_{ij} \cdot (\delta \mathbf{a}_i - \delta \mathbf{a}_j) = 0. \quad (4.15)$$

Suivant les relations (4.11), (4.13) et (4.15) on a

$$\mathbf{R}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \parallel \mathbf{R}_{ji} \quad (4.16)$$

qui complète le troisième axiome newtonien, déterminé par (4.11), en énonçant que les réactions de liaison parfaite, définies par (4.9), ne sont pas seulement de grandeur égale, mais qu'elles ont une ligne d'action commune.

5. Équations de mouvement des systèmes mécaniques non-holonomes

Soient dans un système mécanique à N particules matérielles des liaisons parfaites

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d) \quad (5.1)$$

et géométriques

$$h_{\beta}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g) \quad (5.2)$$

cinématiques

Donc, le degré de liberté du système est:

$$n = 3 \cdot N - d - g \quad (5.3)$$

En considération des liaisons géométriques, à l'aide de

$$m = 3 \cdot N - d = n + g \quad (5.4)$$

paramètres (coordonnées généralisées) q_k ($k = 1, \dots, m$) on pourra exprimer les vecteurs de position \mathbf{r}_i en fonction des coordonnées généralisées. Après l'introduction du vecteur de coordonnée généralisée

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

les vecteurs de position \mathbf{r}_i sont:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (5.6)$$

et après la substitution à (5.2), on obtient les équations de liaison cinématique:

$$h_{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g) \quad (5.7)$$

En ce qui suit, nous nous bornerons aux liaisons cinématiques qui sont des fonctions linéaires des vitesses $\dot{\mathbf{r}}_i$ resp. de la vitesse généralisée $\dot{\mathbf{q}}$, c'est-à-dire:

$$l_{\beta}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{h}_{\beta} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (\beta = 1, \dots, g) \quad (5.8)$$

où

$$\mathbf{h}_\beta = \mathbf{h}_\beta(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} h_{\beta 1} \\ \vdots \\ h_{\beta m} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Formons maintenant les $n = m - g$ combinaisons linéaires appropriées des vitesses généralisées \dot{q}_k , les pseudovitesse \dot{s}_j :

$$\dot{s}_j = \mathbf{b}_j \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (5.10)$$

où

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jm} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

A l'aide du vecteur colonne

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_n \\ l_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ l_g \end{bmatrix} \text{ et de la matrice carrée } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \\ h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_{g1} & \dots & h_{gm} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

on obtient:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5.13)$$

Par un choix approprié des fonctions $b_{ji}(\mathbf{q}, t)$, on peut toujours obtenir que

$$\det \mathbf{B} \neq 0 \quad (5.14)$$

et avec la notation $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{C}$ on a:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{s}}. \quad (5.15)$$

A la base de (5.6), la vitesse du point de masse m_i sera:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{q} + \mathbf{d}_i \quad (5.16)$$

ou avec la substitution (5.15):

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{d}_i = \mathbf{H}_i \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{d}_i \quad (5.17)$$

où: $\mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C} = \mathbf{H}_i$.

A la base de (5.17), l'accélération du point de masse m_i sera:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{H}}_i \cdot \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{H}_i \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\mathbf{d}}_i \quad (5.18)$$

Donc, l'énergie d'accélération du système sera:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i^2 = S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{s}}, t) \quad (5.19)$$

et sa variation par rapport à la pseudo-accélération $\ddot{\mathbf{s}}$:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial \ddot{\mathbf{s}}} \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}} \quad (5.20)$$

où:

$$\delta \ddot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \delta \ddot{s}_1 \\ \vdots \\ \delta \ddot{s}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

car

$$\delta l_\beta = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g) \quad (5.22)$$

La variation de l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{a}_i$, à partir de (5.18) est:

$$\delta \mathbf{a}_i = \delta \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}_i \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}}. \quad (5.23)$$

Après la substitution des équations (5.20) et (5.23) à (4.8), on a:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\mathbf{s}}} \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{Q} \cdot \delta \ddot{\mathbf{s}} \quad (5.24)$$

où: \mathbf{F}_i^T est la matrice transposée de \mathbf{F}_i et

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{H}_i = \mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_n] \quad (5.25)$$

est la force généralisée qui peut être déterminée à la base de l'identité

$$\delta S = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{F}_N \cdot \delta \mathbf{a}_N = Q_1 \cdot \delta s_1 + \dots + Q_n \cdot \delta s_n. \quad (5.26)$$

Étant donné que tous les δs_j sont indépendants les uns des autres on obtient de (5.24) les équations de mouvement d'Appell des systèmes non-holonomes:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{s}}} = \mathbf{Q}$$

resp.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{s}_j} = Q_j, \quad (j=1, \dots, n) \quad (5.27)$$

6. Équations de mouvement des systèmes holonomes

Dans les systèmes holonomes il n'y a que des liaisons géométriques, c'est-à-dire:

$$n = 3 \cdot N - d = m \quad (6.1)$$

En conséquence, au lieu des pseudo-vitesses, on peut calculer avec les vitesses généralisées q_k :

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{q}} \quad (6.2)$$

et ainsi, en vertu de (5.13) et (6.2), les matrices

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{I} \quad (6.3)$$

sont des matrices d'unité et à la base de (5.25), la force généralisée est:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{H}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{C} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{D}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^T \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (6.4)$$

Donc, l'équation d'Appell est la suivante:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q} \quad (6.5)$$

où:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i^2 \right] = \sum_{i=1}^N m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i^2 \right) = \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

dans laquelle — à la base de (5.16), (5.17), (5.18) et (6.3) — nous avons tenu compte de

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{D}_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \tag{6.7}$$

et substitué la valeur

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i^2 \tag{6.8}$$

de l'énergie cinétique. Enfin, en tenant compte de (6.5) et (6.6), on obtient l'équation de Lagrange, valable pour les systèmes holonomes:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, \dots, n) \tag{6.9}$$

7. Équations de mouvement du corps rigide

A l'aide de l'accélération \mathbf{a}_S du centre de gravité S , de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ et de l'accélération angulaire $\boldsymbol{\varepsilon}$ du corps rigide à la masse m , l'énergie d'accélération est égale à

$$S = \frac{1}{2} \int_m [\mathbf{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]^2 dm \tag{7.1}$$

d'où, en considération de

$$\int_m \mathbf{r} \cdot d\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

on obtient

$$S = \frac{1}{2} m \cdot \mathbf{a}_S^2 + \frac{1}{2} \int_m [\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]^2 dm. \quad (7.3)$$

Après l'intégration de (7.3):

$$S = \frac{1}{2} m \cdot \mathbf{a}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\pi}_S) + [\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega} - \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^2]^2 \cdot (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\Theta}_S - \boldsymbol{\theta}_S) \quad (7.4)$$

où:

$$\boldsymbol{\theta}_S = \int_m [\mathbf{I} \cdot \mathbf{r}^2 - \mathbf{r} \circ \mathbf{r}] \cdot d\mathbf{m} \quad (7.5)$$

est le tenseur d'inertie, calculé au centre de gravité du corps rigide

$$\boldsymbol{\pi}_S = \boldsymbol{\theta}_S \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (7.6)$$

est le moment cinétique, calculé au centre de gravité du corps rigide et

$$\boldsymbol{\Theta}_S = \int_m \mathbf{r}^2 \cdot d\mathbf{m} \quad (7.7)$$

est le moment d'inertie, calculé au centre d'inertie du corps.

Considérons comme pseudo-vitesses les coordonnées de la vitesse du centre de gravité et celles de la vitesse angulaire:

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = v_S \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{s}}_2 = \boldsymbol{\omega}. \quad (7.8)$$

Le dernier membre de l'équation (7.4) étant indifférent au point de vue de l'équation d'Appell, il suffit de déterminer la valeur

$$S^0 = \frac{1}{2} m \cdot \mathbf{a}_S^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + (\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\pi}_S) \quad (7.9)$$

Pour déterminer les forces généralisées, nous prenons comme point de départ le torseur des forces extérieures, réduit au centre de gravité S du solide:

$$[\mathbf{F}, \mathbf{M}_S]_S.$$

A la base de (5.26), la variation de l'énergie d'accélération est:

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{a}_S + \mathbf{M}_S \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_1 \cdot \delta \dot{\mathbf{s}}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot \delta \dot{\mathbf{s}}_2 \quad (7.10)$$

d'où, en vertu de (7.8):

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{M}_S. \quad (7.11)$$

Donc, les équations d'Appell donnent d'une part:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}_S} = \mathbf{Q}_1$$

c'est-à-dire, en considération de (7.9) et (7.11), on obtient le théorème de l'impulsion:

$$m \cdot \mathbf{a}_S = \mathbf{F} \quad (7.12)$$

et d'autre part:

$$\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Q}_2$$

c'est-à-dire:

$$\boldsymbol{\theta}_S \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi}_S = \mathbf{M}_S \quad (7.13)$$

l'équation de mouvement du solide d'Euler.

Résumé

L'étude expose l'interprétation classique de la liaison parfaite et indique que cette interprétation ne s'applique qu'aux liaisons géométriques. Par la suite, elle donne une détermination nouvelle pour la définition de la liaison parfaite qui renferme l'interprétation classique, mais s'applique aussi aux liaisons cinématiques. A la base de cette définition de la liaison parfaite, on établit des principes minimums qui conduisent au principe le plus général, déterminant le mouvement des systèmes mécaniques, au principe de Gauss. L'étude montre, comment on peut déterminer — à la base des principes ci-dessus — les équations de mouvements des différents systèmes mécaniques.

Bibliographie

1. P. APPELL: Traité de Mécanique rationnelle. Tome 2. Gauthier-Villars, Paris — 1953. p: 337 — 395, 492 — 499.
2. J. PÉRÈS: Mécanique générale. Masson et Cie. — Paris — 1962. p: 77 — 99, 192 — 226.
3. Л. А. ПАРС: Аналитическая динамика — Наука, Москва — 1971. (A treatise on analytical dynamics)
4. F. ГАНТМАНЕР: Lectures in analytical mechanics. Mir, Moscow — 1975. p: 9 — 65 (Лекции по аналитической механике)

Dr. József HERING, H-1521 Budapest