

# DER EINFLUSS DER MODELLDICKE AUF DIE BILDFEHLER DER EBENEN SPANNUNGSOPTIK

Von

F. THAMM

Lehrstuhl für Technische Mechanik, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 10 Februar 1980

Vorgelegt von Prof. dr. Gy. BÉDA

Die ebene Spannungsoptik untersucht den Spannungszustand in Scheiben, die in ihrer Ebene belastet sind. Die Modellgesetze zur Übertragung der Meßergebnisse auf eine Hauptausführung gestatten ein Verzerren der Modelldicke gegenüber der Scheibendicke der Hauptausführung [1]. Bei den meistens benützten spannungsoptischen Geräten mit diffusem Strahlengang nehmen am Bildaufbau auch Lichtstrahlen teil, die die Modellfläche nicht genau senkrecht durchdringen. Diese verursachen Abbildungsfehler, die unter Annahme ideal ebenen Spannungszustandes im Modell bereits früher untersucht worden sind [2, 3].

Wegen der endlichen Modelldicke sind jedoch Zweifel an der Zulässigkeit der Annahme eines ideal ebenen Spannungszustandes bei derartigen Fehleranalysen aufgetreten. Aus diesem Grunde soll nun die Auswirkung der Verzerrung des Spannungszustandes durch die endliche Modelldicke auf die Bildfehler des spannungsoptischen Bildes abgeschätzt werden.

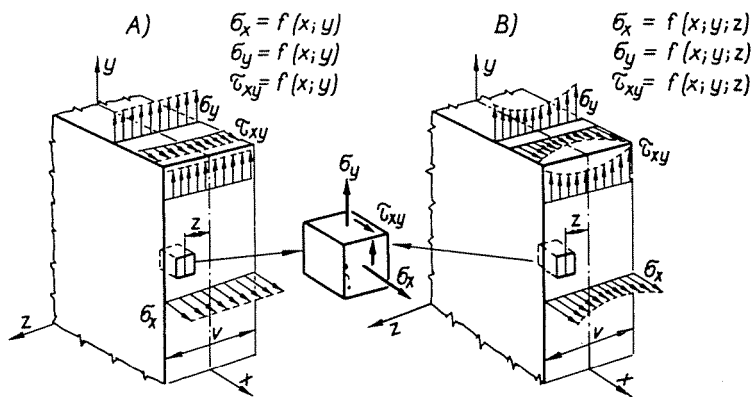


Abb. 1. A: ideal ebener Spannungszustand; B: verallgemeinerter ebener Spannungszustand

Als ideal eben soll ein Spannungszustand bezeichnet werden, bei dem die Spannungskomponenten längs der Dicke der Scheibe konstant sind (Abb. 1a). Ein derartiger Zustand tritt nur bei sehr dünnen, streng genommen unendlich dünnen Scheiben auf.

Im Falle endlicher Scheibendicke ändern sich die Spannungskomponenten entlang der Scheibendicke innerhalb gewisser Grenzen, selbst im Falle eines ebenen Spannungszustandes (Abb. 1b). In der technischen Praxis werden jedoch die unter der Voraussetzung eines ideal ebenen Spannungszustandes abgeleiteten Formeln für die Spannungsverteilung auch in Scheiben endlicher Dicke angewendet.

Der Spannungszustand in Scheiben endlicher Dicke weicht besonders in der Umgebung von Spannungsspitzen von dem ideal ebenen ab. Diese Erscheinung ist von Southwell [4] und Coker und Filon [5] untersucht worden. Es ist auf theoretischem Wege ein Zusammenhang zwischen dem ideal ebenen und dem tatsächlich zu erwartenden Spannungszustand abgeleitet worden. Dieser als „verallgemeinerter ebener Spannungszustand“ bezeichnete Zustand wird durch die Gl. (1) beschrieben.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \bar{\sigma}_x + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[ z^2 - \frac{\nu^2}{12} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \\ \sigma_y &= \bar{\sigma}_y + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[ z^2 - \frac{\nu^2}{12} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \\ \tau_{xy} &= \bar{\tau}_{xy} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[ z^2 - \frac{\nu^2}{12} \right] \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y) \\ \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\quad (1)$$

Hierbei sind  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  die Komponenten eines der Airyschen Spannungsfunktion gehorchenden, ideal ebenen Spannungszustandes. Die Scheibenebene liegt in der  $xy$ -Ebene,  $\nu$  ist die Scheibendicke und  $\nu$  die Querdehnungszahl. Durch Integration der einzelnen Spannungskomponenten längs der Scheibendicke läßt sich leicht nachweisen, daß  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  die Mittelwerte der betreffenden Spannungskomponenten des verallgemeinerten ebenen Spannungszustandes längs der Scheibendicke darstellen

Das spannungsoptische Isochromatenbild zeigt die Differenz der Hauptspannungen des aus  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  gebildeten Spannungszustandes. Da diese durch die Airysche Spannungsfunktion beschrieben werden, wird üblicherweise gefolgert, daß die ebene Spannungsoptik, unabhängig von der Modelldicke

und der dadurch bedingten Verzerrung der Spannungsverteilung, den ideal ebenen Spannungszustand anzeigt.

Der praktische Wert der Gl. (1) ist jedoch aus folgenden Gründen stark begrenzt:

1) Der verallgemeinerte ebene Spannungszustand kann die Randbedingungen der Scheibe nur für deren Mittelwert über die Scheibendicke erfüllen. So ergeben sich auch auf unbelasteten Scheibenkonturen Spannungskomponenten senkrecht auf die Konturenoberflächen. Die tatsächliche Spannungsverteilung muß somit, wenigstens in der Umgebung der Konturen, von der der Gl. (1) abweichen und kann nicht mehr eben sein, d. h. daß auch Spannungskomponenten senkrecht auf die Scheibenmittelfläche auftreten werden. Da jedoch die Randbedingungen für den Mittelwert der Spannungskomponenten längs der Scheibendicke erfüllt sind, muß die Abweichung der tatsächlichen Spannungsverteilung von der der Gl. (1) wegen des Prinzips von De Saint Vénant auf die unmittelbare Umgebung des Scheibenrandes beschränkt bleiben. Aus Analogiebetrachtungen zu anderen bekannten Spannungsverteilungen kann die Breite dieser Randzone als etwa gleich der Scheibendicke  $v$  geschätzt werden (Abb. 2).

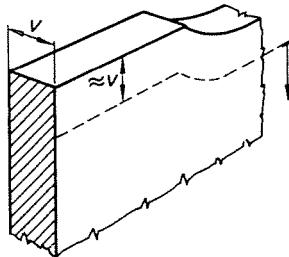


Abb. 2. Der Gültigkeitsbereich des Southwell-Coker-Filon-Gleichungen für den verallgemeinerten ebenen Spannungszustand erstreckt sich etwa auf den Bereich innerhalb der gestrichelten Linie in Pfeilrichtung

2) In jenen Teilen der Scheibe, wo die Gültigkeit der Gl. (1) vorausgesetzt werden kann, ist die Abweichung zwischen idealem und verallgemeinertem ebenem Spannungszustand verschwindend klein, sofern der untersuchte Bauteil tatsächlich als Scheibe aufgefaßt werden kann, wenn also die Abmessungen des Grundrisses der Scheibe im Vergleich zu der Scheibendicke groß sind.

Wenn somit die Meßfehler untersucht werden sollen, die durch die Verzerrung der Spannungsverteilung in Scheiben endlicher Dicke verursacht werden, muß anstelle der Gl. (1) auch der nicht mehr ebene Spannungszustand berücksichtigt werden. Die Untersuchung muß folgenden Fragen beantworten:

1) Gibt es eine Abweichung zwischen der nach dem Isochromatenbild ausgewerteten Spannungsverteilung und dem ideal ebenen Spannungszustand im Falle streng senkrechter Durchleuchtung der Modellfläche?

2) Welche zusätzlichen Auswertefehler entstehen bei der Durchleuchtung im einfachen spannungsoptischen Gerät, wenn die Durchleuchtungsrichtung von der Senkrechten zur Scheibenebene geringfügig abweicht?

Da die größten Meßfehler an den Rändern der Scheibe an Stellen mit kleinen Abrundungsradius zu erwarten sind, wurden die Untersuchungen für den Fall des kreisförmigen Loches in einer auf einachsigen Zug beanspruchten „unendlichen“ Scheibe durchgeführt. Die analytische Lösung dieses Problems ist bekannt [6] [7] [8]. GREEN [7] und ALBLAS [8] haben sogar den Mittelwert der Tangentialspannung am Lochrand über die Scheibendicke bestimmt. Ihren Untersuchungen gemäß tritt die größte Abweichung des Mittelwertes von dem ideal ebenen Spannungszustand an der Stelle der Spannungsspitze im Falle  $v/a = 2-6,7$  auf. Hierbei ist  $v$  die Scheibendicke und  $a$  der Lochradius. Die Abweichung beträgt in diesem Falle etwa 1%. Bei Vergrößerung des Lochradius gegenüber der Scheibendicke fällt die Abweichung rasch ab, und beträgt für  $v/a = 1$  nur mehr 0,48%. Diese Abweichung von der ideal elastischen Spannungsverteilung ist als Meßfehler etwa um eine Größenordnung kleiner als jene, die durch die nicht streng senkrechte Durchstrahlung eines spannungsoptischen Modells im einfachen spannungsoptischen Gerät verursacht werden kann (s. [3]) und kann somit dieser gegenüber für die technische Praxis vernachlässigt werden.

Somit verbleibt noch die Frage, inwieweit die Verzerrung der Spannungsverteilung am Scheibenrand auch die durch nicht streng senkrechte Durch-

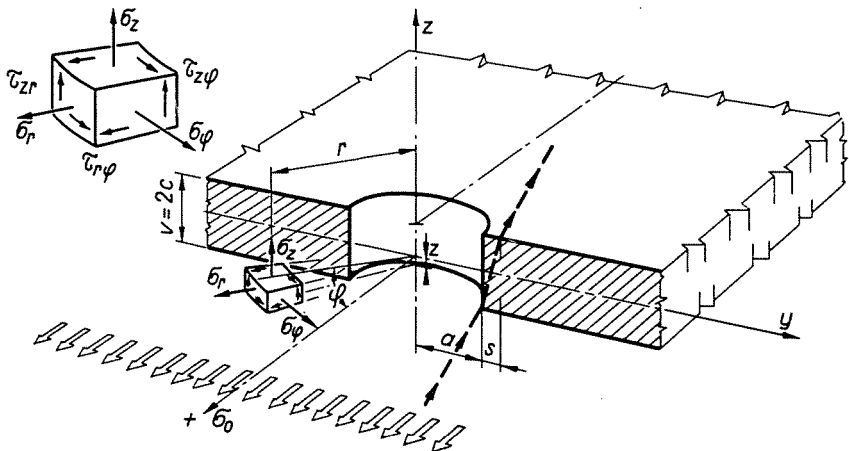


Abb. 3. Koordinaten und Spannungscomponenten zur Beschreibung der Spannungsverteilung in einer, mit einer Bohrung versehenen Scheibe der Dicke  $v$

Tabelle I  
 Der Spannungszustand in der Umgebung eines Loches in einer auf Zug beanspruchten Scheibe  
 endlicher Dicke nach Sternberg und Sadovsky [6]

Spannungskomponenten	Ausdrücke für ideal ebenen Spannungszustand	Die wegen der endlichen Scheibenbreite auftretenden zusätzlichen Glieder
$\frac{\sigma_r}{\sigma_0}$	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\varphi$	$\frac{1}{2\Delta^2} \bar{Z}_n'' \cos 2\varphi \sum_{i=1}^2 \ln \rho \frac{\lambda_{1i}}{\rho^{q+i}}$
$\frac{\sigma_\varphi}{\sigma_0}$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\varphi$	$\frac{1}{2\Delta^2} \bar{Z}_n'' \cos 2\varphi \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\rho^{q+i}} \{[-(q+i-1) \ln \rho + 1] \lambda_{1i} + \ln \rho (\lambda_{2i} + 2\lambda_{3i})\}$
$\frac{\tau_{r\varphi}}{\sigma_0}$	$\frac{1}{2}\left(-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) \sin 2\varphi$	$\frac{1}{2\Delta^2} \bar{Z}_n'' \sin 2\varphi \sum_{i=1}^2 \ln \rho \frac{\lambda_{2i}}{\rho^{q+i}}$
$\frac{\sigma_z}{\sigma_0}$		$\frac{1}{2} \bar{Z}_n \cos 2\varphi \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\rho^{q+i+2}} \{4[(q+i-1) \ln \rho - 1] \lambda_{1i} + [(q+i-4) \ln \rho - 1] \lambda_{2i} - 2[(q+i+2) \ln \rho - 1] \lambda_{3i}\}$
$\frac{\tau_{rz}}{\sigma_0}$		$\frac{1}{2\Delta} \bar{Z}_n' \cos 2\varphi \cdot \ln \rho \cdot \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_{2i}}{\rho^{q+i+1}}$
$\frac{\tau_{\varphi z}}{\sigma_0}$		$\frac{1}{2\Delta} \bar{Z}_n' \sin 2\varphi \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\rho^{q+i+1}} \{-2[(q+i-1) \ln \rho - 1] \lambda_{1i} + 2 \ln \rho \lambda_{2i} + [(q+i+2) \ln \rho - 1] \lambda_{3i}\}$

$\Delta = 2 \frac{v}{a}; \quad \rho = \frac{r}{a}; \quad \bar{Z}_n = \Delta^4 [(\zeta)^n - 1]^2 \quad \text{für } \zeta = \frac{z}{c} > 0 \quad \lambda_{1i}; \lambda_{2i}; \lambda_{3i};$   
 $\bar{Z}_n(-\zeta) = \bar{Z}_n(\zeta) \quad q; n: \text{Konstanten.}$

leuchtung der Modellfläche entstehenden Meßfehler beeinflusst. Um diesen Einfluß abzuschätzen, wurde für eine angenommene Durchleuchtungsrichtung das System der „sekundären Hauptspannungen“ für den Weg des Lichtstrahles berechnet, längs des Weges integriert, und mit den Resultaten der früheren Arbeiten [2, 3] verglichen. Für die Spannungsverteilung wurden die in der Arbeit von STERNBERG und SADOWSKY [6] angegebenen Funktionen verwendet, da in dieser die einzelnen Spannungskomponenten in geschlossener Form angegeben sind. Diese Funktionen sind in der Tabelle I zusammengefaßt. Die Bedeutung der einzelnen Koordinatenrichtungen und Spannungskomponenten zeigt Abb. 3. Es soll erwähnt werden, daß in den Formeln der Tabelle I die den räumlichen Spannungszustand darstellenden Glieder additiv zu den Ausdrücken des ideal ebenen Spannungszustandes erscheinen.

Die Untersuchung ist für einen Lichtstrahl durchgeführt worden, der gemäß Abb. 4 an der Stelle der Spannungsspitze am Lochrand in das Modell eintritt und dieses anschließend in der  $yz$ -Ebene durchdringt. Der Lichtstrahl bildet während des Durchganges durch das Modell mit der  $z$ -Achse den Winkel  $\alpha$  und tritt in einer Entfernung  $s$  vom Lochrand aus dem Modell heraus. Mit den Bezeichnungen der Abb. 3 und 4 ist  $s = v \operatorname{tg} \alpha$ .

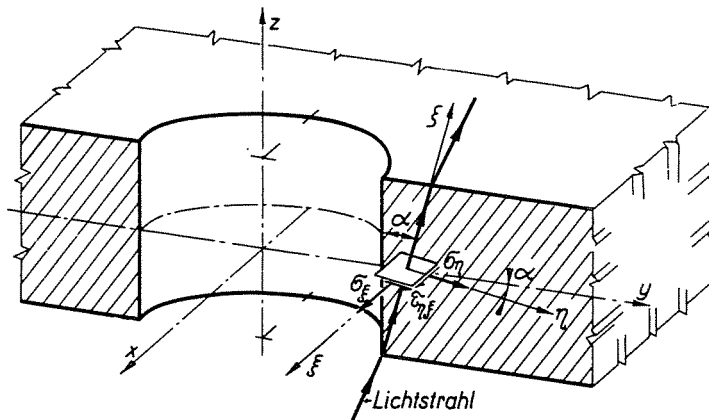


Abb. 4. Spannungskomponenten, die bei nicht streng senkrechtem Strahlendurchgang durch das Modell das Isochromatenbild beeinflussen

Beim Durchgang dieses Lichtstrahles durch das Modell ergibt das Isochromatenbild das Bild der Differenz der „sekundären Hauptspannungen“, die aus den Komponenten des Spannungszustandes in der Ebene (Abb. 4) senkrecht zur Strahlenrichtung gemäß der Gleichung

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \sqrt{(\sigma_\xi - \sigma_\eta)^2 + 4\tau_{\xi\eta}^2} \quad (2)$$

gebildet wird.

Die  $\xi$ -Achse weist in die Richtung des Lichtstrahles, die  $\zeta$ -Achse ist parallel zur  $x$ -Achse des auf die Scheibenmittelfläche aufgelegten  $xyz$ -Koordinatensystems. Die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen  $\xi\eta\zeta$  können im  $xyz$ -System mit den Bezeichnungen der Abb. 4 folgendermaßen angeschrieben werden

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_\zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Wegen der Symmetrie des Spannungszustandes in der  $yz$ -Ebene kann der Spannungstensor dort in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

Damit können die Spannungskomponenten der Gl. (2) in folgende Form gebracht werden:

$$\sigma_\xi = \mathbf{e}_\xi^* \mathbf{T} \mathbf{e}_\xi = \sigma_x$$

$$\sigma_\eta = \mathbf{e}_\eta^* \mathbf{T} \mathbf{e}_\eta = \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{yz} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha \quad (4)$$

$$\tau_{\xi\eta} = \mathbf{e}_\eta^* \mathbf{T} \mathbf{e}_\xi = 0$$

DI. (4) in Gl. (2) eingesetzt, ergibt

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = (\sigma_x - \sigma_y) \cos^2 \alpha + (\sigma_y - \sigma_z) \sin^2 \alpha + 2\tau_{yz} \sin \alpha \cos \alpha \quad (5)$$

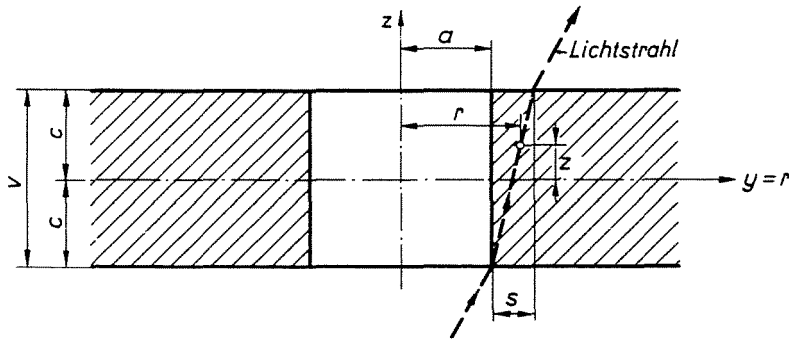


Abb. 5. Koordinatensystem zur Beschreibung des Weges des Lichtstrahles durch das Modell

Da in den in der Praxis vorkommenden Fällen  $\alpha$  stets klein ist, kann  $\sin \alpha$  vernachlässigt werden. Somit wird

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 \approx (\sigma_x - \sigma_y) \cos^2 \alpha \quad (5a)$$

Die Formeln der Tabelle I in Gl. (5a) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma'_1 - \sigma'_2 = \cos^2 \alpha \sigma_0 \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{Z}_n''}{2\Delta^2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\rho^{(q+i)}} \{ [-(q+i) \ln \rho + 1] \lambda_{1i} + \ln \rho [\lambda_{2i} + 2\lambda_{3i}] \} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

mit den Bezeichnungen gemäß der Abb. 5

$$\rho = r/a; \quad \Delta = c/a = v/2a; \quad \zeta = z/c = 2z/v$$

bzw. gemäß [6]

$$\bar{Z}_n'' = \frac{d^2}{d\zeta^2} [\Delta^4 (|\zeta|^n - 1)^2]$$

Die Beziehung zwischen  $r$  und  $z$  für den Weg des Strahles im Modell kann in folgender Form geschrieben werden

$$z = v \left[ \frac{r-a}{s} - \frac{1}{2} \right] \quad (7)$$

bzw. die dimensionslosen Parameter  $\kappa = \rho - 1$  und  $\psi = s/a$  eingeführt

$$\zeta = 2 \frac{\kappa}{\psi} - 1 \quad (7a)$$

Mit den weiteren Bezeichnungen

$$A = \Delta^4 \lambda_{11}$$

$$B = \Delta^4 \lambda_{12}$$

$$C = \Delta^4 [(-q+1)\lambda_{11} + \lambda_{21} + 2\lambda_{31}]$$

$$D = \Delta^4 [(-q+2)\lambda_{12} + \lambda_{22} + 2\lambda_{32}]$$



ergibt sich für die Differenz der sekundären Hauptspannungen längs des Durchgangsweges des untersuchten Lichtstrahles

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \cos^2 \alpha \cdot \sigma_0 \left[ 1 - \frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} + \Psi \right]$$

mit

$$\Psi = -\frac{1}{2\Delta^2} \left| \left( 1 - \frac{2\kappa}{\psi} \right) \right|^{n-2} \left\{ (2n-1) \left| \left( 1 - 2\frac{\kappa}{\psi} \right) \right|^n - (n-1) \right\} \cdot \frac{1}{(1+\kappa)^{q+1}} \left\{ A + \frac{B}{1+\kappa} + C \ln(1+\kappa) + D \frac{\ln(1+\kappa)}{1+\kappa} \right\} \quad (8)$$

Die Zahlenwerte der Konstanten  $q$ ,  $n$ ,  $A$ ,  $B$ , und  $D$  wurden unter Benützung der Daten in [6] berechnet und in der Tabelle II zusammengefaßt. In der Tabelle ist auch der vom Lichtstrahl bestrichene Bereich  $0 < \kappa < \psi$  angegeben. Dieser Bereich wurde aufgrund der in der Arbeit [3] abgeleiteten Zusammenhänge für den Fall bestimmt, wenn die untersuchte Spannungsspitze in einer Entfernung von 4 cm vom Durchstoßpunkt der optischen Achse des Aufnahmeobjektivs der photographischen Kamera durch das Modell liegt.

Da die Richtung der sekundären Hauptspannungen entlang des Weges des untersuchten Lichtstrahles durch das Modell konstant bleibt, ergibt sich die bei der spannungsoptischen Durchleuchtung beobachtete Isochromatenordnung zu

$$m^0 = \frac{v}{S} \int_0^{\psi} (\sigma'_1 - \sigma'_2) d\kappa \quad (9)$$

Hierin ist  $S$  die spannungsoptische Konstante des Modellwerkstoffes.

Die im Falle eines ideal ebenen Spannungszustandes und streng senkrechter Durchleuchtung auftretende, und als Meßwert angestrebte Isochromatenordnung ergibt sich für den Punkt der Spannungsspitze am Lochrand zu

$$m = \frac{v}{S} (\sigma_1 - \sigma_2)_0 = \frac{v}{S} 3\sigma_0 \quad (9a)$$

Hierin ist  $(\sigma_1 - \sigma_2)_0$  die Differenz der wahren Hauptspannungen des ideal ebenen Spannungszustandes an der Stelle der Spannungsspitze bei  $r=a$ . Die Abweichung des tatsächlich auftretenden Isochromatenwertes von dem angestrebten ergibt sich zu

$$h = \frac{m^0 - m}{m} \quad (10)$$

Tabelle 2

Zahlenwerte der Konstanten der Gl. (8) (nach [6]) sowie der vom Lichtstrahl bestrichene Radienbereich

$\Delta = \frac{V}{2a}$	$n$	$q$	$A$	$B$	$C$	$D$	$\psi = \frac{\lambda}{a}$	
							f = 10 cm	f = 30 cm
0,1	2,0	7,3	-0,001419	+0,01448	+0,026367	-0,0011474	0,0068	0,00133
0,5	2,0	4,1	-0,04913	+0,05837	+0,194345	-0,052557	0,034	0,00670
0,75	2,1	3,0	-0,01909	+0,04705	+0,10782	-0,003630	0,051	0,00996
1	2,2	2,3	+0,03060	+0,02403	+0,03642	+0,088731	0,068	0,0133
$\sqrt{2,5}$	2,4	1,5	+0,1246	+0,008523	-0,0803	+0,24942	0,1078	0,0210
2,0	2,6	1,2	+0,1543	+0,03348	-0,011526	+0,330574	0,136	0,0267

Der erste Teil der Gl. (8) (außer dem Glied  $\Psi$ ) stellt den Fall des ideal ebenen Spannungszustandes dar. Die aus diesem mit Hilfe der Gln. (9) und (10) bestimmbare Abweichung  $h$  ist in der Arbeit [3] enthalten. Nun soll nur jene zusätzliche Abweichung bestimmt werden, die durch die Abweichung des Spannungszustandes vom ideal ebenen verursacht wird. Aufgrund der Gln. (8) (9) und (10) kann letztere nach entsprechenden Vereinfachungen folgendermaßen angeschrieben werden

$$\Delta h = \frac{\sigma_0 \cos^2 \alpha}{(\sigma_1 - \sigma_2)_0} \frac{1}{\psi} \int_0^\psi \Psi \, d\kappa = \frac{\cos^2 \alpha}{3\kappa} \int_0^\psi \Psi \, d\kappa \quad (11)$$

Die Integration der Gl. (11) ist mit Hilfe der Zahlenwerte der Tabelle II numerisch durchgeführt worden. Die sich daraus ergebenden Werte der zusätzlichen Abweichung  $\Delta h$  sind für verschiedene Werte von  $v/2a$ , sowie für eine Brennweite des Aufnahmeobjektivs von  $f = 10$  cm bzw. 30 cm in der Tabelle III zusammengefaßt worden. Die Zahlenwerte der Tabelle wurden in der Abb. 6 als Funktion von  $v/2a$  im Diagramm aufgetragen.

Tabelle 3

Die Berechnung der sich aus der Verzerrung des Spannungszustandes ergebenden zusätzlichen Abweichung

$\Delta = \frac{v}{2a}$	$f = 10$ cm		$f = 30$ cm	
	$\int_0^\psi \Psi \, d\kappa$	$\Delta h^*$	$\int_0^\psi \Psi \, d\kappa$	$\Delta h^*$
0,1	$-5,091 \cdot 10^{-9}$	$-2,496 \cdot 10^{-7}$	$-4,058 \cdot 10^{-11}$	$-1,017 \cdot 10^{-8}$
0,5	$2,202 \cdot 10^{-6}$	$2,158 \cdot 10^{-5}$	$1,886 \cdot 10^{-8}$	$9,383 \cdot 10^{-7}$
0,75	$3,330 \cdot 10^{-5}$	$2,176 \cdot 10^{-4}$	$6,919 \cdot 10^{-6}$	$2,316 \cdot 10^{-4}$
1	$8,865 \cdot 10^{-5}$	$4,346 \cdot 10^{-4}$	$1,799 \cdot 10^{-5}$	$4,509 \cdot 10^{-4}$
$\sqrt{2,5}$	$2,160 \cdot 10^{-4}$	$6,679 \cdot 10^{-4}$	$4,461 \cdot 10^{-5}$	$7,081 \cdot 10^{-4}$
2	$2,975 \cdot 10^{-4}$	$7,292 \cdot 10^{-4}$	$6,296 \cdot 10^{-5}$	$7,860 \cdot 10^{-4}$

Die Werte der Abweichung  $h$  für konvergenten Strahlengang unter Voraussetzung eines ideal ebenen Spannungszustandes ist in Abb. 11 der Arbeit [3] enthalten. Die mit der vorliegenden Untersuchung vergleichbare Kurve dieser Abbildung ist in Abb. 7 noch einmal abgebildet. Zum Vergleich sind die beiden Kurven der Abb. 6 als Funktion von  $a/v$  ebenfalls in die Abb. 7 eingezeichnet worden. Der Vergleich der beiden Kurvenzüge zeigt, daß der Wert der durch die Verzerrung des Spannungszustandes in der Umgebung der Spannungsspitze hervorgerufenen zusätzlichen Abweichung  $\Delta h$  im ganzen

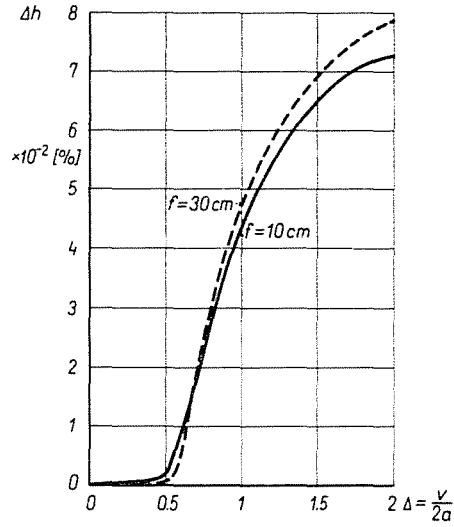


Abb. 6. Die durch den nicht mehr ebenen Spannungszustand in der Platte bewirkte, zusätzliche Abweichung  $\Delta h$  des Isochromatenwertes als Funktion der Verhältnisszahl  $v/2a$

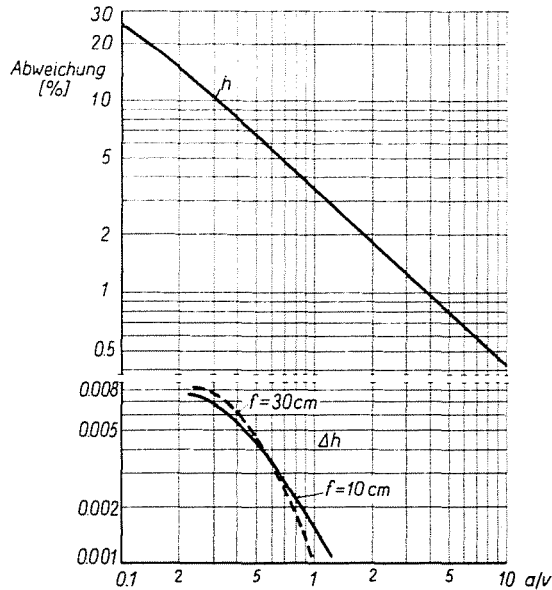


Abb. 7. Vergleich der durch nicht streng senkrechte Durchleuchtung der Modellfläche verursachten Abweichungen des Isochromatenwertes mit den Werten der bei streng senkrechter Durchleuchtung und ideal ebenem Spannungszustand  $h$ : Abweichung, verursacht durch die Abweichung des Strahlenganges vom streng senkrechten.  $\Delta h$ : zusätzliche Abweichung, verursacht durch die Verzerrung der Spannungsverteilung in der Umgebung der Bohrung

untersuchten Bereich etwa um 3 Zehnerpotenze kleiner ist als  $h$  und praktisch unterhalb der Grenze der Meßbarkeit bleibt. Die bei der Auswertung der Isochromatenbilder der ebenen Spannungsoptik sich als Resultat ergebende Hauptspannungsdifferenz kann somit mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit als die des ideal ebenen Spannungszustandes angesehen werden, sowohl im Falle streng senkrechter Durchleuchtung der Modellfläche, wie auch bei der nur annähernd senkrechten Durchleuchtung im einfachen spannungsoptischen Gerät.

### Zusammenfassung

In einer früheren Arbeit des Verfassers sind die im einfachen spannungsoptischen Gerät infolge nicht streng senkrechter Durchleuchtung des Modells auftretenden Bildfehler der ebenen Spannungsoptik unter der Voraussetzung eines ideal ebenen Spannungszustandes im Modell untersucht worden. Da jedoch der Spannungszustand in Scheiben endlicher Dicke in der Umgebung von Spannungsspitzen vom ebenen abweicht, mußten jene zusätzlichen Bildfehler untersucht werden, die durch diese Verzerrung der Spannungsverteilung auftreten. Die Untersuchung erfolgte auf theoretischem Wege für den Fall einer unendlichen, auf Zug beanspruchten Scheibe endlicher Dicke mit einer Bohrung, für den eine analytische Lösung vorlag. Hierbei konnte nachgewiesen werden, daß diese zusätzlichen Bildfehler klein gegenüber den eingangs erwähnten Bildfehlern bleiben und somit vernachlässigt werden können. Aus den Resultaten der vorliegenden Untersuchung kann außerdem gefolgert werden, daß die ebene Spannungsoptik selbst im Falle endlicher Modelldicke das Bild des ideal ebenen Spannungszustandes gibt.

### Literatur

1. FÖPPL L. –MÖNCH E.: Praktische Spannungsoptik. II. Ausgabe. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
2. HILTSCHER R.: Spannungsoptischer Apparat für das Forschungs- und Industrielaboratorium. Tran. IMEKO, Stockholm, 1952.
3. THAMM F.: Die Bildfehler des einfachen Polariskops. Periodica Polytechnica, IV (1960), S. 19 –40.
4. SOUTHWELL R. V.: An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers. Oxford, University Press, 1941.
5. COKER E. G. –FILON L. N. G.: A Treatise on Photo-Elasticity. Cambridge, University Press, 2. Ausgabe, 1957.
6. STERNBERG E. –SADOWSKY M. A.: Three-Dimensional Solution for the Stress-Concentration Around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness. Jr. Appl. Mech. 1949, S. 27 –38.
7. GREEN A. E.: Three-Dimensional Stress Systems in Isotropic Plates. I. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 240 (1949)
8. ALBLAS J. B.: Theorie van de driedimensionale spanningstoestand in den doorboorte plaat. Dissertation, Delft, 1957.

dr. Frigyes THAMM, H-1521 Budapest