

ANWENDUNG DER (C, 1) SUMMIERBAREN REIHEN AUF STRÖMUNGSTECHNISCHE UND WÄRMETECHNISCHE PROBLEME I

DIE BESTIMMUNG DES GESCHWINDIGKEITSFELDES
VON TRINKWASSERSPEICHERN

Von

A. HOFFMANN

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technischen Universität, Budapest

Eingegangen am 24. April, 1978

Vorgelegt von Prof. Dr. T. SZENTMÁRTONY

1. Einleitung

In Wasserspeichern, insbesondere in Speichern für Trinkwasser ist von großer Wichtigkeit, daß sich die letztens zugeführte Wassermenge mit den bereits seit längerer Zeit hier aufbewahrten Mengen nicht vermischt, das heißt, das frische Wasser soll das alte vor sich verdrängen. Damit kann es vermieden werden, daß zu lange Zeit im Speicher verweilendes Wasser ungeeignet wird.

Dasselbe gilt für die Belüftung bzw. für die Zufuhr frischer und die Abfuhr verbrauchter Luft.

Eine vermischungsfreie Durchströmung kann durch eine entsprechende Gestalt des Speichers, ferner durch eine zweckmäßige Verteilung der Zufuhr- und der Abfuhrmengen erreicht werden.

Mit Rücksicht auf die hohen Investigationskosten orientiert man sich meistens durch Modeluntersuchungen über das Strömungsfeld. Doch kann eine Verkleinerung die Ähnlichkeit des Strömungsfeldes gefährden. Infolge der besonders kleinen Dimensionen, bilden die erhöhten Reibungskräfte eine größere Fehlerquelle als eine Berechnung, die reibungsloses Medium voraussetzt.

In dieser Abhandlung soll eine Rechenmethode beschrieben werden, die geeignet ist, das stationäre Strömungsfeld eines rechteckigen Speichers zu bestimmen, eine reibungslose Flüssigkeit vorausgesetzt.

2. Lösung der Randwertaufgabe

Als das mathematische Modell der zuvor beschriebenen stationären ebenen Potentialströmung wollen wir die Laplacesche Differentialgleichung (1) betrachten

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Für das in Abb. 1 dargestellte rechteckige Gebiet können folgende Randbedingungen gestellt werden:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = f_1(y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{b} y, \quad (2a)$$

$$0 \leq y \leq b$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = f_2(y) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{b} y, \quad (2b)$$

$$0 \leq y \leq b$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = f_3(x) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos \frac{n\pi}{a} x, \quad (2c)$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = f_4(x) = \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos \frac{n\pi}{a} x. \quad (2d)$$

$$0 \leq x \leq a$$

Die Funktionen bzw. Distributionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind im voraus anzugeben.

Auf Grund der Randbedingungen (2) soll die Lösung der Differentialgleichung (1) in folgender Form gesucht werden:

$$u(x, y) = A_0 x + B_0 y + D_0(x^2 - y^2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \cos \frac{n\pi}{a} x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y. \quad (3)$$

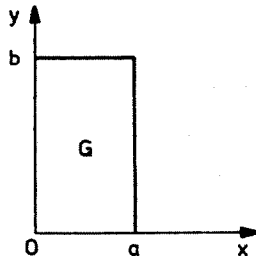


Abb. 1

Mit Hilfe der Randbedingungen (2) können die unbekanntenen Koeffizienten bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= -a_0, & D &= -\frac{b}{\pi n} a_n, & D_0 &= \frac{\alpha_0 + a_0}{2a}, \\
 C_n &= \frac{b}{\pi n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \left(\alpha_n + a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \right), \\
 B_0 &= -\beta_0, & B_n &= -\frac{a}{\pi n} \beta_n, \\
 A_n &= \frac{a}{\pi n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \left(\gamma_n + \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b \right).
 \end{aligned} \tag{3a}$$

Aus der Bedingung

$$\oint_{\square} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

folgt die Gleichheit

$$\gamma_0 = -\beta_0 - \frac{\alpha_0 + a_0}{a} b.$$

Demgemäß können wir — auf Grund der Randbedingungen (2) — die Lösung der Differentialgleichung (1) folgenderweise anschreiben:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -a_0 x - \beta_0 y + \frac{\alpha_0 + a_0}{2a} (x^2 - y^2) + \\
 &+ \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma_n + \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y - \beta_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \cos \frac{n\pi}{a} x + \\
 &+ \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\frac{\alpha_n + a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x - a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Reihe (4) in jedem geschlossenen Teilbereich des Gebietes G gleichmäßig konvergent ist und die Differentialgleichung (1) auch dann befriedigt, wenn die durch die Randbedingungen bestimmten Fourierreihen in gewöhnlichem Sinne nicht konvergent sind, sondern (C, 1) summierbare Fourier-Stieltjes Reihen bilden können, durch welche das Diracsche-Delta bestimmt ist. Selbstverständlich kann die Lösung (4) noch durch

Addition einer beliebigen Konstante C_0 ergänzt werden, da wir es hier mit einem Neumannschen Problem zu tun haben.

Das Geschwindigkeitsfeld im Innerem des Gebietes wird durch folgenden Funktionen bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -a_0 + \frac{\alpha_0 + a_0}{a} x - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n + \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y - \beta_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n + a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x - a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\beta_0 - \frac{\alpha_0 + a_0}{a} y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_n + \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y - \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right) \cos \frac{n\pi}{a} x - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n + a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x - a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (5b)$$

Mittels der Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen kann die Stromfunktion $v(x, y)$ angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= C_0 + \beta_0 x - a_0 y + \frac{\alpha_0 + a_0}{a} xy - \\ &- \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\gamma_n + \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y - \beta_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x + \\ &+ \frac{b}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\alpha_n + a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x - a_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y. \end{aligned} \quad (6)$$

Ähnlich der Lösung (4) sind die Reihen (5a), (5b) und (6) in jedem geschlossenen Teilbereich des Gebietes G gleichmäßig konvergent.

3. Interpretation

Als Beispiel einer physikalischen Interpretation der Vorangehenden soll folgende auf eine ebene Strömung vereinfachte Aufgabe betrachtet werden: Es sollen das Geschwindigkeitsfeld und die Stromlinien in einem rechteckigen Speicher bestimmt werden, auf Grunde der im Abb. 2 dargestellten Quellen- bzw. Senkensysteme eine ideale Strömung vorausgesetzt. Mit Rücksicht auf die großen Dimensionen des Speichers können die Quellen und Senken als punktförmig betrachtet werden.

Wie bekannt, kann man eine Quelle oder eine Senke mit Hilfe der Diracschen Delta Distribution darstellen, deren Eigenschaften durch folgende Beziehungen beschrieben werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy = 1$$

und $\delta(y) = 0$, wenn $y \neq 0$
(siehe: [1], [3]).

Da der Speicher endliche Dimensionen hat, kann das Diracsche Delta periodisch gestaltet werden, wobei die Periode gleich der doppelten Länge der entsprechenden Seite ist, z.B. $2b$. Entwickelt man die Fourierreihe des erhaltenen Diracschen Deltas, erhält man eine (C, 1) summierbare Reihe (siehe: [1]).

Im folgenden wollen wir gewisse vereinfachte Bezeichnungen anwenden. Wir bezeichnen die Delta Distribution mit der Periode $2b$ folgenderweise:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - 2bn) &= \delta_{2b}(y), \\ 2Q_i \delta_{2b}(y - b_i) &= \delta_{2b}^{b_i}(y), \\ 2 \sum_{i=1}^k Q_i \delta_{2b}(y - b_i) &= \delta_{2b}^{b_1, b_2, \dots, b_k}(y), \\ 0 &\leq b_1 < b_2 < \dots < b_k \leq b \end{aligned}$$

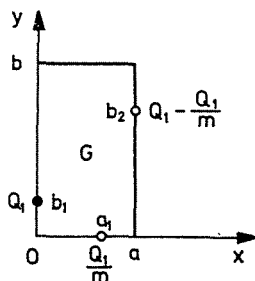


Abb. 2

Q_i bedeutet die Stärke der Quelle bzw. der Senke. Da das periodische Diracsche Delta als eine (C, 1) summierbare Fourier-Stieltjes Reihe dargestellt werden kann, ergeben das Geschwindigkeitsfeld und die Stromfunktion eine in jedem geschlossenen Teilbereich des Gebietes G gleichmäßig konvergente Reihe.

Betrachten wir jetzt die Lösung des in Abb. 2 dargestellte Problems. Eine ebene ideale Strömung befriedigt die Laplacesche Gleichung:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in G \quad (7)$$

mit den folgenden Randbedingungen:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta_{2b}^{Q_1}(y) = \frac{Q_1}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \cos \frac{n\pi}{b} y \right), \quad (8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \delta_{2b}^{Q_1}(y) = \frac{Q_1 - Q_1}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} b_2 \cos \frac{n\pi}{b} y \right), \quad (8b)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\delta_{2a}^{Q_1}(x) = -\frac{Q_1}{ma} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{a} a_1 \cos \frac{n\pi}{a} x \right), \quad (8c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0. \quad (8d)$$

Die Lösung erhält man aus der Beziehung (4)

$$\begin{aligned} u(x, y) = Q_1 \left[C_0 - \frac{x}{b} + \frac{y}{am} + \frac{x^2 - y^2}{2abm} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{a} a_1 \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi}{a} b \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y - \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y \right) \cos \frac{n\pi}{a} x + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\frac{1}{m} - 1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \cos \frac{n\pi}{b} b_2 + \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \right) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x - \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \cos \frac{n\pi}{b} y \Big]. \quad (9) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der partiellen Abelitung der Funktion (9) kann das Geschwindigkeitsfeld leicht berechnet werden. Die sich dabei ergebenden Reihen sind im Gebiet G konvergent, am Rande desselben sind sie (C, 1) summierbar.

Die Stromfunktion ergibt sich aus Beziehung (6) und aus den Randbedingungen (8):

$$v(x, y) = Q_1 \left[C_0 - \frac{x}{ma} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{abm} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{a} a_1 \left(\operatorname{cth} \frac{n\pi}{a} b \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y - \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{m} - 1 \right) \cos \frac{n\pi}{b} b_2 + \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x - \right. \\ \left. - \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right) \sin \frac{n\pi}{b} y \left. \right].$$

Betrachten wir nun die Stromfunktion am Rande:

$$v(x, 0) = Q_1 \left(C_0 - \frac{x}{ma} - \frac{2}{\pi m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{a} a_1 \sin \frac{n\pi}{a} x \right), \quad (11a)$$

$$v(a, y) = Q_1 \left[C_0 - \frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{y}{b} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{b} b_2 \sin \frac{n\pi}{b} y \right], \quad (11b)$$

$$v(x, b) = Q_1 (C_0 - 1), \quad (11c)$$

$$v(0, y) = Q_1 \left(C_0 - \frac{y}{b} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{b} b_1 \sin \frac{n\pi}{b} y \right). \quad (11d)$$

Man kann daraus ersehen, daß der Rand eine Stromlinie ist. Die Funktionen (11a), (11b) und (11d) sind nämlich gerade die Integrale des Diracschen Deltas

längs der Seiten, die als Rand dienen. Folglich sind es Treppenfunktionen. Die Funktion (11c) ist konstant. Es gilt also:

$$v(x, 0) = - \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} dx, \quad v(a, y) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} dy,$$

$$v(0, y) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} dy.$$

Als nächstes Beispiel sei der Wasserspeicher mit dem Querschnitt gemäß Abb. 3 angeführt. Die Quellen sind Q_1, Q_2 und Q_3 und die Ergiebigkeiten der kontinuierlichen Entnahmen seien

$$\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{m} \text{ und } (Q_1 + Q_2 + Q_3) \left(1 - \frac{1}{m} \right).$$

Die Randbedingungen sind:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta_{b_1, b_2}^{Q_1, Q_2}(y) = \frac{1}{b} \left[Q_1 + Q_2 + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2 \right) \cos \frac{n\pi}{b} y \right], \quad (12a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \delta_{b_3}^{Q_3}(y) = \frac{Q_3}{b} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{b} b_3 \cos \frac{n\pi}{b} y \right), \quad (12b)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = - \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{am} \quad (12c)$$

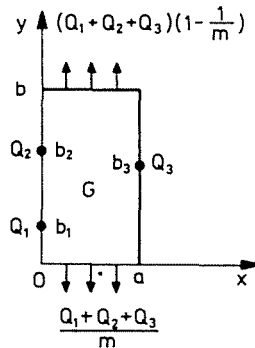


Abb. 3

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{1}{a}. \quad (12d)$$

Die Lösung kann auch hier mittels der Formeln (2), (4) und (12) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\frac{Q_1 + Q_2}{b} x + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{am} y + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2ab} (x^2 - y^2) + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{Q_3 \cos \frac{n\pi}{b} b_3 + \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2\right) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x - \right. \\ & \left. - \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2\right) \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right] \cos \frac{n\pi}{b} y. \quad (13) \end{aligned}$$

Das Geschwindigkeitsfeld kann natürlich auch hier aus den partiellen Ableitungen hergestellt werden; die Konvergenzverhältnisse sind die gleichen wie im vorangehenden Problem.

Die Stromfunktion kann mit Hilfe der Formeln (2), (6) und (12) dargestellt werden:

$$\begin{aligned} v(x, y) = & C_0 - \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{am} x - \frac{Q_1 + Q_2}{b} y + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{ab} xy + \\ & + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{Q_3 \cos \frac{n\pi}{b} b_3 + \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2\right) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x - \right. \\ & \left. - \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2\right) \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x \right] \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (14) \end{aligned}$$

Die Stromfunktion am Rande ist:

$$v(x, 0) = C_0 - \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{am} x, \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} v(a, y) = & C_0 - \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{m} + \frac{Q_3}{b} y + \\ & + \frac{2Q_3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{b} b_3 \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (15b) \end{aligned}$$

$$v(x, b) = C_0 - Q_1 - Q_2 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{m} + 1 \right) (Q_1 + Q_2 + Q_3)x, \quad (15c)$$

$$v(0, y) = C_0 - \frac{Q_1 + Q_2}{b} y - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(Q_1 \cos \frac{n\pi}{b} b_1 + Q_2 \cos \frac{n\pi}{b} b_2 \right) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Die Beziehungen (15b) und (15d) können die Cauchy—Riemann-Differentialgleichungen in Betracht gezogen auch durch Integration der Delta-Distributionen (12a) und (12b) hergestellt werden. Daraus folgt, daß diese Treppenfunktionen sind. So sind die Randlinien — mit Ausnahme der singulären Punkte — Stromlinien.

4. Anmerkung

Die zuvor beschriebene exakte mathematische Methode kann nur für ein rechteckiges Gebiet angewendet werden. Bei wirklichen Flüssigkeiten entsteht am Rande eine Grenzschicht die sich in den Ecken oder in ihrer Umgebung ablöst. Daher kann man die hier abgeleitete Lösung als annehmbare Annäherung nur im Inneren des Gebietes, in entsprechendem Abstand vom Rande akzeptieren.

Auf Grund der Stromlinien und des Geschwindigkeitsfeldes kann der Speicher so gestaltet werden, daß in diesem praktisch keine Ablösung entsteht.

Dieses Verfahren ist auch zur Lösung stationärer Wärmeleitungsprobleme geeignet, z.B. zur Bestimmung des Temperaturfeldes eines eingeschichteten Rohrleitungssystems (siehe: Abb. 4).

Entlang der gestrichelten senkrechten Linien (in Abb. 4) gibt es — infolge der Symmetrie — keinen Wärmeübergang. Entlang der horizontalen Randlinien ist der Temperaturgradient vorgeschrieben.

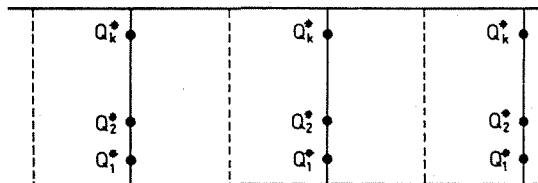


Abb. 4

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung wird die Lösungsmethode der zweiten Randwertaufgabe der Laplacesche Gleichung zur Bestimmung der Strömungsverhältnisse in rechteckigen Wasserspeichern angewandt. Dabei werden am Rande Quellen und Senken punktiert oder endlicher Ausbreitung angeordnet. Es wird eine leicht anwendbare exakte Lösung abgeleitet, die in jedem geschlossenen Teilbereich des Gebietes gleichmäßig konvergiert.

Auf Grund der Stromlinien kann der Speicher so gestaltet werden, daß in diesem praktisch keine Ablösung entsteht.

Literatur

1. MIKUSIŃSKI, J.—SIKORSKI, R.: The elementary theory of distribution (I.) Rozprawy Matematyczne XII. Warszawa 1957.
2. FENYŐ, I.: Über eine technische Anwendung der Distributionentheorie. Per. Polyt. Electr. Engin. 9, 62. Budapest (1965)
3. HOFFMANN, A.: Use of $(C, 1)$ summability series in the flow in water basins (in Hungarian). Matematikai Lapok 23, 291. Budapest (1972)

Andor HOFFMANN H-1521 Budapest