ANWENDUNG DER (C, 1) SUMMIERBAREN REIHEN AUF STRÖMUNGSTECHNISCHE UND WÄRMETECHNISCHE PROBLEME II

BESTIMMUNG DES TEMPERATURFELDES EINES EINGEBETTETEN ROHRLEITUNGSSYSTEMS

Von

A. HOFFMANN

Lehrstuhl für Strömungslehre, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 24. April, 1978
Vorgelegt von Prof. Dr. T. SZENTMÁRTONY

1. Einleitung

Die Ermittlung des Temperaturfeldes um ein eingebettetes Rohrleitungssystem kann u. U. sowohl theoretisch als auch praktisch wichtig sein. Ein derartiges Problem stellt sich z. B. bei einer in Beton gebetteten oder unterirdisch verlegten Wärmefernleitung oder beim Entwerfen von Heizkörpern usw. Für nur eine Rohrleitung ($k = 1$) wurde von O. H. FAXEN ([5], [6]) unter Anwendung einer Potentialfunktion und mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln, dann von J. GRUBER bei Anwendung einer geeigneten Potentialfunktion [4] eine Lösung gegeben.

In der vorliegenden Arbeit wird keines der obengenannten Hilsfmittel eingesetzt, das Problem wird als einfache Randwertaufgabe behandelt, wobei die Quellen und Senken durch am Rande angesetzte (C, 1) summierbare Reihen repräsentiert werden. Dadurch werden der mathematische Überblick über die Lösung ferner die praktische Berechnung bedeutend vereinfacht.

2. Aufgabenstellung

Betrachten wir den Querschnitt nach Abb. 1 eines eingebetteten Rohrleitungssystems, wo $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_k^*$ den Rohren entsprechende punktartige Quellen sind. Das Problem kann als ebene Aufgabe behandelt werden, da die

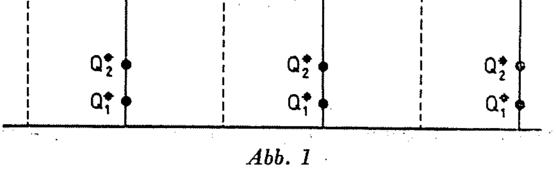

Abb. 1

Rohre praktisch unendlich lang sind und das Einbettungsmaterial als homogen und isotrop betrachtet werden darf. Durch die gestrichelten Linien in Abb. 1 erfolgt wegen der Symmetrie kein Wärmeübergang, daher kann das physikalische Modell auf das Rechteck in Abb. 2 beschränkt werden, wo für die waagerechten Seiten die Randbedingung die Gültigkeit des Newtonschen Wärmeübergangsgesetzes ist.

Wie bekannt, läßt sich eine punktartige Quelle bzw. Senke mit der Diracschen Delta-Distribution* beschreiben, die hier wegen der endlichen Ausdehnung des Gebietes periodisiert werden kann.

Im weiteren werden folgende vereinfachende Bezeichnungen benutzt: Periodische Delta-Distribution nach 2b (Abb. 2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y-2bn) = \delta_{2b}(y);$$

diese um b_i verschoben und eine Wärmequelle der Intensität Q_i^* angenommen, erhält man

$$2\frac{Q_i^*}{\lambda}\delta_{2b}(y-b_i) = \delta_{2b}^{b_i}(y);$$

sodann die Summe solcher Distributionen:

$$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{k} Q_i^*\,\delta_{2b}(y-b_i) = \delta_{2b}^{b_1,b_2,\ldots,b_k}(y),$$

$$0 \leqq b_1 < b_2 < \ldots < b_k < b\,.$$

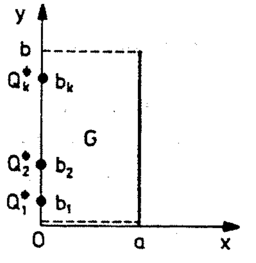

Abb. 2

* Für das Diracsche Delta gelten $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\,dy = 1$ und $\delta(y) = 0$, wenn $y \neq 0$ (s. [1], [3]).

Der Prozeß wird als stationär betrachtet, damit lautet die mathematische Formulierung der Randwertaufgabe:

$$\Delta\vartheta \equiv \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = 0, \quad \text{wenn} \quad (x,y) \in G \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = -\delta_{2b}^{b_1, b_2, \dots, b_k}(y) =$$

$$= -\frac{1}{b\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} Q_i^* + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i^* \cos\frac{n\pi}{b} b_i \cos\frac{n\pi}{b} y\right), \tag{2a}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \tag{2b}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = H_1\vartheta\Big|_{y=0}, \tag{2c}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=b} = -H_2\vartheta\Big|_{y=b}. \tag{2d}$$

Die Randbedingung (2a) ist mit einer Fourier—Stieltjes-Reihe ausgedrückt, durch welche die Quellen repräsentierenden Diracschen Delta-Distributionen hergestellt werden. (2b) bedeutet, daß an der gestrichelten Linie kein Wärmeübergang stattfindet (s. Abb. 2). (2c) und (2d) stellen den Wärmeübergang an den waagerechten Seiten dar, wo

$$H_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda}, \qquad H_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda},$$

(α_1 und α_2 sind die entsprechenden Wärmeübergangszahlen, und λ ist die Wärmeleitzahl der untersuchten Schicht).

3. Lösung der Aufgabe

Setzen wir die Lösung der Randwertaufgabe (1), (2) in der Form an:

$$\begin{aligned}\vartheta(x,y) &= C_0 + A_0 x + B_0 y + D_0(x^2 - y^2) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} y\right)\cos\frac{n\pi}{a} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b} x\right)\cos\frac{n\pi}{b} y.\end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist die Differentialgelichung (1) befriedigt, und die unbekannten Koeffizienten werden aus den Randbedingungen (2) ermittelt. Im weiteren wird die Bezeichnung $\frac{Q_i^*}{\lambda} = Q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \mathrm{k})$ benutzt.

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = A_0 + \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \cos \frac{n\pi}{b} y =$$

$$= -\frac{1}{b} \left(\sum_{i=1}^{k} Q_i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \cos \frac{n\pi}{b} y \right).$$

Daraus erhält man:

$$A_0 = -\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i ,$$

$$D_n = -\frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i , \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i + 2 D_0 a +$$

$$+ \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{n} \left(C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a - \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \right) \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y = 0$$

und daraus ist:

$$D_0 = \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i ,$$

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \operatorname{cth} \frac{n\pi}{b} a . \tag{5}$$

Der Wärmeübergang in die Umgebung die beiden waagerechten Randlinien entlang wird mit den Randbedingungen (2c) und (2d) beschrieben. Daraus ist es ersichtlich, daß die Funktion $\vartheta(x, y)$ die in der Einbettungsschicht entstehende Übertemperatur der Umgebung gegenüber bedeutet.

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = B_0 + \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos \frac{n\pi}{a} x =$$

$$= H_1 \left[C_0 - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{a} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \right], \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=b} = B_0 - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{k} Q_i +$$

$$+ \frac{\pi}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} y \right) \cos \frac{n\pi}{a} x =$$

$$= -H_2 \left[C_0 - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i x + B_0 b + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i (x^2 - b^2) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b \right) \cos \frac{n\pi}{a} x +$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x \right) \right]. \tag{7}$$

Nun werden die Gleichheiten (6) und (7) geordnet:

$$\underbrace{B_0 - H_1 C_0}_{E_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\pi}{a} n B_n - H_1 A_n \right)}_{E_n} \cos \frac{n\pi}{a} x =$$

$$= H_1 \left[-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} \left(C_p \operatorname{ch} \frac{p\pi}{b} x + D_p \operatorname{sh} \frac{p\pi}{b} x \right) \right] = f_1(x) \tag{8}$$

und

$$\underbrace{H_2 C_0 + (1 + H_2 b) B_0 - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{k} Q_i \left(1 + H_2 \frac{b}{2} \right)}_{F_0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b \right) A_n + \right.}_{F_n}$$

$$\underbrace{\left. + \left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b \right) B_n \right]}_{F_n} \cos \frac{n\pi}{a} x =$$

$$= -H_2 \left[-\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i x + \frac{1}{2ab} \sum_{i=1}^{k} Q_i x^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(C_p \operatorname{ch} \frac{p\pi}{b} x + D_p \operatorname{sh} \frac{p\pi}{b} x \right) \right] = f_2(x) . \tag{9}$$

Die Fourierkoeffizienten E_0, E_n, F_0, F_n in den Gleichheiten (8) und (9) werden nun durch Integration leicht ermittelt.

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{a}\int_0^a f_1(x)\,dx, \quad E_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx \\ F_0 &= \frac{1}{a}\int_0^a f_2(x)\,dx, \quad F_n = \frac{2}{a}\int_0^a f_2(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Unter Anwendung der bestimmten Integrale

$$\int_0^a x\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx = \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2[(-1)^n-1],$$

$$\int_0^a x^2\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx = (-1)^n\frac{2a^3}{(n\pi)^2},$$

$$\int_0^a \operatorname{ch}\frac{p\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx = (-1)^n\frac{a^2bp\,\operatorname{sh}\frac{p\pi}{b}a}{\pi(a^2p^2+b^2n^2)},$$

$$\int_0^a \operatorname{sh}\frac{p\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx = $$

$$= \frac{a^2bp}{\pi(a^2p^2+b^2n^2)}\left[(-1)^n\operatorname{ch}\frac{p\pi}{b}a-1\right],$$

erhält man für die Koeffizienten (10) die Formeln

$$E_0 = \frac{H_1}{a}\left[-\frac{a^2}{3b}\sum_{i=1}^k Q_i + \frac{2b}{\pi^2}\sum_{p=1}^\infty\frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^k Q_i\cos\frac{p\pi}{b}b_i\right], \tag{11a}$$

$$F_0 = -\frac{H_2}{a}\left[-\frac{a^2}{3b}\sum_{i=1}^k Q_i + \frac{2b}{\pi^2}\sum_{p=1}^\infty\frac{(-1)^p}{p^2}\sum_{i=1}^k Q_i\cos\frac{p\pi}{b}b_i\right], \tag{11b}$$

$$E_n = H_1\left[\frac{2a}{b(n\pi)^2}\sum_{i=1}^k Q_i + \frac{4ab}{\pi^2}(-1)^n\sum_{p=1}^\infty\frac{\sum_{i=1}^k Q_i\cos\frac{p\pi}{b}b_i}{a^2p^2+b^2n^2}\right] = H_1E_n^*, \tag{11c}$$

$$F_n = -H_2\left[\frac{2a}{b(n\pi)^2}\sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{4ab}{\pi^2}(-1)^n \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \frac{\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{p\pi}{b} b_i}{a^2p^2 + b^2n^2}\right] =$$
$$= -H_2 E_n^{**}. \tag{11d}$$

Nun lassen sich die Koeffizienten B_0, C_0 unter Anwendung der Gleichheiten (8) und (9) aus dem Gleichungssystem

$$B_0 - H_1 C_0 = E_0,$$

$$(1 + H_2 b)B_0 + H_2 C_0 = F_0 + \frac{1}{a}\left(1 + H_2\frac{b}{2}\right)\sum_{i=1}^{k} Q_i \tag{12}$$

ausdrücken.

$$C_0 = \frac{F_0 - (1 + H_2 b)E_0 + \frac{1}{a}\left(1 + H_2\frac{b}{2}\right)\sum_{i=1}^{k} Q_i}{H_1 + H_1 H_2 b + H_2}, \tag{13}$$

$$B_0 = E_0 + H_1 C_0. \tag{14}$$

Die Koeffizienten A_n und B_n werden auch unter Anwendung der Gleichheiten (8) und (9) aus dem Gleichungssystem

$$-H_1 A_n + \frac{\pi}{a} n B_n = H_1 E_n^*,$$

$$\left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b + H_2 \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} b\right) A_n + \left(\frac{\pi}{a} n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} b + \right.$$
$$\left. + H_2 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b\right) B_n = -H_2 E_n^{**}$$

errechnet:

$$A_n = -\frac{1}{N_n}\left[H_2 E_n^{**} + \left(H_1 \operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} b + \frac{H_1 H_2 a}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b\right) E_n^*, \tag{15}\right.$$

$$B_n = -\frac{1}{N_n}\left[\frac{H_1 H_2 a}{n\pi} E_n^{**} - \left(\frac{H_1 H_2 a}{n\pi}\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} b + H_1 \operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b\right) E_n^*, \tag{16}\right.$$

wo

$$N_n = (H_1 + H_2)\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a} b + \left(\frac{n\pi}{a} + \frac{H_1 H_2 a}{n\pi}\right)\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a} b. \tag{17}$$

Nach den Formeln (11c) und (11d) ist

$$0(E_n^*) = 0(E_n^{**}) = \frac{1}{n^2}. \tag{18}$$

Die Formeln (4), (5), (15) und (16) angewandt und die Lösungsfunktion (3) in für die Berechnung geeigneter Form angeschrieben, erhält man

$$\begin{aligned}\vartheta(x,y) = C_0 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{k} Q_i x + B_0 y + \frac{1}{2ab}\sum_{i=1}^{k} Q_i (x^2 - y^2) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n}\left[H_2 E_n^{**}\left(\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}y + \frac{aH_1}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y\right) + \right. \\ \left. + H_1 E_n^{*}\left(\operatorname{ch}\frac{n\pi}{a}(b-y) + \frac{H_2 a}{n\pi}\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\right)\right]\cos\frac{n\pi}{a}x + \\ + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b} b_i \frac{\operatorname{ch}\frac{n\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}a}\cos\frac{n\pi}{b}y.\end{aligned} \tag{19}$$

Die Koeffizienten C_0 und B_0 werden aus den Formeln (13), (14) sowie (11a) und (11b) ferner die Koeffizienten E_n^* und E_n^{**} aus den Formeln (11c) und (11d) berechnet.

Betrachtet man die Formeln (17) und (18), ist leicht einzusehen, daß die Lösungsfunktion (19) in allen Teilbereichen des Gebiets G gleichmäßig konvergent ist und die Differentialgleichung (1) befriedigt.

4. Bei Quellen endlicher Anzahl

Dem vorigen ebenen Problem gegenüber ist eine andere Aufgabe dadurch gekennzeichnet, daß die Wärmequellen endlicher Zahl k in einer senkrechten Linie angeordnet sind (Abb. 3), und durch die beiden waagerechten Grenzlinien kein Wärmeübergang erfolgt.

Ein näherungsweises physikalisches Modell stellen z. B. erdverlegte Rohre als Wärmequellen dar, angenommen, daß auf der Erdoberfläche wegen der Wärmedämmung der Luft bzw. in einer gewissen Tiefe wegen der Bodenwärme praktisch kein Wärmeübergang erfolgt. Es wird weiterhin angenom-

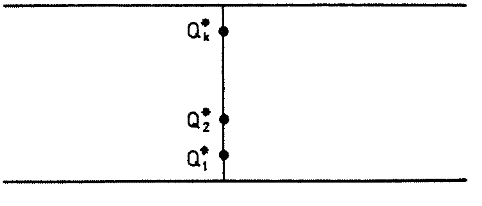

Abb. 3

men, daß die Quellen $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_k^*$ in der senkrechten Mittellinie einer rechteckigen Bodenschicht angeordnet sind, so wird sich die Wärme symmetrische zu dieser Linie fortpflanzen. An den senkrechten Seiten des Rechtecks gilt das Newtonsche Wärmeübergangsgesetzt mit derselben Wärmeübergangszahl an beiden Seiten.

Die Randwertaufgabe lautet:

$$\Delta\vartheta \equiv \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = 0, \text{ wenn } (x, y) \in G, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = -\delta_{2b}^{b_1, b_2, \ldots, b_k}(y) = -\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{k} Q_i + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} Q_i \cos\frac{n\pi}{b} b_i \cos\frac{n\pi}{b} y\right], \tag{21a}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=a} = -H\vartheta\,|_{x=a}, \tag{21b}$$

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \tag{21c}$$

Die Lösung wird in der Form

$$\vartheta(x, y) = C_0 + A_0 x + B_0 y + D_0(x^2 - y^2) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{n\pi}{b} x + D_n \operatorname{sh}\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\frac{n\pi}{b} y \tag{22}$$

gesucht. Die unbekannten Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen leicht bestimmen.

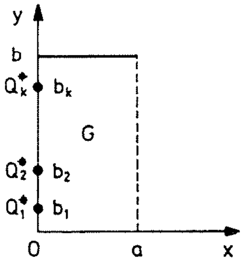

Abb. 4

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=0} = A_0 + \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n D_n \cos \frac{n\pi}{b} y = -\frac{1}{b}\left[\sum_{i=1}^{k} Q_i + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \cos \frac{n\pi}{b} y \right],$$

daraus ist

$$A_0 = -\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i, \quad D_n = -\frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i, \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=0} = B_0, \quad \left.\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right|_{y=b} = -2 D_0 b,$$

woraus sich nach der Randbedingung (21c)

$$B_0 = D_0 = 0 \tag{24}$$

ergibt.

Nun wird bei $x = a$ die Newtonsche Randbedingung angeschrieben:

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right|_{x=a} = -\frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(C_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \right) \cos \frac{n\pi}{b} y =$$

$$= -H \left[C_0 - \frac{a}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a \right) \cos \frac{n\pi}{b} y \right]. \tag{25}$$

Aus (25) können die Konstanten C_0 und C_n bestimmt werden und zwar

$$C_0 = \frac{1}{b} \left(a + \frac{1}{H} \right) \sum_{i=1}^{k} Q_i \tag{26}$$

und

$$C_n = \frac{\left(\frac{2}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a + \frac{2H}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a \right) \sum_{i=1}^{k} Q_i \cos \frac{n\pi}{b} b_i}{\frac{\pi}{b} n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a + H \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a}. \tag{27}$$

Unter Anwendung der Formeln (23), (24), (26) und (27) und die Lösungsfunktion (22) in für die Berechnung geeigneter Form angeschrieben, erhält man

$$\vartheta(x, y) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{k} Q_i \left(a + \frac{1}{H} - x\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M_n} \left[\frac{1}{b} \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} (a - x) + \frac{H}{n\pi} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a - x)\right] \cos \frac{n\pi}{b} y, \tag{28}$$

wo

$$N_n = \frac{n\pi}{b} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} a + H \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} a \tag{29}$$

ist.

Angesichts der Formeln (28) und (29) ist leicht einzusehen, daß die Lösungsfunktion (28) in allen geschlossenen Teilbereichen des Gebietes G gleichmäßig konvergent ist und die Differentialgleichung (20) befriedigt.

Durch eine ähnliche Anwendung der (C, 1) summierbaren Reihen kann auch das zweite Randwertproblem der Laplace-Gleichung gelöst werden. Eine physikalische Interpretation derselben ist z.B. die Ermittlung der Strömungsverhältnisse in Speichern [7].

Zusammenfassung

In der Arbeit wird eine Methode zur Bestimmung des Temperaturfeldes um ein eingebettetes Rohrleitungssystem aufgrund der Newtonschen Wärmeübergangsbedingung angegeben. Die aus dem Rohrleitungssystem herrührenden Quellen werden als punktartig angenommen, und die Randwertaufgabe wird unter Anwendung der Symmetrieverhältnisse in einem rechteckigen Bereich gelöst, wo die Quellen am Rande angeordnet sind. So können die Funktionen in der Ranbedingung durch (C, 1) summierbare Reihen ausgedrückt werden. Die Lösung ist exakt, leicht zu handhaben und in allen geschlossenen Teilbereichen des Gebietes gleichmäßig konvergent.

Literatur

1. Mikusiński, J.—Sikorski, R.: The elementary theory of distribution (I.). Rozprawy Matematyczne XII. Warszawa, 1957
2. Fenyő, J.: Über eine technische Anwendung der Distributionentheorie, Per. Polyt. E. **9**, 62 (1965) Budapest
3. Gelfand, I.—Schilow, G. E.: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I. VEB Verlag, Berlin, 1967
4. Gruber, J.: Die Temperaturverteilung in Strahlungsheizflächen. Per. Polyt. M. **2**, 51 (1958) Budapest
5. Körmendi, I.: Faxén módszere rétegbe ágyazott csőrendszer hőleadásának számítására (Die Methode von Faxen zur Berechnung der Wärmeabgabe aus einem eingebetteten Rohrleitungssystem) Épületgépészet **16**, 11 (1967) Budapest
6. Faxén, O. H.: Beräkning av värmeavgivningen frånrör, ingjutna i betongplatter: Teknisk Tidskrift, Mekanik, 20. Mars 1937. Häfte 3.
7. Hoffmann, A.: Anwendung der (C, 1) summierbaren Reihen auf strömungstechnische und wärmetechnische Probleme I. Per. Polyt. M. **22**, 2 (1978)

Andor Hoffmann H-1521 Budapest