ПРИМЕРЫ ИЗОЛИРОВАННОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

П. МОШОН

Кафедра математики механического факультета Будапештского технического университета

(Поступило: 2 марта 1977 г.)

Представлено: Проф. М. Фаркаш

1. В данной работе исследуются траектории автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности замкнутой траектории, соответствующей периодическому решению этой системы.

Пусть p является периодическим решением автономной системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f \in C^1(G), \quad G \subset R^n \tag{1}$$

с периодом $\tau_0 > 0$ (τ_0 — необязательно наименьший период, но $f(p(t)) \neq 0$, $t \in [0, \tau_0]$, G — область). Обозначим через L траекторию периодического решения:

$$L = \{x \mid x = p(t), \; t \in [0, \tau_0]\}.$$

Обозначим через $\eta(t, x)$ решение (1), удовлетворяющее начальным данным: $\eta(0, x) = x$.

Периодичезкое решение автономной системы наиболее естественно называть изолированным тогда, если в достаточно малой окрестности траектории решения уже нет другой замкнутой траектории. Точнее:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А

Траектория периодического решения p системы (1) называется *неизолированной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{p}$ периодическое решение, $\tilde{L}$ траектория которого принадлежит ε-окрестности траектории L, и для каждого $\alpha \in R^1$, $\tilde{p}(t) \neq p(t + \alpha)$. В противном случае, траектория L решения p называется *изолированной*.

Неудобство данного определения заключается в том, что, зная правую часть уравнения и периодическое решение нельзя найти хорошие способы для определения того, является ли траектория периодического решения изолированной или нет.

В работе [1] *М. Фаркаш* дал новое определение изолированности траектории и доказал теорему, с помощью которой эффективно можно решать проблему изолированности. В работе [2] было обобщено определение М. Фаркаша так, что эта теорема осталась в силе. Здесь приведём сначала более общее, а потом частное определение изолированности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ B

Траектория периодического решения p с периодом τ_0 системы (1) называется *неизолированной*, если для всех $\varepsilon > 0$ существует $x \notin L$:

1. $\varrho(x, L) < \varepsilon$,
2. $\eta(t, x)$ — периодическое решение с периодом $\tau(x)$,
3. $|\tau(x) - \tau_0| < \varepsilon$.

В противном случае траектория решения p называется *изолированной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ C

Траектория периодического решения p с периодом τ_0 автономной системы (1) называется *неизолированной*, если

I. Существует по крайней мере двумерное, вложенное в R^n, C^1 (дифференцируемое) многообразие P, состоящее из замкнутых траекторий, соответствующих периодическим решениям и $L \subset P$.

II. Существует τ: $P \to R^1$, функция класса C^1, которая при $x \in P$ принимает значение $\tau(x)$, период решения, траектория которой проходит через точку x, и в точках траектории L функция принимает значение τ_0.

В противном случае траектория решения p называется *изолированной*.

В дальнейшем мы будем изучать на примерах связь между изолированностями в разных смыслах. Из A. изолированности следует B. изолированность, а из B. изолированности следует C. изолированность. Если $n=2$, тогда изолированность в смысле A. и B. эквивалентны, если $n = 2$ и f аналитична, тогда все три определения эквивалентны, т. е.

изолированность $A \Rightarrow B \Rightarrow C$;
изолированность $A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$, $n = 2$;
изолированность $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$, $n = 2$, f аналитична.

В работе докажем правильность этих включений.

Изолированность в смысле B. и C. зависит и от периода периодического решения, не только от траекторий (см. пример 3.3).

В наших исследованиях играют важную роль характеристические мультипликаторы вариационной системы

$$\dot{y} = f'_x(p(t))\, y. \tag{2}$$

С помощью этих мультипликаторов можно делать выводы о поведении решений системы (1) в окрестности цикла L. Справедлива следующая теорема: ([1], [2]).

ТЕОРЕМА 1

Если число 1 является однократным характеристическим мультипликатором решения p с периодом τ_0 системы (2), тогда решение p является изолированным в смысле B. и C.

Характеристические мультипликаторы в большинстве случаев мы будем вычислять не из определения с помощью фундаментальной матрицы (2), а следующим способом: один мультипликатор равняется 1, так как $\dot{p}$ является периодическим решением (2). В точке $p(o)$ подставим гиперплоскость ортогонально $f(p(o))$. Полученную гиперплоскость обозначим через H. Из-за периодичности p, $\eta(o, p(o)) = \eta(\tau_0, p(o))$. Отсюда и из определения гиперплоскости H следует, что в достаточно малой окрестности $p(o)$ определено и принадлежит классу C^1 следующее отображение (отображение H в себя по траекториям системы (1)):

$$T\colon \xi_1 = \eta(\tau(\xi), \xi), \text{ где } \xi_1 \in H, \xi \in H \tag{3}$$

$$\tau \in C^1, \tau(0) = \tau_0, \eta(\tau_0, p(0)) = p(0).$$

Выделяя линейную часть T,

$$T\colon \xi_1 = p(0) + A(\xi - p(0)) + \Xi(\xi), \quad \Xi(\xi) = 0(\|\xi - p(0)\|).$$

Остальные характеристические мультипликаторы совпадают с собственными числами A. ([3], [2]).

2. Двумерные примеры

В этом пункте даётся описание малой окрестности траектории периодического решения на плоскости. В рассмотренных примерах траектория периодического решения — всегда окружность $x^2 + y^2 = 1$, и движение по этой окружности описывается формулами $x = \cos t$, $y = \sin t$. Гиперплоскость H: ось x, координаты точки $p(0)$: $x = 1$, $y = 0$.

Неизолированное периодическое решение

2.1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned} \qquad p\colon \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \end{aligned} \qquad \tau_0 = 2\pi.$$

Переходя к полярным координатам (в дальнейшем системы сразу задаются в полярных координатах, но подразумевается, что система задана в (x, y)

декартовых координатах, функции, описывающие исследуемое решение, будут периодическими в (x, y) координатах. Гиперплоскость H суть прямая $\varphi = 0$, координаты $p(0)$, $r = 1$, $\varphi = 0$),

$$\dot{r} = 0,$$

$$\dot{\varphi} = 1.$$

Так как скорость по радиусу равняется нулю, траектории (в близости $x^2 + y^2 = 1$) — концентрические окружности. Угловая. скорость постоянная — равняется 1 — так все решения периодические с периодом 2π.

Выполняются условия определения С. В качестве многообразия можем взять кольцо $1/2 < r < 3/2$, функция $\tau(x) = 2\pi$, $x \in P$. Так p является неизолированным в смысле С. (Отсюда ясно, что и в смысле В. и А.)

На плоскости траектория периодического решения С. неизолированная, если все траектории, проходящие через точки, достаточно близкие к L, — замкнутые. В случае $n = 2$ (т.е. на плоскости), если I. в определении С. выполняется; оттуда уже следует II. Каждое решение замыкается уже после «первого оборота», функцию τ из (3) можно распространить на всё многообразие P.

Несмотря на это, периоды разных периодических решений вообще не совпадают:

2.2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x(x^2 + y^2), \end{aligned} \qquad p\colon \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \end{aligned} \qquad \tau_0 = 2\pi.$$

В полярных координатах

$$\dot{r} = 0,$$

$$\dot{\varphi} = r^2.$$

Фазовая картина этой системы полностью совпадает с фазовой картиной предыдущего примера 2.1. Но угловая скорость зависит от радиуса, так периоды все разные. (Период решения с начальными данными $r = r_0 > 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\tau = \dfrac{2\pi}{r_0^2}$, p является очевидно неизолированным.)

В примерах 2.1. и 2.2. отображение T является тождественным, $T\xi = \xi$, так оба характеристических мультипликатора — единицы. Эти примеры с точки зрения изолированности полностью совпадают. Разница между ними, конечно, есть, например решение p в 2.1 устойчиво по Ляпунову, а в 2.2 неустойчиво по Ляпунову.

Изолированное периодическое решение

2.3.

$$\dot{x} = -y - x\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad p: \begin{matrix} x = \cos t \\ y = \sin t \end{matrix} \quad \tau_0 = 2\pi\,;$$

$$\dot{y} = x \quad - y\frac{(\sqrt{x^2+y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

В полярных координатах

$$\dot{r} = -(r-1)\,,$$

$$\dot{\varphi} = 1\,.$$

Только траектория L замкнута. Если $r > 1$, тогда $\dot{r}$ отрицательно, так траектория приближается к окружности $x^2 + y^2 = 1$ (r уменьшается), если $\dot{r}$ положительно (r возрастает), траектория тоже приближается к L. Отсюда следует уже А. изолированность траектории решения p. (Следовательно, p является и В. и С. изолированным.)

Решая уравнение, получаем $T\xi = e^{-2\pi}\xi$ ($\xi = r - 1$). Второй характеристический мультипликатор $\lambda_2 = e^{-2\pi} < 1$, В. и С. изолированности следует и из теоремы 1.

Возможен случай, когда оба характеристических мультипликатора равны 1 и всё-таки траектория решения p изолированная. (То есть теорема 1 необратима).

2.4.

$$\begin{matrix} \dot{r} = (r-1)^2, \\ \dot{\varphi} = 1, \end{matrix} \qquad p: \begin{matrix} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{matrix} \qquad \tau_0 = 2\pi.$$

В данном случае тоже только L замкнута; $\dot{r} > 0$, если $r \neq 1$, решения при $r > 1$ удаляются от L (в этом примере на конечном промежутке времени уходят в бесконечность), при $r < 1$ приближаются к L (траектории наматываются на окружность L). Отсюда следует изолированность p.

Характеристические мультипликаторы получаются прямым вычислением: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. (То, что и $\lambda_2 = 1$, можно показать красивее: в 2.4. цикл L полуустойчив, а по теореме Андронова—Витта, если $\lambda_2 < 1$, то L устойчив, если $\lambda_2 > 1$ неустойчив, значит, λ_2 должен равняться единице.)

В примерах, рассмотренных до этого, не было важно, в каком смысле мы говорили об изолированности.

С. — изолированное, но В. — неизолированное периодическое решение

2.5.

$$\begin{matrix} \dot r = g(r) \\ \dot\varphi = 1 \end{matrix}, \text{где} \qquad g(r) = \begin{cases} 0, & r = 1, \\ (r-1)^3 \sin \dfrac{1}{r-1}, & r \neq 1; \end{cases}$$

$$g \in C^1 \text{ действительно } g'(r) = \begin{cases} 0, & r = 1, \\ 3(r-1)^2 \sin \dfrac{1}{r-1} - (r-1) \cos \dfrac{1}{r-1} & r \neq 1, \end{cases}$$

что является непрерывным в $r = 1$.

Траектория решения p С. изолированная, потому что нет многообразия из замкнутых траекторий. (Окружности $r - 1 = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ — замкнутые траектории системы, но в кольцах между этими окружностями траектории незамкнутые, ведь r либо убывает, либо возрастает в зависимости от знака $\dot r$.) В. неизолированность очевидна, сколь угодно близко к L существуют замкнутые траектории, а период каждого решения равняется 2π.

Оба характеристических мультипликатора равны 1. (Доказывается аналогично с 2.4. с помощью теоремы Андронова—Витта.)

Замечание: Если f — аналитическая функция, тогда траектория периодического решения не может быть С. изолированной и В. неизолированной. В этом случае и T — аналитическая функция ($n = 2$), и в точках ξ, через которые замкнутая траектория проходит, $T\xi = \xi$. Но в данном случае существует точка накопления точек ξ в области определения $T - E$ (E — тождественное отображение), в силу аналитичности тождественно 0, то есть все траектории замкнуты.

3. Трёхмерные примеры

Траектория L периодического решения p окружность в пространстве R^3: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$. Движение описывается формулами $x = \cos t$, $y = 0$, $z = \sin t$. Наименьший период решения p — 2π, но в примерах p будем часто рассматривать с другими периодами. Уравнение гиперплоскости H: $z=0$, координаты $p(0)$: $(1, 0, 0)$; $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (x - 1, y)$.

Введём новые координаты:

$$\begin{aligned} x &= (1 + r\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= (1 + r\cos\theta)\sin\varphi, \\ 0 &\le r < r_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{4}$$

Наглядный смысл этих координат заключается в следующем:

r — расстояние от окружности L ($x^2+z^2=1,\ y=0$);
φ — угол по окружности L (полярный угол в плоскости (x,z));
θ — угол в плоскости, поставленной в точках L перпендикулярно касательной L.

Гиперплоскость H — плоскость, её уравнение: $\varphi=0$. Решение p в новых координатах: $r=0$, $\varphi=t$. (На L координаты не однозначны, θ может принимать любое значение.) Будем рассматривать только специальные системы. Первое уравнение всегда

$$\dot r=0.$$

Это означает, что траектории находятся на торах, обхватывающих окружность L.

Второе уравнение

$$\dot\varphi=1.$$

Решения поворачиваются постоянной скоростью в направление окружности L. Отсюда следует, если существует периодическое решение, тогда его период может быть только кратным 2π. Разница будет только в третьем уравнении.

Эти предположения достаточно жёсткие, например из них следует уже устойчивость по Ляпунову решения p.

3.1.

$$\dot x=-z,$$

$$\dot y=0,$$

$$\dot z=x.$$

Переходя к координатам (4):

$$\dot r=0,$$

$$\dot\varphi=1,$$

$$\dot\theta=0.$$

Все траектории, в близости L, окружности. Существует трёхмерное многообразие из замкнутых траекторий, так p С. неизолированное решение. (II. в определении С. выполняется очевидно, все решения 2π периодичны.)

Если взять любую гладкую кривую в H, проходящую через $p(0)$, то ей соответствует двумерное многообразие P' (траекторий, исходящих из точек кривой), удовлетворяющее условиям определения С.

Отображение T тождественно, все мультипликаторы единицы.

В примерах 3.2—3.3. будем рассматривать систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -z - \frac{xy}{\nu\sqrt{x^2+z^2}}, \\ \dot{y} &= \frac{\sqrt{x^2+z^2}-1}{\nu}, \\ \dot{z} &= x - \frac{zy}{\nu\sqrt{x^2+z^2}} \end{aligned} \tag{5}$$

для разных значений ν.

3.2. $\nu = 2$,

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2}.$$

Уравнение решений, находящихся при $t = 0$ в H: $r = c_1$, $\varphi = t$, $\theta = t/2 + c_2$. При $t = 2\pi$ решения снова находятся на плоскости H, $r = c_1$, $\varphi = 2\pi$, $\theta = \pi + c_2$, видно, что они не замыкаются. Отображение $T_{2\Pi}$ — это отражение H на точку $p(0)$, $T_{2\pi}\xi = -\xi$. Характеристические мультипликаторы $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ и по теореме 1, p — изолированное периодическое решение с периодом 2π в смысле В. (С.).

При $t = 4\pi$, $r = c_1$, $\varphi = 4\pi$, $\theta = 2\pi + c_2$ каждое решение замыкается, $T_{4\pi}\xi = \xi$. Значит, существует трёхмерное многообразие из замкнутых траекторий с периодом 4π, так p с периодом 4π — неизолированное решение в смысле С. (Отсюда следует, что и в смысле А., что от периода не зависит.) Этот пример показывает, что В. и С. изолированность зависит и от выбранного нами периода.

Если взять отрезок в H, проходящий через $p(0)$, траектории решений, исходящих из точек этого отрезка, образуют двумерное неориентируемое многообразие P' (Лента Мёбиуса). С. неизолированность p можно доказать и с помощью этого многообразия.

3.3. $\nu = 4$

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{4}.$$

Повторяя рассуждения предыдущего примера, можно показать, что p с периодом 8π C. — неизолированное решение, а с периодами, меньшими (2π, 4π, 6π), В. — изолированное. И у этой системы существует трёхмерное многообразие из замкнутых траекторий, но из этого уже нельзя выбирать двумерное. (Если аналогично с 3.2 взяли бы отрезок в H через $p(0)$, например $0 \leq r \leq r_0$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$, то траектории, выходящие из точек этого отрезка, составили бы поверхность $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\varphi = 4\theta$, что уже не является многообразием. Эта поверхность похожа на согнутый траверс», и у точек L нет окрестности, гомеоморфной R^2.) Этот пример показывает, что вообще из многомерного многообразия замкнутых траекторий нельзя выбирать двумерное.

Из следующих примеров следует, что если $n = 3$, тогда из В. изолированности уже не следует А. изолированность.

3.4.

$$\begin{aligned} \dot r &= 0, & x &= \cos t, \\ \dot\varphi &= 1, & p\colon\ y &= 0, \\ \dot\theta &= r^2, & z &= \sin t. \end{aligned}$$

Траектории, как и в предыдущих примерах, находятся на торах

$$S_\gamma = \{r = \gamma, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_0.$$

Из третьего уравнения следует, что $\dot\theta = r^2$ постоянно на каждом торе, обхватывающем окружность L. Если $\gamma^2 = \dfrac{m}{q}$ — рациональное число, то на торе S_γ траектория каждого решения замкнутая (наименьший период решений $2\pi q$), если γ^2 иррациональное, то все траектории незамкнутые. Отсюда С. изолированность p с любым периодом уже следует, так как нет многообразия из замкнутых траекторий.

Но решение с любым периодом и В. изолированное. Для этого достаточно показать, что если γ^2 рациональное и стремится к нулю, то наименьший период решений на S_γ стремится к бесконечности. (В этом случае ясно, не существует последовательности периодических решений, период которых стремится к конечному τ_0.) Но из $\gamma^2 = \dfrac{m}{q} \to 0$ следует, что $q \to \infty$, а наименьший период $2\pi q$. В этом примере все три характеристических мультипликатора равняются единице.

3.5.

$$\begin{aligned} \dot r &= 0, & x &= \cos t, \\ \dot\varphi &= 1, & p\colon\ y &= 0, \\ \dot\theta &= r^2 + \sqrt{2}, & z &= \sin t. \end{aligned}$$

Этот пример полностью аналогичен 3.4., но в данном случае только один из характеристических мультипликаторов равняется единице, B. изолированность p следует из теоремы I ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \cos\sqrt{2}\cdot 2\pi + i \sin\sqrt{2}\cdot 2\pi$, $\lambda_3 = \cos\sqrt{2}\cdot 2\pi - i \sin\sqrt{2}\cdot 2\pi$).

В следующих примерах покажем, что из непрерывной дифференцируемости правой части f ещё не следует, что многообразие P в определении C. является дифференцируемым и $L \subset P$.

3.6.

$$\dot r = 0,$$
$$\dot\varphi = 1,$$
$$\dot\theta = r\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Существует двумерное многообразие траекторий, соответствующих периодическим решениям. (P: $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\theta = 0$.) Остальные траектории незамкнутые. $\left(\dot\theta = r\sin^2\frac{\theta}{2} > 0\right.$, если $\theta \neq 0$, θ монотонно возрастает с истечением времени.$\left.\right)$ Но L является границей P, отсюда неизолированность p очевидна, а в узком смысле мы должны считать С. изолированным решение p.

5.7.

$$\dot r = 0,$$
$$\dot\varphi = 1,$$
$$\dot\theta = g(\theta),$$

где

$$g(\theta) = \theta^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2(\theta - 2\pi)^2, \quad \theta\in[0, 2\pi].$$

Существует двумерное многообразие P из замкнутых траекторий ($0 \leq r \leq r_0$, $\theta = 0$ или $\theta = \pi/2$), но оно не является дифференцируемым.

В заключение для полноты покажем один пример, когда траектория p является A. изолированной.

5.8.

$$\dot r = 0,$$
$$\dot\varphi = 1,$$
$$\dot\theta = \sqrt{2}.$$

Так как число вращения $\sqrt{2}$ — иррациональное, решения на всех торах — незамкнутые. $\left(\right.$Данное уравнение в (x, y, z) координатах получается, если в (5) поставим $\left.\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Краткая аннотация

(Поступило: 2 марта 1977 года)

Представлено проф. М. Фаркаш

В работе приводится три определения изолированности траектории периодического решения с данным периодом τ_0 автономной системы дифференциальных уравнений. Сформулированы достаточные условия изолированности. На 13 конкретных двух и трёхмерных примерах рассматривается связь между определениями. Показаны условия их эквивалентности и характерные возможности поведения траекторий автономной системы в окрестности замкнутой траектории.

Литература

1. Farkas, M.: On isolated periodic solutions of differential systems, Annali di Matematica pura ed applicata (IV), 106 (1975), 233—243.
2. Мошон П.: Об изолированности периодического решения автономной системы, Annales Univ. Sci., Budapest, Sectio Math. 19. (1976), 63—67.
3. Хартман Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, Москва, 1970.

Петер Мошон, H — 1521, Будапешт