ZU DEN STEINERSCHEN KONSTRUKTIONEN

Von

GY. STROMMER

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 23. Juni 1977

Die vorliegende Note betrifft die Frage nach den Konstruktionen, welche unabhängig vom Parallelenpostulat durch bloßes Ziehen von geraden Linien ausgeführt werden können, wenn ein Kreis samt Mittelpunkt gezeichnet vorliegt.

Wir legen zu unseren Untersuchungen eine ebene Geometrie zu Grunde, in welcher die Axiome I1—3, II, III des von HILBERT in seiner Festschrift »Grundlagen der Geometrie« für die Euklidische Geometrie aufgestellten Systems erfüllt sind und überdies das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden gilt. (Der Satz, wonach zwei Kreise, wovon der eine einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb des anderen enthält, zwei Punkte gemein haben, ist eine Folge der genannten Axiome, so daß dieser Satz im folgenden nicht als Axiom hingestellt werden soll. Vgl. [9].)

Unsere Untersuchung wird zeigen, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jede Aufgabe, welche in unserer Geometrie mit Hilfe des Zirkels und Lineals lösbar ist, bei Benutzung des festen Kreises durch bloßes Ziehen von Geraden sich stets ausführen läßt, die Erfüllung der Forderung ist, daß die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechten gleich sei. Kennt man aber außer dem Hilfskreise in einer Geraden drei Punkte, von denen der eine in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt, welche letzteren von dem Mittelpunkte des Kreises nicht gleich weit entfernt sind, oder zwei zueinander senkrechte Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgehen, so kann man dieselben Aufgaben ohne irgend eine Annahme über die Winkelsumme im Dreieck lösen. Man braucht den Mittelpunkt des Kreises kennen, selbst wenn eine Strecke, die in zwei gleiche Teile geteilt ist, oder ein rechter Winkel zur Benutzung vorliegt.

Zum Schluß haben wir den Konstruktionen, welche mit dem Lineal und dem Einheitsdreher gelöst werden können, eine kurze Notiz gewidmet.

Im übrigen wollen wir zur Lösung der behandelten Aufgaben nur elementargeometrisch entwickelte Sätze heranziehen und auch die Anwendung der projektiven Methode vermeiden.

1. — Wir wollen zunächst zeigen, daß nicht jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe auch mittels Lineals und eines festen Kreises gelöst werden kann, wenn die Winkelsumme im Dreieck kleiner als zwei Rechte ist.

Zu dem Zwecke betrachten wir diejenige projektive Maßgeometrie, welche auf den Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 - e^2 = 0$$

gegründet werden kann, wobei e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, und stellen wir die folgende Aufgabe:

Es ist in der Ebene der Kreis

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

mit seinem Mittelpunkte $O = (0, 0)$ und der Punkt $A = (1, 0)$ gegeben; es ist mit Hilfe des Lineals allein der Punkt $B = (x, 0)$ zu finden, für welchen bei der vorgelegten Maßbestimmung $AB = OA$ ist.

Es ist leicht zu zeigen, daß diese Aufgabe mittels der vorgelegten Hilfsmittel nicht gelöst werden kann.

Ist nämlich eine Aufgabe mit unseren Hilfsmitteln lös[illegible] so ka[illegible] dieselbe auch dann lösen, wenn die Koordinaten der in der [illegible] tretenden willkürlichen Punkte algebraische Zahlen sind.

Nach den ersten Elementen der analytischen Geomet[illegible] Koordinaten der Schnittpunkte des gegebenen Hilfskreises m[illegible], die durch zwei ihrer Punkte gegeben ist, deren Koordinaten alg[illegible]ahlen sind, oder zweier Geraden, die durch je zwei Punkte von derselben Art gegeben sind, wieder algebraische Zahlen, und somit müßte auch x eine algebraische Zahl sein; dagegen ist x eine transzendente Zahl. Für x gilt nämlich

$$\frac{e+1}{e-1} = \frac{e-1}{e+1} \cdot \frac{e+x}{e-x},$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{2e^2}{e^2+1}.$$

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Um nun den entsprechenden Nachweis für den Fall zu erbringen, wo die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist, betrachte man zunächst den folgenden, von G. Forder ([3], S. 33—34) angegebenen Körper.

Es sei t ein Parameter und α irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt

$$\alpha = a_{m_1} t^{m_1} + a_{m_2} t^{m_2} + a_{m_3} t^{m_3} + \ldots;$$

darin mögen $a_{m_1} (\neq 0), a_{m_2}, a_{m_3}, \ldots$ beliebige reelle Zahlen bedeuten und $m_1, m_2, \ldots$ sei eine Reihe von beständig wachsenden rationalen Zahlen, die, wenn man sie in die Form eines nicht kürzbaren Bruches bringt, einen gemeinsamen Nenner haben. Wir betrachten die Ausdrücke von der Gestalt α, zu der wir die Zahl 0 hinzurechnen, als Größen, indem wir folgende Festsetzungen treffen:

Sind α', α'' irgend zwei Ausdrücke von der Gestalt α, so kann man offenbar durch Zusammenfügung bez. gliedweise Multiplication einen neuen Ausdruck von der Gestalt α bilden, der eindeutig bestimmt ist; dieser Ausdruck $\alpha' + \alpha''$ bez. $\alpha'\alpha''$ heißt die Summe bez. das Produkt der durch α', α'' dargestellten Größen.

Nun fragt sich aber, ob bei dieser Festsetzung der Rechnungsregeln die Division ausführbar ist, d. h. ob α' immer so bestimmt werden kann, daß $\alpha\alpha' = 1$ ist. Wir bemerken dazu zuerst, daß jede Größe α sich in der Form

$$\alpha = a_{m_1} t^{m_1} (1 + \tau)$$

darstellen läßt, wo τ ein Ausdruck von der Gestalt

$$\tau = a_1 t^{1/q} + a_2 t^{2/q} + \ldots$$

ist, ferner daß die unendliche Reihe

$$1 - \tau + \tau^2 - \ldots$$

sich stets nach steigenden Potenzen von t ordnen läßt, und wird dann zu einem eindeutig bestimmten Ausdruck von der Gestalt α. Ist nun

$$\alpha' = \frac{1}{a_{m_1}} t^{-m_1} (1 - \tau + \tau^2 - \ldots),$$

so ist

$$\alpha\alpha' = 1,$$

so daß die Division in der Tat eindeutig ausführbar ist.

Um endlich die Anordnung unserer Größen zu ermöglichen, nennen wir eine Größe α positiv oder negativ, je nachdem in dem sie darstellenden Ausdrucke der erste Koeffizient a_{m_1} positiv oder negativ ausfällt. Von zwei Größen α und β heißt α größer oder kleiner als β, je nachdem die Differenz $\alpha - \beta$ positiv oder negativ wird.

Es leuchtet ein, daß bei diesen Festsetzungen alle formalen Regeln und Gesetze, wie bei den gewöhnlichen reellen Zahlen, gültig sind. Ferner erkennen wir leicht, daß das Ziehen der Quadratwurzel aus einer positiven Größe im Bereiche unserer Größen stets ausführbar ist.

Wenn nämlich $\alpha > 0$ also $a_{m_1} > 0$ ist und für die Zahlen $b_1, b_2, \ldots$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2b_1, \\
a_2 &= 2b_2 + b_1^2, \\
a_3 &= 2b_3 + 2b_1 b_2, \\
&\cdots\cdots \\
a_k &= 2b_k + b_1 b_{k-1} + b_2 b_{k-2} + \ldots + b_{k-1} b_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

bestehen, so ist

$$\sqrt{a_{m_1}}\, t^{m_1/2}(1 + b_1 t^{1/q} + b_2 t^{2/q} + \ldots) = \sqrt{\alpha}\,.$$

Wir bauen nun aus unseren Größen eine künstliche Geometrie genau auf dieselbe Art auf, wie es DEHN ([2], § 8) getan hat: wir denken uns ein Paar von Größen (x, y) als einen Punkt; dabei werden als eigentliche Punkte nur diejenigen betrachtet, deren Koordinaten x, y folgenden Bedingungen genügen:

$$-n \cdot t < x < n \cdot t, \qquad -n \cdot t < y < n \cdot t,$$

wo n irgend eine positive ganze Zahl ist. Weiter verstehen wir unter einer Geraden das System von irgend drei Größen $(u : v : w)$, wobei u, v nicht beide Null sind; doch sollen die Systeme $(u : v : w)$ und $(au : av : aw)$, wo a irgend eine von 0 verschiedene Größe bedeutet, die nämliche Gerade darstellen. Das Bestehen der Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

möge ausdrücken, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $(u : v : w)$ liegt. Geraden, welche keinen eigentlichen Punkt enthalten, gelten nicht als eigentlich. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\ldots$ irgend welche eigentlichen Punkte auf einer Geraden, so möge dies ihre Reihenfolge auf der Geraden sein, wenn die Größen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ oder $y_1, y_2, y_3 \ldots$ in dieser Reihenfolge entweder beständig wachsen bez. abnehmen. Zwei beliebige Strecken sollen einander kongruent heißen, wenn sie im Sinne der projektiven Maßbestimmung, welche sich auf den imaginären Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 + e^2 = 0$$

bezieht, gleiche Längen haben. Nunmehr definieren wir die Gleichheit der Winkel auf Grund der der Strecken in der üblichen Weise. (Vgl. z. B. [8].)

Dann kann man nach dem Vorgange von DEHN zeigen, daß die Axiome I1—3, II, III in unserer Geometrie erfüllt sind. Auch gilt, wie man sieht, das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden. Zugleich ist klar, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als zwei Rechte ist.

Es sei nun der Kreis

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0$$

mit seinem Mittelpunkt $O = (0,0)$ und der Punkt $A = (t, 0)$ gegeben. Bedenken wir, daß alle Größen, welche aus solchen Größen, bei deren Darstellung durch

t sämtliche Koeffizienten algebraische Zahlen sind, durch die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und der Operation des Ziehens der Quadratwurzel aus positiven Größen hervorgehen, die bereits vermöge jener vier Operationen gewonnen worden sind, offenbar von der nämlichen Beschaffenheit sind, so erkennen wir auf dieselbe Weise, wie vorhin, daß die Aufgabe: es ist ein Punkt $B = (x, 0)$ allein mit dem Lineal zu konstruieren, für welchen $AB = OA$ gilt, in der zu Grunde gelegten Geometrie nicht lösbar ist. Denn nach Definition ist

$$\frac{e+t}{e-t} = \frac{e-t}{e+t} \cdot \frac{e+x}{e-x},$$

und folglich ist

$$x = \frac{2e^2t}{e^2+t} = 2t - \frac{2}{e^2}t^3 + \frac{2}{e^4}t^5 - \dots$$

2. — Wenn in einer Geometrie die zu Anfang dieser Note genannten Axiome sämtlich erfüllt sind und überdies die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, so kann man jede mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgabe unter Benutzung eines gezeichneten Kreises, dessen Mittelpunkt bekannt ist, durch bloßes Ziehen von geraden Linien im wesentlichen auf dem STEINER'schen Wege (s. [6]) lösen, indem man als parallel zwei zu einer dritten senkrechte Gerade betrachtet; die nötigen Abänderungen sind leicht ersichtlich.

Es soll nun bewiesen werden, daß man imstande ist, alle diese Aufgaben mit dem Lineal allein auch ohne irgend eine Annahme über die Winkelsumme im Dreieck zu lösen, wenn außer der Kreislinie (samt Mittelpunkt) in einer Geraden drei Punkte gegeben sind, wovon die eine in der Mitte der beiden übrigen liegt und diese letzteren von dem Mittelpunkte des Kreises nicht gleich weit abstehen, oder zwei zueinander senkrechte Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgehen.

Um dies zu zeigen, wollen wir zunächst eine Aufgabe, die sich durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen läßt und die wir später brauchen werden, dem angestrebten elementaren Charakter unserer Schrift entsprechend, ohne projektive Betrachtungen behandeln.

Diese Aufgabe ist die folgende:

Aufgabe 1. Gegeben seien durch einen Punkt O die Geraden a, b, c, b_1, c_1 derart, daß b_1 auf b und c_1 auf c senkrecht steht; es ist in O die Normale auf a zu konstruieren (Abb. 1).

Es sei A ein beliebiger Punkt auf a. Man nehme auf b einen Punkt B an, so daß eine der beiden Halbgeraden, in welche die Gerade c von dem Punkte O aus zerfällt, im Inneren des Winkels AOB verläuft. Ferner nehme man auf b_1 einen Punkt B_1 an, der bezüglich a auf derselben Seite wie B liegt. Die Gerade

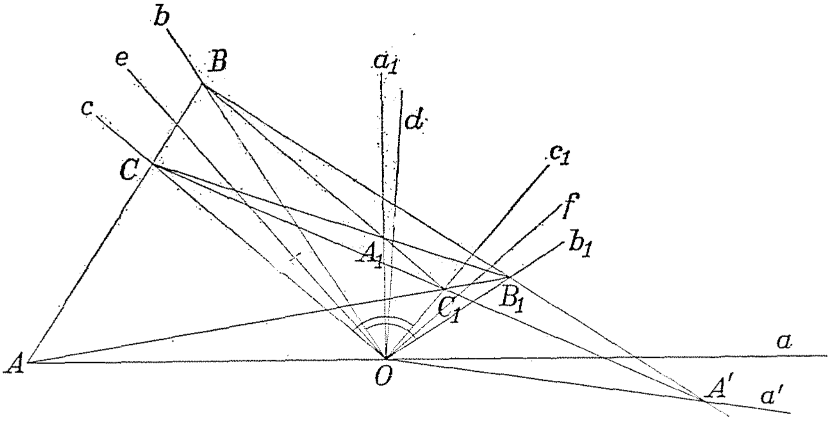

Abb. 1

AB treffe c in C, die Gerade AB_1 treffe c_1 in C_1 und es sei A_1 der Treffpunkt von BC_1 und B_1C: dann ist OA_1 die gesuchte Senkrechte.

Beweis: Wir bezeichnen die Halbierungslinien der Winkel BOC_1, BOC, B_1OC_1 der Reihe nach mit d, e, f. Dann sind die Geraden b und c_1, b_1 und c, e und f Spiegelbilder an d, ferner stehen die Geraden e, f aufeinander senkrecht.

Es sei A' der (eigentliche oder uneigentliche) Schnittpunkt der Geraden BB_1 und CC_1 und die Gerade OA' heiße a'. Dann sind b und c_1, b_1 und c, e und f Spiegelbilder an d. Wenn wir den Hilfssatz, mit dessen Hilfe HJELMSLEV ([5], S. 460—462) den Pascalschen Satz für das Geradenpaar bewiesen hat, auf O und das von den vier Geraden AB, AC_1, $A'B$, $A'C_1$ gebildete vollständige Vierseit anwenden, so ergibt sich, daß a und a' Spiegelbilder an d sind. Mit Hilfe desselben Hilfssatzes folgt aus der Betrachtung des von den vier Geraden $A'B$, $A'C$, A_1B, A_1C gebildeten vollständigen Vierseits, daß a' und a_1 Spiegelbilder an f sind. Es gelten daher die folgenden Kongruenzen:

$$(a, e) = (f, a') \quad \text{und} \quad (f, a') = (a_1, f),$$

und mithin gilt auch die Kongruenz:

$$(a, e) = (a_1, f) .$$

Da aber die Geraden e und f zueinander senkrecht sind, so folgt aus der letzten Kongruenz, daß auch a und a_1 zueinander senkrecht sind.

Es sei ein Kreis k samt Mittelpunkt O gegeben. Man kann dann folgende Aufgabe lösen (wie immer, nur durch bloßes Ziehen von geraden Linien).

A u f g a b e 2. Gegeben sei eine Gerade l, welche durch O geht, und ein Punkt P; durch P ist die Senkrechte auf l zu konstruieren.

Die Gerade l (Abb. 2) schneidet den Kreis k in zwei Punkten A und B. Man nehme auf k die Punkte C und D so an, daß B und D auf entgegengesetzten

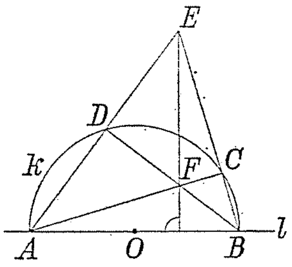

Abb. 2

Seiten der Geraden AC liegen. Es sei nun E der (eigentliche oder uneigentliche) Treffpunkt von AD und BC, ferner F der Treffpunkt von AC und BD; dann ist EF senkrecht zu AB.*

Wenn die Geraden AD und BC einander nicht schneiden sollten, so nehme man auf der Verlängerung von BC über C hinaus einen Punkt E an, und nehme statt D den Punkt, in welchem die Gerade AE den gegebenen Kreis k zum zweitenmal schneidet.

Durch wiederholte Anwendung dieser Konstruktion erhält man zwei Geraden EF und GH, die auf l senkrecht stehen. Konstruiert man zu EF, EG, EH den vierten, dem Strahl EF zugeordneten harmonischen Strahl,** welcher von GH in J geschnitten wird, und dann zu PG, PH, PJ den vierten, dem Strahl PJ zugeordneten harmonischen Strahl PK, so steht PK auf l senkrecht.

A u f g a b e 3. Gegeben ist eine Gerade l, welche nicht durch O geht; durch O ist die Normale auf l zu konstruieren (Abb. 3).

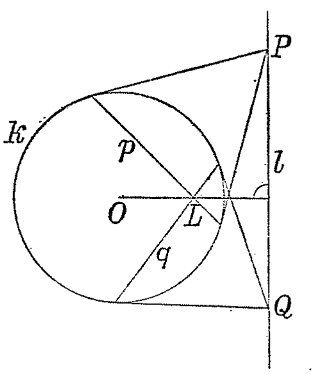

Abb. 3

* Bettrefs des Beweises dieser Tatsache mit Benutzung elementaren Hilfsmittel vgl. [9], Satz 1.

** Über diesen Punkt ist zu bemerken, daß es möglich ist, auf die Axiome I1—3, II, III auch eine metrische Theorie der harmonischen Elemente in vollkommener Strenge zu gründen, indem man die folgende Definition aufstellt: Es seien A, B, C, D vier Punkte auf einer Geraden, wovon C und D nicht eigentlich zu sein brauchen; man ziehe durch A und C zwei beliebige, zueinander senkrechte Gerade, die sich in M treffen mögen; wenn dann dieselben mit ME, Man nehme auf l die Punkte P und Q außerhalb des Kreises k an und bestimme dann die Polaren p und q von P und Q bezüglich k.* Die Geraden p und q mögen sich in L schneiden: dann ist $OL \perp PQ$.

Aufgabe 4. Es ist der symmetrische Punkt zu einem gegebenen Punkt A in bezug auf O zu bestimmen (Abb. 4).

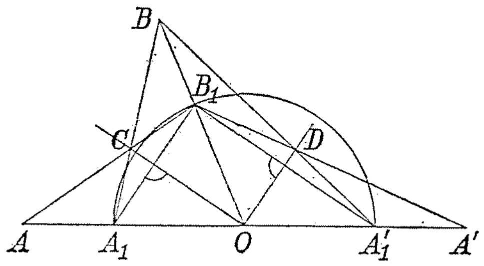

Abb. 4

Es treffe die von O aus durch A gehende Halbgerade den Kreis k in A_1. Man nehme außerhalb der Geraden OA einen Punkt B_1 auf k an. Die von O auf A_1B_1 gefällte Senkrechte treffe AB_1 in C. Ferner sei B der Treffpunkt von A_1C und OB_1 und A_1' dem Punkte A_1 diametral gegenüberliegender Punkt. Man fälle von A eine Senkrechte auf $A_1'B_1$, die $A_1'B$ in D schneiden möge. Die Verbindungslinie B_1D wird die Gerade OA in einem Punkte A' treffen, der der gesuchte Punkt ist.

Es sei außer dem Hilfskreise eine Strecke (deren Endpunkte als nicht von O gleich weit entfernt vorausgesetzt werden) samt Mitte gegeben. Man kann dann folgende Aufgaben lösen:

Aufgabe 5. Es sind zueinander senkrechte Geraden zu ziehen, die nicht durch O gehen.

Es sei AB die gegebene Strecke und M der Mittelpunkt von AB.

a) Die Gerade AB geht durch O (Abb. 5). Man errichte in dem Punkt M die Senkrechte MP auf AB. Dann nehme man auf AP den Punkt A' so an, daß P zwischen A und A' liegt. Es sei nun B' der Treffpunkt von PB und MA'. Bestimmt man zu den Punkten A', B', M den vierten, dem Punkt M zugeordneten harmonischen Punkt N, so stehen PM und PN aufeinander senkrecht.

MD gleiche Winkel einschließen, so werden die vier Punkte A, B, C, D *vier harmonische Punkte* genannt, und zwar heißen A und C, so wie B und D *zugeordnete harmonische Punkte.* Ebenso werden vier Strahlen, welche von irgend einem beliebigen Punkte O aus durch vier harmonischen Punkte A, B, C, D gehen, *vier harmonische Strahlen* und sowohl OA und OC, als OB und OD *zugeordnete harmonische Strahlen* genannt. Auf Grund dieser Erklärung folgen mit Hilfe des oben bei der Lösung der Aufgabe 1 erwähnten Hilfssatzes von HJELMSLEV leicht die bekannten Eigenschaften der harmonischen Elemente. Vgl. [7] S. 20—26.

* Vgl. [9], sowie [10] S. 37—53, wo unter anderem die harmonischen und polaren Eigenschaften des Kreises elementar abgeleitet werden.

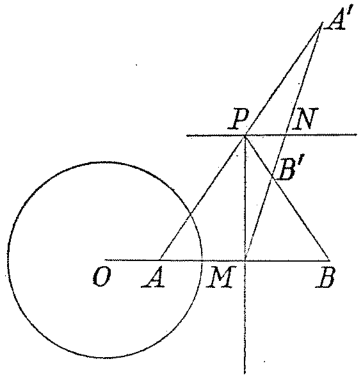

Abb. 5

b) Die Gerade AB geht nicht durch O (Abb. 6). Man bestimme den symmetrischen Punkt A' zu A in bezug auf O. Die Geraden $A'M$ und BO mögen sich in S, die Geraden AS und $A'B$ in N schneiden. Dann ist die Strecke $A'B$ durch N halbiert und somit steht das von M auf ON gefällte Lot auf AB senkrecht.

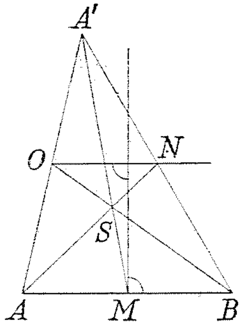

Abb. 6

A u f g a b e 6. Auf der beliebig gegebenen Geraden l, welche nicht durch O geht, ist in einem gegebenen Punkt P die Senkrechte zu errichten.

Mann bestimme zunächst zwei Paare zueinander senkrechter Geraden, welche nicht durch O gehen und einander in den außerhalb der Geraden OP gelegenen Punkten M und N schneiden. Errichtet man in M und N die Normale auf OM und ON, so erhält man schließlich je zwei Paare senkrechter Geraden durch M und N. Man kann dann in M und N auf PM und PN die Senkrechte errichten. Zeichnet man von O aus die Lote auf PM und PN, so kann man in P auf PM und PN die Normalen errichten und mit deren Hilfe die Gerade konstruieren, welche in P auf l senkrecht steht.

A u f g a b e 7. Gegeben sei eine beliebige Gerade l, welche nicht durch O geht, und ein Punkt P; von P aus ist das Lot auf l zu fällen.

Man errichte in zwei beliebigen Punkten die Normale auf l und verfahre, wie bei der Aufgabe 1.

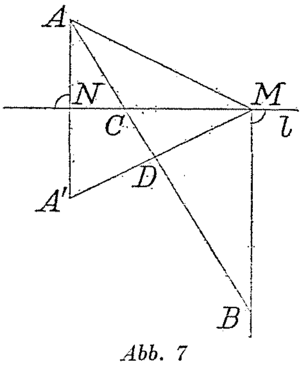

Abb. 7

Aufgabe 8. Es ist der symmetrische Punkt zu einem gegebenen Punkt A in bezug auf eine gegebene Gerade l zu bestimmen (Abb. 7).

Man nehme einen Punkt M auf l an, ziehe AN senkrecht auf l und errichte nach der entgegengesetzten Seite hin MB in M ebenfalls senkrecht zu l. Dann wird die Verbindungslinie AB die Gerade l in einem Punkt C treffen. Bestimmt man nun zu den Punkten A, B, C den vierten, dem Punkt A zugeordneten harmonischen Punkt D, so schneiden sich die Geraden AN und MD in dem gesuchten Punkt A'.

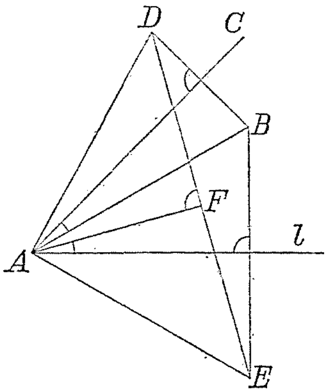

Abb. 8

Aufgabe 9. Es soll ein Winkel BAC so um A gedreht werden, daß AB mit einem von A ausgehenden Halbstrahl l zusammenfällt (Abb. 8).

Man bestimme die symmetrischen Punkte D und E zu B in bezug auf AC bez. l und ziehe hierauf AF senkrecht auf die Verbindungslinie DE: dann ist nach HESSENBERG ([4], S. 70—71) AF der gesuchte Schenkel.

Aufgabe 10. Gegeben sei ein Punkt A und eine Gerade l; es sind die Schnittpunkte von l mit jenem Kreise zu bestimmen, welcher um O mit dem Radius OA geschlagen werden kann.

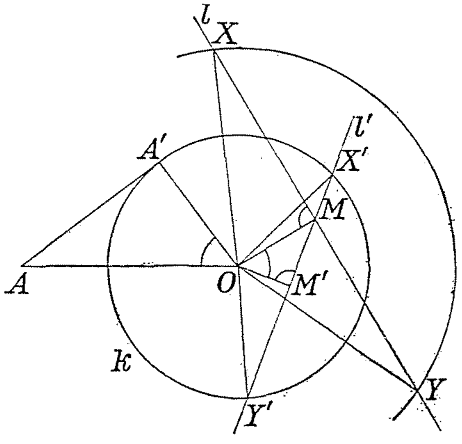

Abb. 9

a) OA ist größer als das Radius des Hilfskreises (Abb. 9). Man lege aus dem Punkte A an k eine Tangente, ihr Berührungspunkt sei A'. (Auf Grund der Polarentheorie für den Kreis kann A' durch bloßes Ziehen von geraden Linien konstruiert werden.) Dann fälle man von O die Senkrechte OM auf l und trage den Winkel AOA' an den Halbstrahl OM an. Sodann fälle man von M auf den anderen Schenkel dieses Winkels das Lot $MM' = l'$, welches den Kreis k in X' und Y' schneiden möge. Zeichnet man durch O gerade Linien, welche mit OM den Winkel $X'OM'$ einschließen, so schneiden dieselben die gegebene Gerade in den gesuchten Punkten X und Y.

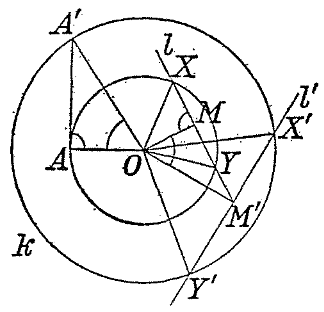

Abb. 10

b) OA ist kleiner als der Radius des Hilfskreises (Abb. 10). Man errichte in A auf OA die Senkrechte, welche den Kreis k in A' trifft. Dann fälle man von O das Lot OM auf l und trage an OM den Winkel AOA' an. Der andere Schenkel dieses Winkels schneidet die Gerade l in einem Punkte M'. Man errichte in M' auf OM' die Normale l', welche den Hilfskreis in X' und Y' trifft, und ziehe durch O gerade Linien, welche mit OM den Winkel $X'OM'$ einschließen. Dann werden diese Geraden auf l die gesuchten Punkte X, Y ergeben.

A u f g a b e 11. Einen Winkel zu halbieren.

Es wird offenbar genügen, hier den Fall zu betrachten, in welchem der gegebene Winkel spitz ist.

a) Der zu hälftende Winkel hat O zum Scheitel. Die Schenkel des Winkels treffen den Kreis k in den Punkten A und B. Man fälle von A und B die Lote AA_1 und BB_1 auf OB und OA. Der Treffpunkt dieser Lote sei C: dann ist OC die Halbierende des Winkels AOB.

b) Der Scheitel des Winkels fällt nicht in O (Abb. 11). Es sei O_1 der Scheitel des Winkels. Mit Rücksicht auf der Aufgabe 9 kann man annehmen, daß einer der beiden Schenkel des Winkels durch O hindurchgeht.

Man nehme auf der Verlängerung von OO_1 über O_1 hinaus den beliebigen Punkt S an und bestimme zu O, O_1, S den vierten, dem Punkte S zugeordneten

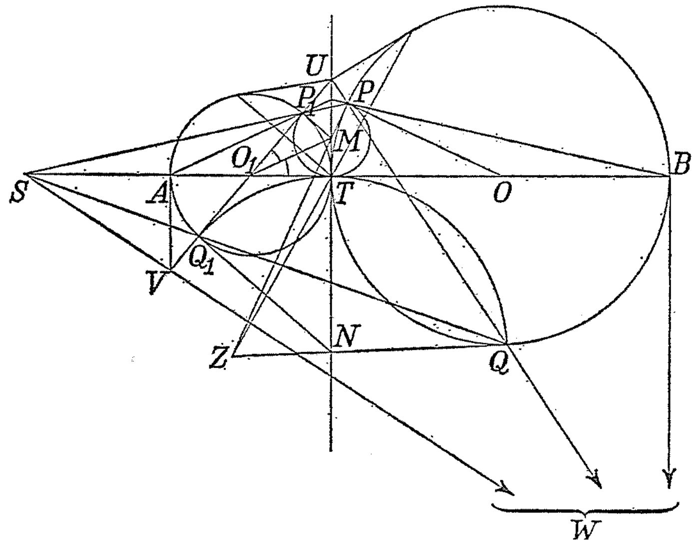

Abb. 11

harmonischen Punkt T. Die in T auf den Schenkel O_1T errichtete Senkrechte treffe den anderen Schenkel in U. Sollte jene Senkrechte den Schenkel nicht schneiden, so nehme man anstatt T und S den Fußpunkt des von einem beliebigen Punkte U des Schenkels auf OO_1 gefällten Lotes bez. den Punkt, welcher von derselben durch O, O_1 harmonisch getrennt ist. Es seien A und B die zu T symmetrischen Punkte in bezug auf O_1 bez. O. Man errichte in A auf OO_1 die Normale, welche O_1U in V schneidet. Dann errichte man in B auf OO_1 die Normale; diese schneidet die Gerade SV in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt W. Es seien P, Q die Schnittpunkte von UW mit jenem Kreise, welcher O als Mittelpunkt und OT als Radius hat, und man nehme an, daß P zwischen U und Q liegt. Die in P auf OP errichtete Senkrechte treffe TU in M: dann ist O_1M die Halbierungslinie des gegebenen Winkels.

B e w e i s: Wenn wir eine Inversion mit S als Zentrum festlegen,* so daß die sich in T berührenden Kreise um O und O_1 einander invers entsprechen, und sind P_1 und Q_1 die inversen Punkte von P und Q, so sind P und P_1 auf einem Kreise, welcher die beiden Kreise um O und O_1 in T rechtwinklig schneidet. Hieraus folgt, daß die in P und P_1 an den Kreis um O, bez. O_1 gelegten Tangenten sich in einem Punkte M der in T auf OO_1 errichteten Senkrechte schneiden. Auf dieselbe Weise finden wir, daß die in Q und Q_1 an den Kreis um O bez. O_1 gelegten Tangenten sich in einem (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte N von TM schneiden. Bedenken wir, daß PQ und P_1Q_1 die Gerade TM in einem Punkt schneiden, welcher von T durch M, N harmonisch getrennt ist, so sehen wir, daß PQ und P_1Q_1 die Gerade TM je in einem Punkt schneidet, welcher von T durch M, N harmonisch getrennt ist, so sehen wir, daß PQ und P_1Q_1 die Gerade TM in einem und demselben Punkte U treffen. Aus gleichen Gründen folgt, daß AP_1 und BP die Gerade TM in einem und demselben Punkte treffen. Infolge dieses Umstandes liegen die beiden Dreiecke VAP_1 und WBP bezüglich S perspektiv. Hieraus folgt, daß eine der beiden Tangenten von M an denjenigen Kreis, welcher O_1 als Mittelpunkt und O_1T als Radius hat, den Kreis in dem Endpunkte des von O_1 aus nach U gezogenen Radius berührt; daher ist

$$\sphericalangle TO_1M = \sphericalangle MO_1U.$$

A u f g a b e 12. Man soll die Strecke AB halbieren (Abb. 12).

Man errichte in A und B nach der nämlichen Seite hin die Lote AC und BD auf AB. Sodann konstruiere man die Halbierungslinien AE und BF des

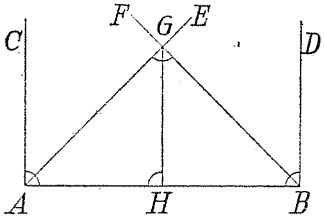

Abb. 12

Winkels CAB bez. ABD. Dann schneiden sich entweder AE und BF oder die von A und B auf BF bez. AE gefällten Lote, je nachdem E auf derselben Seite des auf BF gefällten Lotes wie B oder auf der entgegengesetzten Seite liegt. Man nehme an, daß AE und BF sich in einem Punkte G treffen und ziehe GH senkrecht auf AB, so wird man in H den verlangten Mittelpunkt erhalten.

* Es ist angebracht zu bemerken, daß die Begründung der Kreisverwandtschaft lediglich auf Grund der zu Anfang dieser Note genannten Axiome elementargeometrisch möglich ist. Vgl. [10].

Mit Hilfe dieser Aufgaben können wir nun die Aufgabe »die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem Kreise von gegebenem Mittelpunkt und gegebenem Radius« leicht lösen.

Es sei nämlich l_1 die gegebene Gerade, O_1 der Mittelpunkt und O_1A_1 der Radius des gegebenen Kreises. Man errichte die Mittelsenkrechte auf OO_1 und konstruiere die Spiegelbilder l und A von l_1 und A_1 an derselben. Dann bestimme man die Schnittpunkte der Geraden l mit jenem Kreise, der O als Mittelpunkt und OA als Radius hat. Endlich konstruiere man die Spiegelbilder der so erhaltenen Punkte in bezug auf die Mittelsenkrechte von OO_1, wodurch man dann die gesuchten Schnittpunkte erhält.

Auch kann man die andere fundamentale Aufgabe, »die Schnittpunkte zweier gegebener Kreise zu bestimmen«, mit unseren beschränkten Hilfsmitteln auf die vorhergehende zurückführen.

Es seien in der Tat O_1, O_2 die Mittelpunkte der beiden gegebenen Kreise (Abb. 13), r_1, r_2 ihre Radien, gegeben durch beliebig gelegene Strecken.

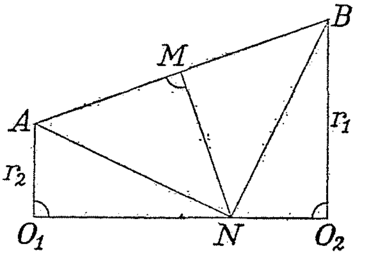

Abb. 13

Man ziehe O_1A und O_2B senkrecht zu O_1O_2, mache O_1A gleich r_2 und O_2B gleich r_1; hierauf halbiere man AB in M und ziehe durch M die Senkrechte zu AB; schneidet diese die Zentrale O_1O_2 in dem Punkte N, so steht die gemeinsame Sehne der gegebenen Kreise in N auf O_1O_2 senkrecht*, und daher wird der Aufgabe genügt, wenn man die Schnittpunkte dieser Senkrechte mit einem der beiden Kreise sucht.

Man kann demnach jede mit dem Lineal und dem Zirkel lösbare Aufgabe durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen, wenn außer dem Hilfskreise (samt Mittelpunkt) in einer Geraden drei Punkte gegeben sind, wovon der eine in der Mitte zwischen den zwei übrigen liegt, falls diese letzteren vom Mittelpunkt des Hilfskreises nicht gleich weit abstehen.

Man erkennt ferner aus den Aufgaben 5 und 6, daß die Angabe von zwei gleichen Strecken, die in einer Geraden nebeneinander liegen, der Angabe von zwei zueinander senkrechten Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt des

* Hinsichtlich des Beweises vgl. [11].

Hilfskreises hindurchgehen, äquivalent ist, d. h. hat man in einer Geraden zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken gegeben, so kann man leicht zueinander senkrechte Geraden zeichnen, hat man zueinander senkrechte Geraden gezeichnet, so kann man sofort in einer Geraden zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken konstruieren.

3. — Es entsteht nun die Frage, ob man den Mittelpunkt des Hilfskreises nicht entbehren kann. Wir werden zeigen, daß die Angabe des Mittelpunktes nötig ist, indem wir den folgenden Satz beweisen:

Wenn in der gewöhnlichen ebenen Geometrie eine Kreislinie gezeichnet vorliegt (von dem man aber den Mittelpunkt nicht kennt), und außerdem in einer Geraden, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken gegeben sind, oder zwei zueinander senkrechte Geraden, die sich nicht in dem Mittelpunkt des Kreises schneiden, so ist man noch nicht imstande, den unbekannten Mittelpunkt des Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo in einer Geraden l zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken AB, BC gegeben sind.

Wir nehmen nun an, daß l den gegebenen Kreis k nicht berührt.* Wir wählen die von dem Mittelpunkte M des Kreises k auf l gefällte Senkrechte, welche l in X trifft, als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, den Mittelpunkt O desjenigen Kreises, welcher l in X berührt und den Kreis k rechtwinklig schneidet, als Ursprung, die Länge der Tangenten von O an k als Einheit und die Richtung von O nach X als positive Richtung der x-Achse. Bezeichnen wir dann die Abszisse von M mit a, so ist die Gleichung des Kreises k

$$(x - a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0,$$

und die der Geraden l

$$x - 1 = 0.$$

Die Kollineation

$$x = \frac{1}{x'}, \; y = \frac{y'}{x'}$$

führt k in sich über, läßt aber den Mittelpunkt $(a, 0)$ nicht fest, sondern führt ihn in den Punkt $(1/a, 0)$ über. Ferner entspricht l sich selbst, und zwar Punkt für Punkt.

Nehmen wir also an, daß man aus den Punkten A, B, C und aus einer Anzahl von willkürlichen Punkten bei Benutzung des festen Kreises k durch bloßes Ziehen von geraden Linien den Mittelpunkt von k konstruieren kann, so müßte die lineale Konstruktion, die aus der so ausgeführten Konstruktion durch die Anwendung der eben erwähnten Kollineation erhalten werden kann,

* Der nachfolgende Beweis ist eine für den gegenwärtigen Zweck in geeigneter Weise abgeänderte Schlußweise von HILBERT; vgl. [1].

auch zum Mittelpunkt führen. Die so erhaltene Konstruktion führt aber nach obigem auf den Punkt $(1/a, 0)$ anstatt an $(a, 0)$. Die gestellte Aufgabe ist mithin nicht lösbar.

Nunmehr möge l den Kreis k berühren. Um den entsprechenden Nachweis für diesen Fall zu erbringen, bedarf man folgender Bemerkung: Wenn in einer Geraden drei Punkte A, B, C gegeben sind, wovon B in der Mitte von AC liegt, so kann man, wie wir wissen, durch bloßes Ziehen von geraden Linien durch irgend einen Punkt zu jener Geraden die Parallele ziehen und auf der so erhaltenen Geraden irgend eine gegebene Strecke halbieren oder verdoppeln.

Zieht man nun durch zwei beliebige Punkte P und R von k die Parallelen zu l, die den Kreis k noch im Punkte Q bez. S treffen, und bestimmt die Mittelpunkte N und O von PQ bez. RS, deren Verbindungslinie den Kreis in den diametral gegenüberliegenden Punkten T, U schneiden, dann ist die durch T zu l gezogene Parallele Tangente des Kreises.

Auf dieser Tangenten kann man dann nach obigem drei Punkte bestimmen, wovon der eine gleich weit von den übrigen entfernt ist. Wenn es also eine Konstruktion gäbe, welche aus diesen Punkten mit Benutzung des festen Kreises k durch bloßes Ziehen von geraden Linien zum Mittelpunkt von k führt, so gäbe es auch eine Konstruktion, die aus den gegebenen Punkten A, B, C von l auch im Falle, daß dieselbe den Kreis k nicht trifft, zum Mittelpunkte von k führt. Diese Folgerung steht im Widerspruch mit dem vorhin Bewiesenen.

Wir haben gesehen, daß, wenn auf einer Geraden l zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken gegeben sind, dann derjenige Durchmesser des Kreises k, der zu l senkrecht ist, sowie die Tangente in einem Endpunkte dieses Durchmessers durch bloßes Ziehen von geraden Linien erhalten werden kann. Verbindet man die Endpunkte des so erhaltenen Durchmessers mit einem beliebigen Punkte von k, so erhält man zwei zueinander senkrechte Geraden.

Aus dieser Tatsache entnehmen wir genau wie vorhin, daß man nicht imstande ist, den Mittelpunkt der gegebenen Kreislinie durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden, auch wenn außer dieser Kreislinie noch zwei zueinander senkrechte Geraden gegeben sind, die sich in einem Punkte der Kreislinie treffen.

Es bleibt also nur zu zeigen, daß es unmöglich ist, den unbekannten Mittelpunkt eines gezeichnet vorliegenden Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden, auch wenn man außer dem Kreise zwei zueinander senkrechte Geraden kennt, die nicht durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgehen und deren Schnittpunkt nicht auf der Kreislinie liegt.

Die harmonische Perspektivität, welche den Treffpunkt der gegebenen Geraden zum Zentrum und die Polare von ihm in bezug auf den Kreis zur Achse hat, führt den Kreis und die gegebenen Geraden in sich über, läßt den Mittelpunkt des Kreises jedoch nicht fest.

Aus der Annahme, daß es eine lineale Konstruktion gibt, welche auf den Mittelpunkt des Kreises führt, gelangen wir durch die Anwendung der obigen Perspektivität auf diese Konstruktion zu einem Widerspruch. Somit ist durch Wiederlegung unserer Annahme der zu Anfang dieser Nr. 3 aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

Endlich ist es für unsere Untersuchung notwendig, einzusehen, daß der unbekannte Mittelpunkt des gezeichneten Kreises auch im Falle, wo in einer Geraden l, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, drei Punkte A, B, C gegeben sind, von denen B in der Mitte zwischen A und C liegt, mittels des Lineals allein im allgemeinen **nicht** konstruiert werden kann.

Um dies einzusehen, legen wir die von G. Forder ([3], S. 337—338) konstruierte Semi-Euklidische ebene Geometrie zu Grunde,* in welcher die Axiome I1—3, II, III erfüllt sind und überdies das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden gilt. In dieser Geometrie gibt es durch einem außerhalb einer gegebenen Geraden beliebig angenommenen Punkt unendlich viele Geraden, die die gegebene Gerade nicht treffen und dennoch gelten die Sätze der Euklidischen Geometrie.

Wenn wir nun wissen, daß l durch den Mittelpunkt von k hindurchgeht, so können wir nach obigem den Mittelpunkt von k leicht finden, indem wir zwei Gerade, die auf ein und derselben dritten Geraden senkrecht stehen, als zueinander parallel betrachten. Man kann aber mittels des Lineals allein nicht prüfen, ob die Gerade l durch den Mittelpunkt von k hindurchgeht. Denn eine harmonische Perspektivität, welche eine zu l parallele Sekante von k zur Achse und den Pol derselben bezüglich k zum Zentrum hat, führt den Kreis k in sich und die gegebenen Punkte A, B, C in drei Punkte A', B', C' über, die auf einer Geraden l' liegen und von denen B' gleich weit von A' und C' entfernt ist. Unterwirft man irgend eine lineale Konstruktion dieser Perspektivität, so erhält man eine Konstruktion von der nämlichen Beschaffenheit. Nun ist unsere Behauptung aus dem Umstande ersichtlich, daß die betrachtete Perspektivität den Mittelpunkt des Kreises nicht festläßt. Aus diesem Umstande erkennen wir zugleich auf dieselbe Weise wie vorhin, daß man nicht imstande ist, den unbekannten Mittelpunkt des festen Kreises durch bloßes Ziehen von geraden Linien zu finden.

4. — Um in der gewöhnlichen Geometrie die Konstruktionsaufgaben, die mit Lineal und Eichmaß lösbar sind, auszuführen, genügt es, wie bekannt, neben dem Lineal den Einheitsdreher anzuwenden, ein Instrument, welches

* Wenn das Lineal nicht allein dazu dient, gerade Linien zu zeichnen, sondern auch dazu, festzustellen, ob zwei Gerade (welche je durch zwei ihrer Punkte angegeben sind) sich schneiden oder nicht schneiden, so kann man in der gewöhnlichen Geometrie mittels des Lineals prüfen, ob eine Gerade durch den unbekannten Mittelpunkt des festen Kreises hindurchgeht oder nicht durch ihn geht, indem man die Tangenten des Kreises in den Schnittpunkten derselben mit der gegebenen Geraden auf Grund des Pascalschen Satzes mit dem Lineal allein konstruiert und prüft, ob dieselbe sich schneiden oder nicht schneiden.

das Abtragen einer einzigen Strecke, etwa der Einheitsstrecke von einem einzigen bestimmten Punkte aus ermöglicht.

Nun stehen die mit Lineal und Zirkel ausführbaren Konstruktionen in derselben Beziehung zu den Konstruktionen, die man durch bloßes Ziehen von geraden Linien lösen kann, wenn in der Ebene ein fester Kreis samt Mittelpunkt gezeichnet vorliegt, wie die mit Lineal und Eichmaß ausführbaren Konstruktionen zu den Konstruktionen, die man mit dem Lineal und dem Einheitsdreher ausführen kann.

Der Umstand, daß man in einer Geometrie, in welcher die Axiome I1—3, II, III erfüllt sind und überdies das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden gilt, alle Aufgaben, die mit Zirkel und Lineal lösbar sind, mit dem Lineal allein ausführen kann, wenn außer einer Kreislinie samt Mittelpunkt in einer Geraden zwei nebeneinander liegende gleiche Strecken oder zwei zueinander senkrechte Geraden gegeben sind, könnte zur Vermutung führen, daß man alle Konstruktionsaufgaben, die mit dem Lineal und Eichmaß lösbar sind, nach Vorgabe einer gezeichneten Strecken mit gegebenem Mittelpunkt oder zwei senkrechter Geraden mit Lineal und Einheitsdreher ausführen könne, wenn die Einheit mittels des Einheitsdrehers von einem Punkte aus abgetragen werden kann, welche von den Endpunkten der gegebenen Strecken nicht gleich weit absteht bez. nicht auf der gegebenen Geraden liegt.

Um diese Frage zu beantworten, werden wir zeigen, daß der Punkt, welcher in der gewöhnlichen Cartesischen Geometrie die mit den Punkten

$$(0, 0), \quad (\sqrt{2} - 1, 0)$$

begrenzte Strecke bei derjenigen projektiven Maßbestimmung hälftet, welche auf den Fundamentalkegelschnitt

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

gegründet werden kann, mit dem Lineal und dem Eichmaß allein nicht konstruierbar ist.

Wenn nämlich ein Punkt durch bloßes Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken konstruiert werden kann, so läßt sich aus dem engsten Zahlkörper Ω, welcher die Koordinaten der gegebenen Punkte enthält, durch sukzessive Adjunktion der Zahlen $\sqrt{1 + \omega^2}$, wobei ω dem ursprünglichen oder einem bereits aus diesem entstandenen Körper angehören muß, ein Körper bilden, in welchem die Koordinaten jenes Punktes enthalten sind.

Nun ist die Abszisse x des gesuchten Mittelpunkes diejenige Wurzel der Gleichung

$$\frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{2} - x} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2} + x} \cdot (2\sqrt{2} - 1),$$

für welche die Ungleichung

$$0 < x < 2\sqrt{2} - 1$$

erfüllt ist. Daraus ergibt sich

$$x = \frac{2 - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{\sqrt{2} - 1}.$$

Wenn nun x in einem Körper Ω enthalten würde, zu dem man von Ω aus in der angegebenen Weise gelangt, so würde auch

$$2 - (\sqrt{2} - 1)x = \sqrt{4\sqrt{2} - 2}$$

eine Zahl in ω und da ein Zahlkörper, in welchem die Zahl ω vorkommt, auch jede zu ω konjugierte Zahl enthält, so müßte auch $\sqrt{-4\sqrt{2} - 2}$ dem Körper Ω angehören, was unmöglich ist, da Ω nur reelle Zahlen enthält, diese Zahl aber imaginär ist. Damit ist die obige Behauptung bewiesen.

Die angestellten Überlegungen lassen erkennen, daß der gesuchte Punkt durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken auch dann nicht konstruiert werden kann, wenn auf einer Geraden zwei nebeneinander liegende (für die getroffene Maßbestimmung) gleiche Strecken oder zwei (im Sinne der Maßbestimmung) zueinander senkrechte Geraden zur Benutzung vorliegen.

Ist nämlich eine Aufgabe mit den jetzt vorliegenden Hilfsmitteln lösbar, so kann man dieselbe Aufgabe auch dann lösen, wenn die beiden Endpunkte einer der gegebenen Strecken bez. der gemeinsame Punkt der beiden gegebenen Geraden, sowie ein beliebiger Punkt einer von denselben rationale Koordinate haben. Man kann dann den unbekannten Endpunkt der anderen Strecke bez. beliebig viele Punkte der anderen Geraden, wie leicht zu sehen, mit Hilfe des Lineals und des Eichmaßes konstruieren. Daher sind die Koordinaten derjenigen Punkte, welche mit Hilfe der gegebenen Strecken bez. Geraden durch Ziehen von geraden Linien und Abtragen von Strecken konstruiert werden können, in einem Körper enthalten, welcher aus Ω in der angegebenen Weise entsteht. Die gestellte Aufgabe ist mithin auch dann nicht lösbar, wenn auf dem Zeichenblatte die genannten Figuren zur Benutzung vorliegen.

Indem wir bedenken, daß irgendeine Konstruktion, die in unserer Maßgeometrie mit dem Lineal und dem Einheitsdreher ausgeführt wird, indem wir die Einheit von O aus abtragen, zugleich eine in der gewöhnlichen Ebene mit denselben Hilfsmitteln ausgeführte Konstruktions ist, erkennen wir auf Grund der oben Bewiesenen, daß man nicht imstande ist, in einer Geometrie, in welche die Axiome I1—3, II, III erfüllt sind und überdies das Axiom über das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden gilt, alle diejenigen Konstruktionsaufgaben, die sich mit Lineal und Eichmaß ausführen lassen, mit Lineal und Einheitsdreher auszuführen, selbst wenn eine Strecke, die in zwei gleiche Teile geteilt ist, oder ein rechter Winkel gegeben ist, da ja in dieser Geometrie eine Strecke mit den erstgenannten Hilfsmitteln gehälftet werden kann.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist die Frage nach der Konstruktionen behandelt, die sich in der elementaren absoluten Geometrie durch bloßes Ziehen von geraden Linien ausführen lassen, wenn ein Kreis samt Mitte gezeichnet vorliegt. Am Ende der Arbeit ist eine kurze Notiz den Konstruktionen gewidmet, die in der vorgelegten Geometrie mit dem Lineal und dem Einheitsdreher gelöst werden können.

Literatur

1. Cauer, D.: Über die Konstruktion des Mittelpunktes eines Kreises mit dem Lineal allein, Math. Ann. 73 (1913), 90—94.
2. Dehn, M.: Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Ann. 53 (1900), 404—439.
3. Forder, G.: The Foundations of Euclidean Geometry, Cambridge 1927.
4. Hessenberg, G.: Neue Begründung der Sphärik, S.—B. Berl. Math. Ges. 4 (1905), 69—71.
5. Hjemslev, J.: Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. 64 (1907), 449—474.
6. Steiner, J.: Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833. Siehe auch Ges. Werke I, Berlin 1881, S. 421—522 und Ostwald's Klassiker Nr. 60, Leipzig 1895.
7. Strommer Gy.: A párhuzamosok axiomájától független geometriai szerkesztések elméletéhez, Budapest 1974.
8. Strommer, J.: Über die Begründung der Kongruenztatsachen der ebenen Geometrie, Publ. Math. Debrecen, 7 (1960), 394—407.
9. Strommer, J.: Über die Kreisaxiome, Period. Math. Hungar. 4 (1973), 3—16.
10. Strommer, J.: Über das Schneiden von Geraden und Zyklen in der absoluten Geometrie, Beitr. Alg. Geom. 2 (1974), 37—53.
11. Strommer, J.: Vom Parallelenpostulat unabhängige Konstruktionen mit Hilfe eines Lineals mit zwei Konten, von denen die eine eine Gerade ist, von der jeder Punkt der anderen gleich weit absteht, Publ. Math. Debrecen 21 (1974), 197—206.

Prof. Dr. Gyula Strommer, H-1521 Budapest