ÜBERDECKUNGSPROBLEME EBENER BEREICHE VON KONSTANTEM DURCHMESSER*

Von

J. Schopp

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 16 Juni 1977

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. Strommer

Lenz [1] bewies unter anderem, daß ein geschlossener ebener Bereich von konstanter Breite d. h. eine Scheibe S von konstantem Durchmesser 1 sich mit drei geschlossenen Kreisbereichen von kleinerem Durchmesser $d_3' < 1$ vollständig überdecken läßt. Er gab auch Schranken für d_3', nämlich $\sqrt{3}/2 \geqq d_3' \geqq \sqrt{3} - 1$, wo die Gleichheitszeichen nur für den Kreis, bzw. nur für das Reuleaux-Dreieck gelten.

Wir wollen für d_3' eine genauere Abschätzung angeben und den folgenden Satz beweisen.

Ein beliebiger geschlossener ebener Bereich $d(S)$ von konstantem Durchmesser d läßt sich mit drei geschlossenen Kreisbereichen vom Durchmesser $x/2$ vollständig überdecken, wo x die Seitenlänge des $d(S)$ umgeschriebenen kleinstmöglichsten regelmäßigen Dreiecks bezeichnet.

Wir zeigen, daß bei einem festen d x selbst eine Veränderliche der Gesamtmenge $\bigcup d(S)$ ist, und $x = \min x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo x_i die veränderliche Seitenlänge des um den ausgewählten $d(S)$ umgeschriebenen regelmäßigen Dreiecks bezeichnet. Wir zeigen weiterhin, daß x sämtliche Werte des Intervalls $d\sqrt{3} \geqq x \geqq 2(\sqrt{3} - 1)d$ durchläuft, und daß die Gleichheitszeichen beim Kreis bzw. beim Reuleaux-Dreieck gültig sind.

Um die Existenz von $\min x_i$ einzusehen, betrachten wir ein, um $d(S)$ umgeschriebenes regelmäßiges Dreieck (Abb. 1). Seine Seiten sind Stützgeraden von $d(S)$. Die, mit den Dreieckseiten parallelen Stützgeraden bilden ein anderes umgeschriebenes gleichseitiges Dreieck. Die Umfangssumme der zwei Dreiecke ist bei einem festen d konstant. Die zwei Dreiecke bilden ein um $d(S)$ umgeschriebenes gleichwinkliges Sechseck, wessen nicht benachbarten drei-drei Seiten mit einander gleich sind. Dieses Sechseck ist dann und nur dann regelmäßig, wenn die zwei umgeschriebene Dreiecke kongruent sind. Laut des bekannten Satzes von Pál [2] existiert bei sämtlichen $d(S)$ mindestens ein umgeschriebenes regelmäßiges Sechseck. Andererseits bewies Lenz [1]; daß

* Der erste Teil dieses Aufsatzes wurde am 10. September 1965 im Geometrischen Kolloquium der J. Bolyai Mathematischen Gesellschaft in Tihany vorgetragen.

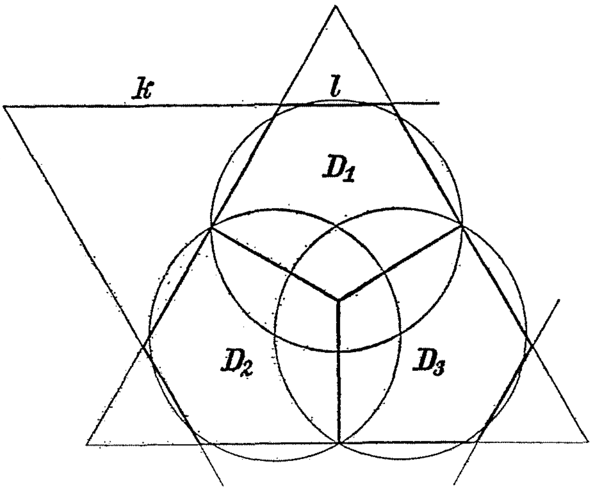

Abb. 1

sämtliche um $d(S)$ umgeschriebene gleichwinklige Sechsecke regelmäßig sind, so ist $d(S)$ ein Kreis, woraus die Existenz min x_i unmittelbar folgt.

Bezeichnen wir die Sechseckseiten mit k und l, wo $k > l$, so wird $1 < k/l \leqq \sqrt{3} + 1$. Die Gleichheit tritt beim REULEAUX-Dreieck ein, wo das kleinste um $d(S)$ umgeschriebenes regelmäßiges Dreieck mit dem um den Inkreis umgeschriebenen zusammenfällt. Je größer k/l ist, desto mehr weicht das Sechseck vom regelmäßigen ab.

Sei nun das umgeschriebene Dreieck das kleinstmöglichste. Das Sechseck ist ein Deckel D für den ausgewählten $d(S)$. Verbinden wir den Mittelpunkt, d.h. den Schnittpunkt der drei Symmetrieachsen mit den Mittelpunkten der größeren Sechseckseiten, so verteilen die Verbindungslinien D auf drei kongruente Teildeckel $D = \bigcup D_j$ $(j = 1, 2, 3)$. (Abb. 1).

Es läßt sich leicht einsehen, daß der größte Durchmesser von D_j mit $x/2$ gleich ist. Der Kreis über diesem Durchmesser überdeckt D_j nicht immer vollständig (Abb. 1). Zwei Ecken von D_j bleiben noch unbedeckt. Der Deckel D läßt sich aber noch vermindern.

Gehört vermutlich ein Eckpunkt von D zu $d(S)$ (Abb. 2), so berührt der Kreis um P_0 mit dem Radius d die gegenüberliegende Sechseckseite in P_0^*, und schneidet die zum Berührungspunkt näher liegende Sechseckseite in Q_1. So entsteht für $d(S)$ ein punktfremdes Gebiet, welches mit dem Kreisbogen $P_0^*Q_1$ und mit den zwei Strecken $P_0^*Q_0$ und Q_0Q_1 begrenzt ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir auf der dritten kürzeren Sechseckseite den Punkt R_2, bzw. auf der Anfangsseite P_3. Durch eine Drehung in positive Richtung mit dem Drehwinkel $2\pi/3$ bzw. $4\pi/3$ um den Mittelpunkt von D vereinigen wir die drei kürzeren Sechseckseiten auf der Anfangsseite und erhalten eine Punktreihe P_0, P_1, P_2, P_3, falls die gedrehten Punkte Q_1 bzw. R_2 mit P_1 bzw.

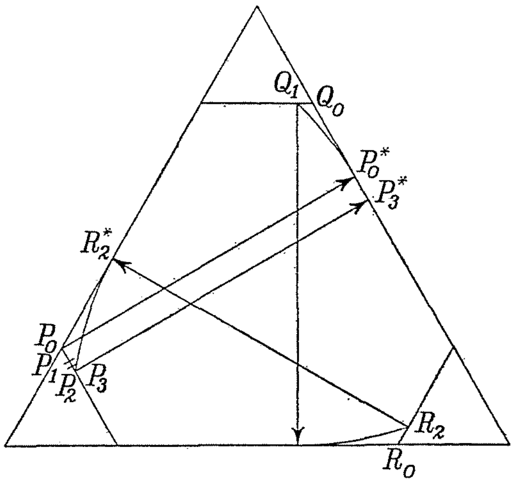

Abb. 2

mit P_2 bezeichnet werden. Durch Fortsetzung dieses Konstruktionsverfahrens erhalten wir eine Streckenfolge $P_0P_i = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Reihe t_i eine monoton wachsende beschränkte unendliche Reihe ist, deren Glieder zu einem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ streben. Aus der Symmetrie folgt, daß auf sämtlichen kürzeren Sechseckseiten symmetrisch liegende gleichlange und von $d(S)$ punktfremde t Strecken existieren. Wir erreichten ein Deckel $D^* \subset D$, der mit sechs kongruenten Kreisbögen bzw. mit sechs kongruenten Strecken begrenzt ist (Abb. 3).

Um die Länge der gebliebenen Strecken y auszurechnen, betrachten wir die Seitenlänge des kleinsten umgeschriebenen Dreiecks als konstant, und

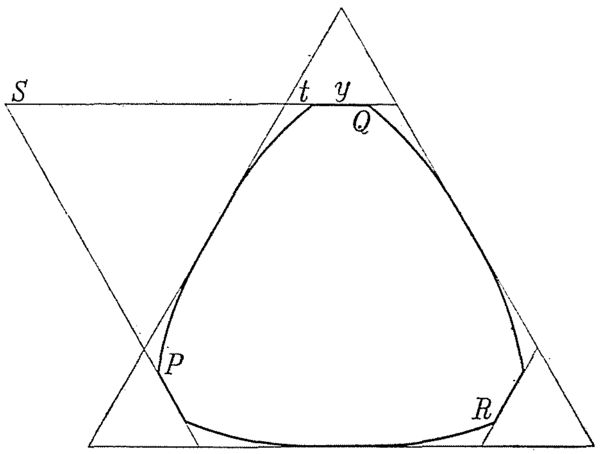

Abb. 3

führen eine neue Veränderliche $u \geqq 0$ ein. Sei $k = 1 + 2u$, $l = 1 - u$. (Mit dem Gleichheitszeichen von u ist das regelmäßige Sechseck und damit auch der Kreis zugelassen.) In diesem Fall wird $x = k + 2l = 3 =$ konstant und $d = (k + l)\sqrt{3}/2 = (2 + u)\sqrt{3}/2$. Betrachten wir nun das Dreieck PQS, $\sphericalangle\ PQS = \pi/3$; $PQ = d$. Mit Anwendung des Cosinussatzes folgt:

$$d^2 = \left(k + \frac{l}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(k + \frac{l}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{l}{2} + \frac{y}{2}\right)\left(k + \frac{l}{2} - \frac{y}{2}\right);$$

ersetzt man k und l durch die obigen Werte, so ergibt sich $y = \sqrt{1 - 2u - 2u^2}$. Nach einer Umformung $y = \sqrt{(1 - u)^2 - 3u^2}$; $y^2 = l^2 - 3u^2$; $y^2 = l^2 - (k - l)^2$ läßt sich y auch mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Untersuchung zeigt, daß für nicht negative u und y ($u \geqq 0$; $y \geqq 0$), bei steigendem u, y abnimmt.

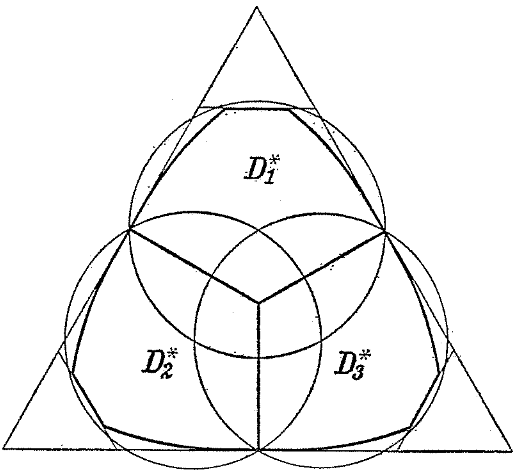

Abb. 4

In den Grenzfällen:

a) $u = 0$, also $y = 1$, d.h. $y = l$, also $l = k$; das Sechseck ist regulär, die begrenzenden Kreisbögen fallen weg, und $d(S)$ ist ein Kreis.

b) $u = (\sqrt{3} - 1)/2$, also $y = 0$, die begrenzende Strecken fallen weg, D^* ist selbst ein REULEAUX-Dreieck, das mit $d(S)$ übereinstimmt. Der Deckel D^* kann also sämtliche Übergangsformen vom regelmäßigen Sechseck zum REULEAUX-Dreieck aufnehmen. Den Deckel D^* teilen wir ähnlicherweise in drei kongruente Teildeckel $D^* = \bigcup D_j^*$ ($j = 1, 2, 3$), so läßt sich schon D_j^* mit einem Kreise vom Durchmesser $x/2$ abdecken (Abb. 4). Die kürzere Sechseckseite schneidet von dem über den längsten Durchmesser von D_j^* geschriebenen Kreis eine Sehne von der Länge z aus. Aus einem rechtwinkligen Dreieck $(z/2)^2 + (k/2 \cdot \sqrt{3}/2)^2 = (x/2)^2$, woraus z wieder mit u ausgedrückt: $z = \sqrt{6}/2\sqrt{1 - 2u - 2u^2}$ d.h. $z = (\sqrt{6}/2)y \approx 1{,}224y$, also $z \geqq y$. Die Gleichheit tritt nur bei $y = 0$, also beim REULEAUX-Dreieck ein. Nun sind alle Eckpunkte, somit auch alle Punkte der begrenzenden Strecken von D_j^* auch Punkte des geschlossenen Kreises. Die begrenzenden Kreisbögen sind aber auch bedeckt, da sie zu einem Zentriwinkel $< \pi/6$ gehören, ihre Endpunkte bedeckt sind, und größere Radien haben. Somit haben wir den Satz bewiesen, also $d_3' \leqq x/2d$ und $\sqrt{3}/2 \geqq x/2d \geqq \sqrt{3} - 1$. Es ist noch zu erwähnen, daß im ersten Ausdruck das Gleichheitszeichen nicht allein für die Grenzfälle gilt. Es gilt für sämtliche $d(S)$, wo das kleinste umgeschriebene Dreieck auch den Inkreis von $d(S)$ berührt, z.B. bei sämtlichen, zum REULEAUX-Dreieck parallelen $d(S)$ Bereichen.

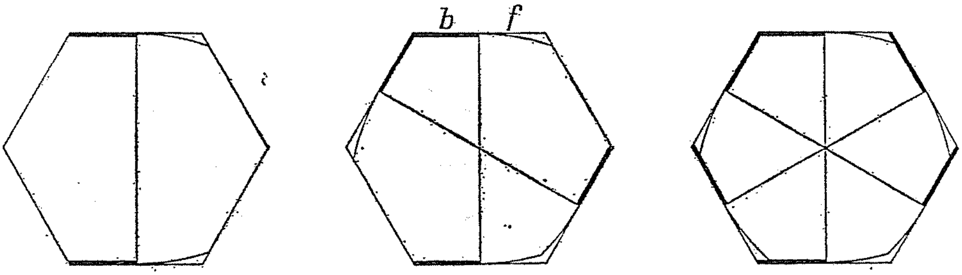

Abb. 5, 6, 7

Unser Satz enthält einen längst bekannten anderen Satz. Ein geschlossener ebener Bereich von konstantem Durchmesser 1, läßt sich in drei Teile von kleinerem Durchmesser $d_3 < 1$ zerlegen. Es gilt $\sqrt{3}/2 \geqq d_3' \geqq \sqrt{3} - 1$. Die obere Schranke stammt von GALE [3], die untere von LENZ [1]. Infolge unseres Satzes ist $d_3 \leqq x/2d$. Ist $d_3' = x/2d$, so ist auch $d_3 = d_3' = x/2d$.

Es ist noch zu erwähnen, daß MELZAK [4] nur für d_3, also nur für den Durchmesser des Teildeckels eine Abschätzung $d_3 = \min\{X(K); \sqrt{3} - X(K)\}$ gab, wo $X(K)$ die Seitenlänge des in einem $d(K)$ ($d = 1$) eingeschriebenen größtmöglichen regulären Dreiecks bedeutet. In den Grenzfällen stimmen die beide Funktionswerte d_3 und d_3' überein. In den übrigen Fällen ist das Verhalten der beiden Werte nicht untersucht geworden.

Im weiteren suchen wir einen Deckel D_N, womit jeder ebener Bereich S vom konstanten Durchmesser 1 sich vollständig überdecken läßt. Das Einheitsquadrat D_Q ist offensichtlich ein Deckel für S, dessen Flächeninhalt $F_Q = 1$ ist. Laut dem Satz von PÁL [1] ist D_6 ein regelmäßiges Sechseck mit dem Seitenabstand 1 auch ein Deckel von S, dessen Flächeninhalt $F_6 = \sqrt{3}/2 = 0{,}866025\ldots$ ist. Jedoch ist dieses Sechseck nicht die kleinste Figur $D_{\min}$, womit sich S überdecken läßt. Die Existenz eines solchen Minimaldeckels wurde jedoch bestätigt [5]. Einen Deckel D_M mit minderen Flächeninhalt konstruierte MESCHKOWSKI [6] (Abb. 5). Er schnitt zwei nicht benachbarte Ecken des regulären Sechsecks mit den Inkreistangenten ab, und die dritte, mit den gestümmelten Ecken nicht benachbarte Ecke begrenzte er mit Einheitskreisbögen. Der Flächeninhalt dieses Deckels beträgt $F_M > 0{,}836$.

Wir werden einen neuen Deckel D_N mit minderem Flächeninhalt herstellen und das PÁL'sche Sechseck auf andere Art verstümmeln. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß zwei Berührungspunkte von S mit D_6 auf zwei beliebig ausgewählten zu einander gegenüber liegenden Halbseiten liegen (Abb. 6). Diese Halbseiten, diese geschlossenen Strecken bezeichnen wir als besetzte Strecken mit b, die anderen Halbseiten, die halbgeschlossenen Strecken sind dann freie Strecken, — wir bezeichnen sie mit f. Die Einheitskreisbögen um den betreffenden Seitenmittelpunkt schneiden tatsächlich je eine Ecke des Sechsecks ab.

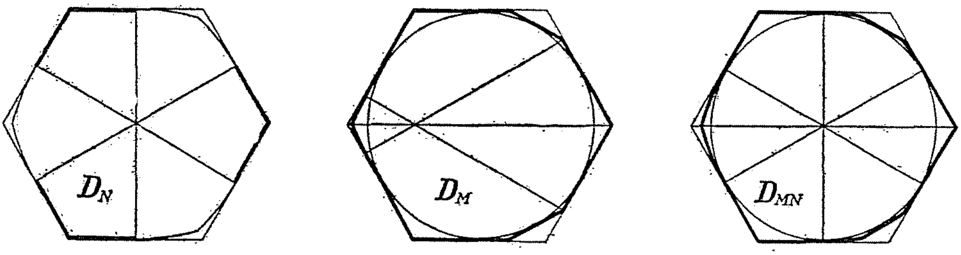

Abb. 8, 9, 10

Wir zeigen, daß es mindestens eine Sechseckspitze gibt die gleichzeitig von zwei b Strecken bedeckt ist. Ist nämlich auf den anschließenden Sechseckseiten nur eine anschließende Halbseite besetzt, so entsteht schon die doppelt bedeckte Sechseckspitze. Im anderen Fall müssen aber die nicht benachbarten Seitenhälften besetzt sein, und erzeugen die besetzte Sechseckspitze (Abb. 7). Die Strecke b kann man auf die übrig gebliebenen einander gegenüberliegenden Sechseckseiten auf zwei verschiedene Weisen anlegen. Sie können sich an keine besetzte Strecke anschließen (Abb. 8). Diese Lage führt aber zum Widerspruch, da vier Sechseckspitzen gleichzeitig frei bzw. bedeckt sein müssen. Nach der anderen Anordnung (Abb. 9) sind je drei Sechseckspitzen frei bzw. besetzt. Die freien Sechseckspitzen werden dann durch die sechs Einheitskreisbögen abgeschnitten, die von den Seitenmittelpunkten aus als Kreismittelpunkte gezeichnet sind. Das auf dieser Art verstümmelte regelmäßige Sechseck ist ein neuer Deckel D_N dessen Flächeninhalt $F_N = 0{,}83443\ldots$ beträgt. Legen wir endlich D_N auf D_M derart, daß die freien Sechseckspitzen einander bedecken, so gibt ihr Durchschnitt $D_{MN} = D_N \cap D_M$ (Abb. 10) auch einen Deckel für S, dessen Flächeninhalt $F_{MN} < F_N$ ist.

Wir dürfen selbstverständlich nicht behaupten, daß D_{MN} der gesuchte Minimaldeckel ist. Für den Inhalt der verschiedenen Deckel gilt jedoch:

$$F_Q > F_6 > F_M > F_N > F_{MN} \geqq F_{\min}.$$

Zusammenfassung

Der Verfasser gibt eine genauere Abschätzung für die Überdeckungsprobleme ebener Bereiche von konstantem Durchmesser (S. LENZ [1]). Es wird noch ein Deckel konstruiert, womit sich sämtliche ebene Bereiche von konstantem Durchmesser 1 vollständig überdecken lassen; dieser Deckel hat einen kleineren Flächeninhalt, als die bisher bekannten Deckel.

Literatur

1. LENZ, H.: Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers. Arch. Math. 7 (1956), 34—40.
2. PÁL, J.: Über ein elementares Variationsproblem. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. III/2 (1920), 35.
3. GALE, D.: On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. Proc. Amer. Math. Soc. (1953), 222—225.
4. MELZAK, Z. A.: A property of plane sets of constant width. Canad. Math. Bull. 6 (1963), 409—415.
5. JAGLOM, I. M.—BOLTJANSKI, W. G.: Konvexe Figuren. Berlin, 1956.
6. MESCHKOWSKI, I. H.: Unlösbare und ungelöste Probleme der Geometrie. Braunschweig 1960.

JÁNOS SCHOPP, H-1521 Budapest