EINIGE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER ENDLICHEN PROJEKTIVEN EBENEN UND DER GRAPHENTHEORIE

Von

I. REIMAN

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 16. Juni 1977

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. STROMMER

1. T. KŐVÁRI, V. T. SÓS und P. TURÁN haben den folgenden Satz bewiesen [1].

Es sei A_n eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten, deren Elemente nur 0-en und 1-er sind. Es sei $k(n)$ die kleinste Zahl der 1-er, bei welcher A_n schon gewiß wenigstens einen aus lauter 1-er bestehenden Minor zweiter Ordnung M_2 enthält. In diesem Falle besteht

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n^{3/2}} = 1\,. \tag{1}$$

Dieser Satz ist gleichwertig mit dem folgenden graphentheoretischen Satz:

Es sei $G_{n,n}$ ein paarer Graph, dessen Knotenpunkte so in zwei disjunkte Klassen H_1 und H_2 zerlegbar sind, daß der eine Endpunkt einer beliebigen Kante des Graphen in H_1, der andere Endpunkt in H_2 ist; H_1 und H_2 haben n Knotenpunkte. Es sei $k(n)$ die kleinste Zahl der Kanten, bei welcher $G_{n,n}$ schon gewiß wenigstens ein Viereck (d.h. einen Kreis mit vier Kanten) besitzt. Zu diesem Falle gilt (1).

Die Gleichwertigkeit der zwei Sätze kann man auf folgender Weise einsehen:

Wir ordnen die Knotenpunkte von H_1 zu den Zeilen einer Matrix A_n zu und die Knotenpunkte von H_2 zu den Spalten der Matrix A_n. Ein Element der Matrix ist genau dann gleich 1, wenn der seiner Zeile entsprechende Knotenpunkt von H_1 und der seiner Spalte entsprechende Knotenpunkt von H_2 in dem Graph $G_{n,n}$ mit Kante zusammengebunden ist; die anderen Elemente der Matrix sind gleich 0.

Es ist offenbar, daß die Matrix A_n einen Minor M_2 nur und dann nur enthält, wenn der entsprechende Graph $G_{n,n}$ ein Viereck besitzt (Abb. 1.).

Zum Beweise ihres Satzes haben die Verfasser mit Hilfe zahlentheoretischer und kombinatorischer Überlegungen eine Matrix konstruiert. In den Folgenden werden wir beweisen, daß die so konstruierte Matrix eine Teilmatrix der Inzidenzmatrix einer bestimmten endlichen projektiven Ebene ist.

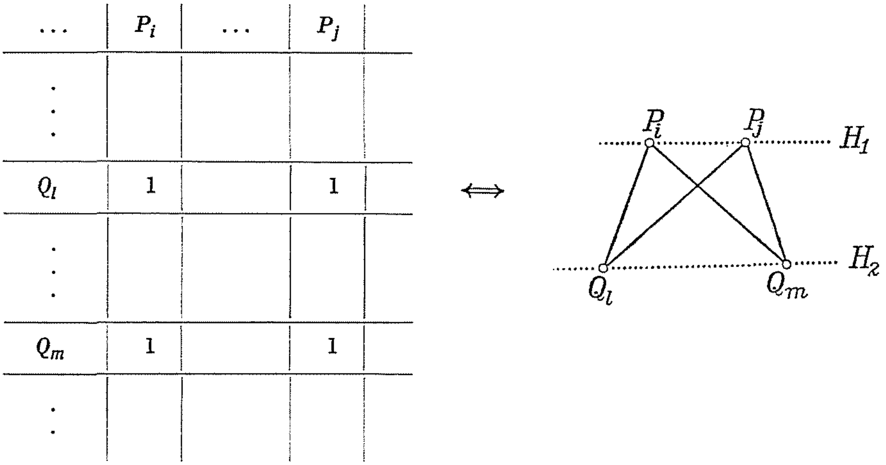

Abb. 1

Wir möchten noch erwähnen, daß unsere Bemerkung eine Möglichkeit gibt, den genauen Wert von $k(n)$ in einigen Fällen zu bestimmen.

2. Die angegebene Matrixkonstruktion ist im Wesentlichen die Folgende: Es sei p eine beliebige Primzahl und es wird die Zahl mit $\langle n\rangle$ bezeichnet, für welche

$$n \equiv \langle n\rangle \pmod{p} \quad (0 \leqq \langle n\rangle < p) \tag{2}$$

gilt, und es sei

$$y_{ab} = \langle b + ax\rangle, \tag{3}$$
$$(0 \leqq a < p,\ 0 \leqq b < p,\ x = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Wir ordnen zu den Zeilen der Matrix A_{p^2} die geordneten Zahlenpaare (a, b) zu und den Spalten die Zahlenpaare (x, y_{ab}). In der Kreuzung der dem (a, b) entsprechenden Zeilen und dem (x, y_{ab}) entsprechenden Spalten steht 1-er, wenn es für die entsprechenden Werte (3) gilt, sonst steht 0. (Unsere Tabelle 1 zeigt diese Konstruktion im Falle $p = 3$, die 0-en sind nicht ausgeschrieben.)

In [1] wurde bewiesen, daß die so konstruierte Matrix keinen Minor M_2 enthält, und die Anzahl der 1-er in der Matrix gleich p^3 ist.

3. Jetzt werden wir beweisen, daß die im obigen konstruierte Matrix immer zu einer Inzidenzmatrix einer endlichen projektiven Ebene ergänzbar ist. (Die Zeilen der Matrix entsprechen den Geraden der Ebene und die Spalten den Punkten. Ein Element der Matrix ist genau dann gleich 1, wenn die seiner Zeile entsprechende Gerade den seiner Spalte entsprechenden Punkt enthält.)

Wir nennen die oben definierten geordneten Zahlenpaare $(x, y_{ab}) = (x, y)$ Punkte und die Zahlenpaare (a, b) Geraden. Die Anzahl der Punkte

Tabelle 1

		$x = 0$			$x = 1$			$x = 2$			
		(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(x,y)
	(0,0)	1			1			1			
$a = 0$	(0,1)		1			1			1		
	(0,2)			1			1			1	
	(1,0)	1				1				1	
$a = 1$	(1,1)		1				1	1			
	(1,2)			1	1				1		
	(2,0)	1					1		1		
$a = 2$	(2,1)		1		1					1	
	(2,2)			1		1		1			
	(a,b)										

bzw. der Geraden ist p^2. Nach der Konstruktion der Matrix A_{p^2} sind der Punkt (x, y) und die Gerade (a, b) inzident, wenn

$$y = \langle b + ax \rangle .$$

Da die Restklassen mod p einen Körper bilden, werden im Folgenden die benutzten Zahlen als Elemente des Restklassenkörpers mod p betrachtet, weshalb wir die Inzidenzbedingung in der Form

$$y = b + ax \tag{4}$$

schreiben.

Zu einer Gerade sind p Punkte inzident, da die Punkte der Gerade (a, b) in der Form $(x, b + ax)$ gegeben werden können $(x = 0, 1, 2, \ldots, p - 1)$.

Die Geraden (a_1, b_1) und (a_2, b_2) haben dann und nur dann einen Schnittpunkt gemeinsam, wenn die Gleichung

$$a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2 \tag{5}$$

eine Lösung hat. Aus (5) folgt $(a_1 - a_2)x = b_2 - b_1$, daraus ergibt sich, daß (5) dann und nur dann eine Lösung hat, wenn $a_1 \neq a_2$. Die Geraden (a_1, b_1) und (a_2, b_2) haben also genau einen Schnittpunkt, wenn $a_1 \neq a_2$.

Es seien jetzt (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene Punkte. Diese Punkte haben dann und nur dann eine Verbindungsgerade, wenn die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned} \tag{6}$$

für a, b eine gemeinsame Lösung haben. Aus (6) folgt

$$a(x_1 - x_2) = y_1 - y_2,$$

d.h. (6) hat dann und nur dann eine Lösung, wenn $x_1 \neq x_2$.

Dies bedeutet übrigens, daß die Punkte

$$(x_i, 0),\ (x_i, 1), \ldots, (x_i, p-1) \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1) \tag{7}$$

zwischeneinander keine Verbindungsgeraden haben.

Wir führen jetzt neue Geraden: $e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}$ ein. Es sei e_i die Menge der Punkte (7). Jetzt hat schon jedes Punktpaar genau eine Verbindungsgerade, so bilden die bisher definierten Punkte und Geraden eine affine Ebene. (Von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ sind keine drei kollinear.)

Jetzt führen wir die neuen Punkte $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}, P$ ein so, daß P_i der gemeinsame Punkt der Geraden

$$(a_i, 0),\ (a_i, 1), \ldots, (a_i, p-1) \text{ sei}, \ (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

es sei weiterhin P ein gemeinsamer Punkt der Geraden $e_0, e_1, \ldots, e_{p-1}$.

Endlich definieren wir die Gerade e als die Menge der Punkte P_0, P_1, $\ldots$, P_{p-1}, P.

Die so erhaltene Struktur besteht also aus Punkten und Geraden, zwei Punkte haben genau eine Verbindungsgerade und zwei Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam. Es gibt auch vier Punkte, von denen keine drei kollinear sind; diese Struktur ist also eine endliche projektive Ebene. Die erweiterte Tabelle 2 stellt die Inzidenzmatrix der endlichen projektiven Ebene im Falle $p = 3$ dar. (Endliche projektive Ebene der Ordnung 3.)

Aus unserem Gedankengang folgt auch, daß wenn wir aus einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung p eine beliebige Gerade e mit ihren sämtlichen Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}, P$ und die sämtlichen Geraden durch den Punkt P weglassen, so erhalten wir die in [1] gegebene Struktur. Daraus folgt, daß die Anzahl der Zeilen und der Spalten der so erhaltenen Matrix nicht nur p^2 sein kann, sondern auch $p^{2\alpha}$ (p ist eine beliebige Primzahl, α eine positive ganze Zahl), da auch endliche projektive Ebenen der Ordnung p^α existieren.

4. Die im obigen beschriebene Matrix, d.h. die Inzidenzmatrix der endlichen projektiven Ebene hat eine interessante Eigenschaft: für bestimmte n liefert sie den genauen Wert von $k(n)$. Wie wir in Nr 2 gesehen haben, in einer Inzidenzmatrix der endlichen projektiven Ebene der Ordnung p^α entsprechen die $n = p^{2\alpha} + p^\alpha + 1$ Zeilen den Geraden und die n Spalten den Punkten. Da jede Gerade genau $p^{2\alpha} + 1$ Punkte hat, gilt für die Anzahl S der 1-er in der Matrix:

$$S = (p^\alpha + 1)(p^{2\alpha} + p^\alpha + 1)\,.$$

Tabelle 2

	P	P_0	P_1	P_2									
e	1	1	1	1									
e_0	1				1	1	1						
e_1	1							1	1	1			
e_2	1										1	1	1
		1			1			1			1		
		1				1			1			1	
		1					1			1			1
			1		1				1				1
			1			1				1	1		
			1				1	1				1	
				1	1					1		1	
				1		1		1					1
				1			1		1		1		

Wegen $p^\alpha = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{4n-3}\right)$ folgt, daß

$$S = \frac{1}{2}\left(n + n\sqrt{4n-3}\right) . \tag{8}$$

Man kann leicht beweisen, daß die Zahl der 1-er in einer $n \times n$-Matrix nicht mehr als die unter (8) definierte Zahl S sein kann, ohne einen aus lauter 1-er bestehenden 2×2-Minor M_2 zu enthalten [2].

Nehmen wir nämlich an, daß es keinen Minor M_2 in der Matrix gibt. Unter dieser Voraussetzung beweisen wir, daß die Anzahl der 1-er nicht mehr als S sein kann.

Es seien die Zeilenvektoren der Matrix $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Nach der Bedingung gilt $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_k \leqq 1$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$). Es sei ferner die Anzahl der 1-en der i-ten Zeilen gleich α_i, d.h. $\mathbf{a}_i^2 = \alpha_i$ und die Anzahl der 1-er in der i-ten Spalten ist gleich β_i. Offensichtlich gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overset{\text{def}}{=} M, \tag{9}$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k = M + 2 \sum_{i \neq k} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k . \tag{10}$$

Die Komponenten des Vektors $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i$ sind $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ und aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und quadratischen Mittel folgt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \geqq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^2}{n} = \frac{M^2}{n} \,. \tag{11}$$

Aus (10), (11) und (8) ergibt sich:

$$\frac{M^2}{n} \leqq M + 2\binom{n}{2},$$

$$M^2 - nM - n^2(n-1) \leqq 0,$$

$$M \leqq \frac{n + n\sqrt{4n-3}}{2} = S \,.$$

Dies bedeutet aber das Folgende: wenn es eine $n \times n$-Matrix gibt, in welcher die Zahl der 1-er genau gleich S ist und die Matrix keinen Minor M_2 enthält, so ist

$$k(n) = S + 1 = \frac{1}{2}\left(n + n\frac{\sqrt{4n-3}}{2}\right) + 1 \,.$$

Einige Werte für $k(n)$, die aus unseren Ergebnissen folgen, sind:

p	2	3	4	5	7	8
n	7	13	21	31	57	73
$k(n)$	22	53	106	187	457	658

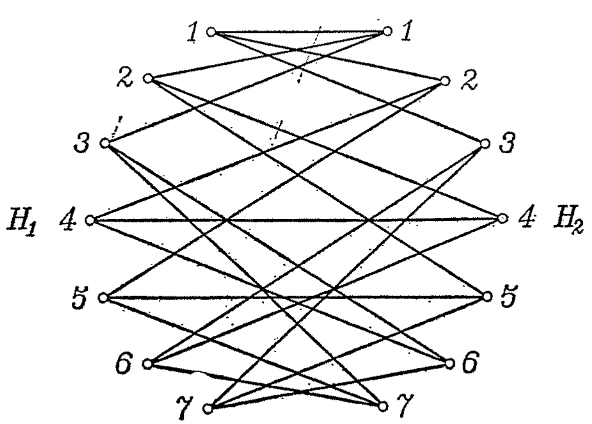

Abb. 2

Endlich sei als Beispiel der Graph $G_{7,7}$ gegeben, der eine maximale Anzahl der Kanten besitzt, ohne Viereck zu enthalten (Abb. 2.).

Zusammenfassung

T. Kővári, V. T. Sós und P. Turán haben in ihrer Arbeit [1] zum Beweis eines kombinatorischen bzw. graphentheoretischen Satzes mit zahlentheoretischen Methoden eine aus den Elementen 0 und 1 gebildeten $p^2 \times p^2$-Matrix konstruiert, in der die Anzahl der 1-er genau p^3 ist, und welche keinen 2×2-Minor enthält, dessen Elemente lauter 1-er sind. Wir beweisen, daß die so konstruierte Matrix eine Teilmatrix der Inzidenzmatrix einer endlichen projektiven Ebene ist, wir geben eine Verallgemeinerung für diese Konstruktion und wir beweisen, daß die ergänzte Matrix eine spezielle Lösung für das von den Verfassern in [1] gestellte Problem gibt.

Literatur

1. Kővári, T., Sós, V. T., Turán, P.: On a problem of Zarankiewicz. Coll. Math. 3 (1954) 50—57.
2. Reiman, I.: Egy gráfokkal kapcsolatos szélsőérték feladatról. Mat. Lapok 12 (1961) 44—53.
3. Dembowski, P.: Finite Geometries. Berlin—Heidelberg—New York, 1968.

Dr. István Reiman H-1521 Budapest