ÜBER DIE NICHT-TOTAL ASYMPTOTISCHEN MOSAIKE DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Von

I. VERMES

Lehrstuhl für Darstellende Geometrie, Technische Universität, Budapest

Eingegangen am 16 Juni 1977

Vorgelegt von Prof. Dr. Gy. STROMMER

Es ist bekannt, daß man bei der Parkettierung der Euklidischen Ebene durch reguläre Vielecke um ein Elementarvieleck einen, aus Elementarvielecken bestehenden Gürtel bilden kann. Sei R_i der Flächeninhalt des zwischen den Gürtelbegrenzungen g_{i-1} und g_i gelegenen Teiles der Ebene, S_i der Flächeninhalt der durch die Begrenzung g_i umschlossenen Fläche, so

$$\lim_{i\to\infty} \frac{R_i}{S_i} = 0 \,.$$

F. KÁRTESZI [3] und J. HORVÁTH [2] haben auf Grund der Existenz der hyperbolischen regulären Mosaiken[1] gezeigt, daß die Gürtelbildung in der hyperbolischen Ebene im Falle der Parkettierung durch reguläre Dreiecke bzw. reguläre Vielecke aufgebaut werden kann, und daß der Grenzwert des Quotienten $R_i/S_i (i \to \infty)$ existiert, und daß dieser immer eine endliche, quadratische irrationale Zahl ist. Hier wird die Existenz dieses Grenzwertes im Falle der Parkettierung durch asymptotische Vielecke der hyperbolischen Ebene untersucht.

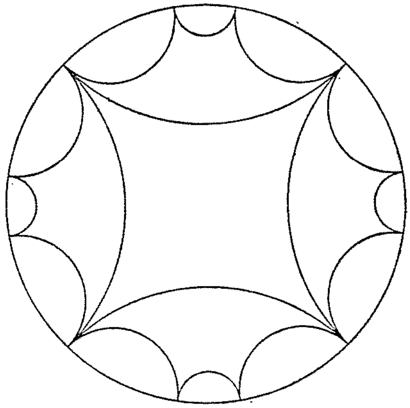
DEFINITION: Wir verstehen unter einem *asymptotischen Vieleck* einen konvexen Teil der hyperbolischen Ebene, der — in einer bestimmten Reihenfolge — durch d Strecken, f Halbgeraden und e Geraden auf solcher Weise umgegrenzt ist, daß die in der Reihenfolge der Seiten nacheinander folgenden Halbgeraden bzw. Geraden zueinander parallel sind. Wir sprechen über ein asymptotisches m-Eck, falls $m = d + f + e > d$. Ein Vieleck ist total asymptotisch, wenn seine Seiten Geraden sind.

In dem folgenden beschäftigen wir uns mit solchen nicht-total asymptotischen Vielecken, die nur zwei Halbgeraden als Seiten haben, und ihre weiteren Seiten Geraden sind.

[1] S. z.B. in [1] S. 94—96

Über die Parkettierung der Ebene durch total asymptotische Vielecke

Man kann um ein total asymptotisches Vieleck durch Spiegelungen eines Elementarvieleckes an die Seiten des Vieleckes bzw. an die zu der Gürtelbegrenzung gehörigen Seiten aus mit ihm kongruenten Vielecken bestehenden Gürtel bilden. Die Folge der Spiegelungen ist unendlich fortsetzbar, auf solche Weise bekommt man eine Parkettierung der hyperbolischen Ebene.



Abb, 1

In der Parkettierung sind die Vielecke, d.h. die m-Ecke einander kongruent (mit dem Flächeninhalt $(m-2)\pi$), so kann man der Flächeninhalt des zwischen den Gürtelbegrenzungen g_{i-1} und g_i gelegenen Teiles der Ebene, bzw. der Flächeninhalt der durch die Begrenzung g_i umschlossene Fläche mit der Anzahl R_i bzw. S_i der in diesem Teil gelegenen Elementarvielecke charakterisieren. (Die Abb. 1 zeigt das Grundvieleck und den ersten Gürtel für $m=4$ in dem POINCARÉschen Kreismodell).

Es ist leicht einzusehen, daß

$$R_i = m(m-1)^{i-1} \text{ und } S_i = 1 + m\sum_{j=0}^{i-1}(m-1)^j,$$

folglich

$$\lim_{i\to\infty}\frac{R_i}{S_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{m(m-1)^{i-1}}{1+m\dfrac{(m-1)^i-1}{m-2}} = \frac{m-2}{m-1}\,.$$

Der Grenzwert existiert also und ist eine endliche, rationale Zahl.

Über die Parkettierung der Ebene durch (m—1)-fach asymptotische Vielecke

Ein $(m-1)$-fach asymptotisches Vieleck ist durch zwei Halbgeraden (a-Seiten) und $(m-2)$ Geraden (b-Seiten) umschlossen. Sei der durch zwei a-Seiten geschlossene Winkel $2\pi/k$ ($k \geqq 3$, $m \geqq 3$).

In der Parkettierung ergibt sich der erste Gürtel aus Elementarvielecken, die man durch Spiegelungen an die b-Seiten und durch $(k-1)$ nacheinander-

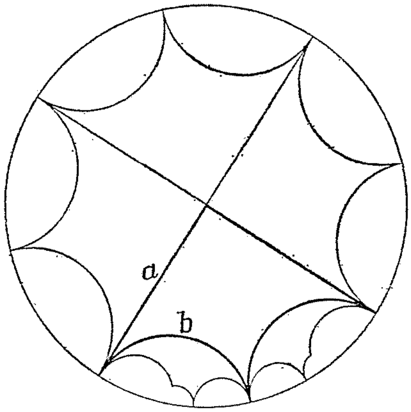


Abb. 2

folgenden Spiegelungen an die a-Seiten bekommt, so daß das erste und letzte Elementarvieleck in der Spiegelungsfolge je eine gemeinsame a-Seite mit dem Grundvieleck haben. Die weiteren Gürtel kann man ebenso aufbauen, und damit ist die Parkettierung der hyperbolischen Ebene unendlich fortsetzbar. (Die Abb. 2 zeigt das Grundvieleck und den ersten Gürtel für $m = 4$, $k = 4$ in dem POINCARÉschen Kreismodell).

Sei a_i die Anzahl der a-Seiten und b_i die Anzahl der b-Seiten der Gürtelbegrenzung g_i. Zu zwei nachbaren a-Seiten von g_i gehören $(k-1)$ $(m-2)$ b-Seiten von g_{i+1} und zu einer b-Seite von g_i gehören zwei a-Seiten und $(m-3)$ b-Seiten von g_{i+1}. Es ist leicht zu sehen, daß die folgenden Gleichungen gelten:

$$a_{i+1} = 2b_i$$

$$b_{i+1} = \frac{a_i}{2}(k-1)(m-2) + (m-3),$$

also

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= b_{i-1}(k-1)(m-2) + b_i(m-3) \\ b_0 &= m-2 \qquad\qquad (1) \\ b_1 &= (m-2)(m+k-4). \end{aligned}$$

werden:

$$G = \lim_{i\to\infty} \frac{R_i}{S_i} = \frac{(k-1)Y+1}{k\dfrac{X-(m-4)}{k(m-2)-2}+1}.$$

Dieser Grenzwert kann unendlich oft sowohl rationale als auch quadratische irrationale Werte annehmen. Es ist leicht zu beweisen, daß G dann und nur dann eine irrationale Zahl ist, wenn $\sqrt{(m-3)^2+4(m-2)(k-1)}$ eine irrationale Zahl ist.

Wenn $m = 4 + d$ und $k = 4 + 2d$ ($d \geqq 0$ ganze Zahl) ist, so ist der Wert unter der Wurzel eine Quadratzahl, also G rational.

Wenn $(4(m-2), (m-3)^2) = 1$ ist, so kann der Ausdruck unter der Wurzel — nach dem Satz von DIRICHLET[2] — unendlich oft Primzahlen ergeben, also G kann auch unendlich oft irrational werden.

Falls $m - 3$ Primzahl ist, so sind die Zahlen $4(m-2)$ und $(m-3)^2$ relative Primzahlen.

Falls $m = 3$, so sind $b_{2n-1} = (k-1)^n$, $b_{2n} = (k-1)^n$, $b_{2n+1} = (k-1)^{n+1}$, $b_{2n+2} = (k-1)^{n+1}$, also die Folge wird alternativ sein, und so $x_{2n} = k - 1$, $x_{2n+1} = 1$. Folglich

$$\lim_{i\to\infty} \frac{R_{2n}}{S_{2n}} = \frac{2(k-2)}{3k-2}$$

und

$$\lim_{i\to\infty} \frac{R_{2n+1}}{S_{2n+1}} = \frac{k(k-2)}{(k-1)(k+2)},$$

und beide sind rationale Zahlen.

Zusammenfassung

F. KÁRTESZI [3] und J. HORVÁTH [2] haben gezeigt, daß in der hyperbolischen Ebene im Falle der Parkettierung durch reguläre Dreiecke bzw. reguläre Vielecke — wo Gürtel von Elementarvielecken um ein Elementarvieleck gebildet werden können — der Grenzwert des Quotienten $R_i/S_i (i \to \infty)$ existiert und immer eine endliche, irrationale Zahl ist. (R_i ist der Flächeninhalt des zwischen den Gürtelbegrenzungen g_{i-1} und g_i gelegenen Teiles der Ebene und S_i der Flächeninhalt der durch die Begrenzung g_i umschlossenen Fläche.)

In dieser Arbeit untersuchten wir die Existenz dieses Grenzwertes bei der Parkettierung der hyperbolischen Ebene durch asymptotische Vielecke. In der Parkettierung durch total asymptotische Vielecke (die Seiten des Vieleckes sind zueinander parallele Geraden) ist dieser Grenzwert immer eine rationale Zahl. Im Falle der $(m-1)$-fach asymptotischen Vielecke (ein Vieleck ist durch $m-2$ Geraden und zwei Halbgeraden umschlossen) kann der Grenzwert unendlich oft sowohl rationale als auch irrationale Werte annehmen, sofern $m > 3$ ist. Für $m = 3$ sind $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n}/S_{2n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}/S_{2n+1}$ voneinander verschieden, aber beide rational.

[2] S. z.B. [4] S. 10

Literatur

1. FEJES TÓTH, L.: *Reguläre Figuren.* Budapest, 1965.
2. HORVÁTH, J.: Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **7** (1964) 49—53.
3. KÁRTESZI, F.: Eine Bemerkung über das Dreiecknetz der hyperbolischen Ebene. Publ. Math. Debrecen. **5** (1957) 142—146.
4. WERTHEIM, G.: *Anfangsgründe der Zahlentheorie.* Braunschweig, 1902.

Imre VERMES, H-1521 Budapest