

ERMITTLUNG DES ALLGEMEINEN SPANNUNGSZUSTANDES VON ORTHOTROPEN ZYLINDRISCHEN SCHALEN AUS VERSTÄRKTEM KUNSTSTOFF II

Von

L. VARGA

Lehrstuhl für chemisches Maschinenwesen und landwirtschaftliche Maschinen,
Technische Universität Budapest

Vorgelegt von Prof. Dr. S. Szentgyörgyi

(Eingegangen am 31. Juli 1975)

Einleitung

Das Berechnungsverfahren zur Ermittlung des allgemeinen Spannungszustandes von orthotropen zylindrischen Schalen aus verstärktem Kunststoff befindet sich in Teil I dieser Arbeit [1]. Richtigkeit und Anwendbarkeit der auf theoretischem Wege abgeleiteten Zusammenhänge werden vom Verfasser durch Berechnungen und Messungen nachgewiesen, deren Ergebnisse in diesem Teil II der Arbeit enthalten sind.

Die Untersuchungen erfolgten am zylindrischen Körper eines Druckgefäßes und erstreckten sich auf Berechnung und Messung der in den äußeren Fasern der Schale in Richtung der Erzeugenden und des Umfangs wirkenden Normalspannungen, mit darauffolgendem Vergleich der berechneten und der gemessenen Werte. Die angewendeten Belastungen, nämlich die tangential zum Hauptkreis wirkende Linienbelastung und die örtliche verteilte Belastung, wirkten vertikal zur Schalenfläche, damit unter den erzeugten inneren Kräften die erwähnten Spannungen vorherrschten. Die Ermittlung der Elastizitätskonstanten in den Richtungen der Erzeugenden und des Umfangs der orthotropen zylindrischen Schale erfolgte auf theoretischem Wege, unter Beachtung einiger Anmerkungen.

1. Methode der Untersuchungen

Die Berechnungen zum Nachweis der Brauchbarkeit und Anwendbarkeit der in Teil I mitgeteilten Methode sowie die Festigkeitsmessungen zur Kontrolle ihrer Verlässlichkeit und Genauigkeit erfolgten in der nachstehend beschriebenen Weise:

Bei der Berechnung des Spannungszustandes erfolgte die Darstellung der die äußeren Beanspruchungen beschreibenden Funktionen (Belastungsfunktionen) in Form von Fourier-Reihen. Es lassen sich nämlich die gesuchten

Verschiebungen und inneren Kräfte aus den Integralen dieser Reihen ableiten, wodurch gute Annäherung und Konvergenz gewährleistet werden. Die zu den so berechneten Schnittkräften und Schnittmomenten gehörenden, in den äußeren Fasern der Schale auftretenden Normalspannungen ergeben sich aus den Abhängigkeiten

$$\sigma_{11} = \frac{N_{11}}{s} \pm \frac{6M_{11}}{s^2}$$

und

$$\sigma_{22} = \frac{N_{22}}{s} \pm \frac{6M_{22}}{s^2}.$$

Im Verlauf der Festigkeitsmessungen wurden die spezifischen Dehnungen in den äußeren Fasern der Schale gemessen. Der zur Messung vorbereitete, senkrecht gestellte Zylinder ist in Abb. 1 gezeigt. Die in der Umgebung der Belastung auftretenden spezifischen Dehnungen wurden durch je 10, an die innere bzw. äußere Fläche der Schale geklebte Meßstreifen gemessen. Um die Genauigkeit der Resultate zu erhöhen bzw. die Wirkungen von Ungleichheiten der Wandstärke und Unebenheiten der Oberflächen zu eliminieren, wurde der Verlauf der Dehnungen in den Richtungen der Erzeugenden und des Umfanges — und der Änderung des Abstandes zwischen Meßstelle und Belastung — durch je einen Meßstreifen an der inneren bzw. äußeren Fläche registriert. Die Änderung der Belastungsstelle wurde durch Verdrehen des Zylinders (Änderung von x_2) oder durch vertikales Verschieben des die Last übermittelnden Rahmens (Änderung von x_1) vorgenommen. Die untersuchte Schale aus mit Glasroving verstärktem Polyester war mit dem üblichen Wickelwinkel von $54^\circ 45''$ und einem Glasfasergehalt von 60 Gew.-% (Volumanteil 0,4) gefertigt. Die aus zwei Lagepaaren (4 Lagen) bestehende Schale hatte die Hauptabmessungen

$$l = 600 \text{ cm}, s_{\min} = s = 0,4 \text{ cm} \text{ und } R = 30,2 \text{ cm}.$$

Die Komponenten hatten die Elastizitätskonstanten

$$E_H \cong 40\,000 \text{ kp/cm}^2, \nu_H \cong 0,35 \text{ und } G_H \cong 14\,800 \text{ kp/cm}^2$$

für den Kunststoff und

$$E_G \cong 730\,000 \text{ kp/cm}^2, \nu_G \cong 0,22 \text{ und } G_G \cong 299\,000 \text{ kp/cm}^2$$

für die Glasfasern.

Für die Steifigkeitshauptrichtungen der aus ausbalancierten Lagepaaren bestehenden zylindrischen Schale wurden vom Verfasser Elastizitätskonstanten nach den Methoden des Fachschrifttums [2, 3] berechnet, wobei sich fol-

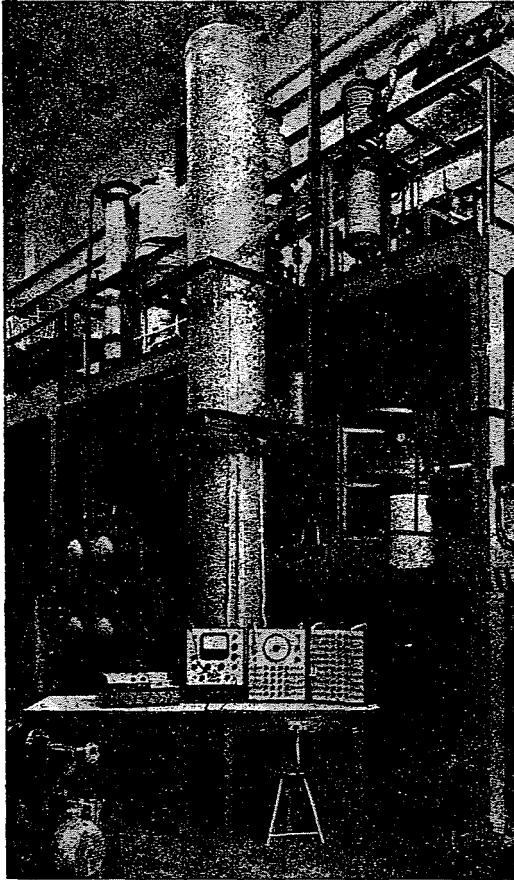


Abb. 1. Zur Dehnungsmessung vorbereitete GFK-Schale

gende, nahezu gleiche Werte ergaben:

$$E_1 = 98\,250 \text{ kp/cm}^2, \quad E_2 = 157\,200 \text{ kp/cm}^2$$

$$G = 85\,050 \text{ kp/cm}^2, \quad \nu_{12} = 0,596 \text{ und } \nu_{21} = 0,372.$$

Zur Kontrolle der Richtigkeit der berechneten Werte durch Messungen hatte der Verfasser im Falle der untersuchten Schale keine Möglichkeit. Solche Messungen wurden jedoch schon früher durchgeführt; die interessanteren Resultate seien hier kurz betrachtet. Hier waren die Probekörper (ebenfalls Schalen aus mit Glasrovings verstärktem Polyester mit einem Innendurchmesser von 15 cm, dem Wicklungswinkel von $54^\circ 45''$ und einem Glasfasergehalt von 75 Gew.-% (Volumanteil 0,55), mit verschiedenen Wandstärken gefertigt. Von den Versuchsergebnissen sind hier die für die Elastizitätskonstanten E_2 und ν_{12} erhaltenen Werte von Interesse. Ihre Messung erfolgte mittels einer entsprechend gestalteten, zur Herbeiführung eines einachsigen

Spannungszustandes geeigneten Belastungsvorrichtung. Die Ergebnisse für die Schalen mit den Abmessungsverhältnissen $R/s = 16,8; 19,9; 21,5$ gehen aus Tabelle 1, ihre Änderungen aus Abb. 2 hervor. Aus den Abbildungen ergeben sich die Elastizitätskonstanten

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{22}} \cong 214\,000 \text{ (} 214\,900 \div 221\,400 \text{) kp/cm}^2$$

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}} \cong 0,60 \text{ (} 0,574 \div 0,547 \text{),}$$

Tabelle 1

Zunahme des Ringdurchmessers und Verlauf des Koeffizienten

P [kp/cm ²]	$\frac{R}{s}$	σ_{22} [kp/cm ²]	ε_{22} [%]	ε_{11} [%]
0	16,8	0	0	0
	19,9	0	0	0
	21,5	0	0	0
5	16,8	84,0	0,041	-0,025
	19,9	99,5	0,045	-0,026
	21,5	107,5	0,054	-0,030
10	16,8	168,0	0,079	-0,052
	19,9	199,0	0,089	-0,056
	21,5	215,0	0,104	-0,059
15	16,8	252,0	0,120	-0,080
	19,9	298,5	0,140	-0,093
	21,5	322,5	0,152	-0,090
20	16,8	336,0	0,163	-0,118
	19,9	398,0	0,200	-0,140
	21,5	430,0	0,214	-0,136

d. h. die gemessenen Resultate stimmen mit den nach dem Fachschriftum [2], [3] berechneten (hier in Klammern angegebenen) Werten befriedigend überein. Eine größere Abweichung zeigte sich dagegen zwischen den berechneten und gemessenen Formänderungen der aus den Probestücken ausgeschnittenen Ringe. Die Zunahmen f_m der Durchmesser der Ringe mit der Breite von $l = 3$ cm infolge Einwirkung der in Abb. 3 dargestellten Kräfte P waren größer als die gemäß Gleichung (4)

$$f_{sz} = 0,137 \frac{PR^3}{B_2} \quad \left(B_2 = \frac{E_2 l s^3}{12} \right)$$

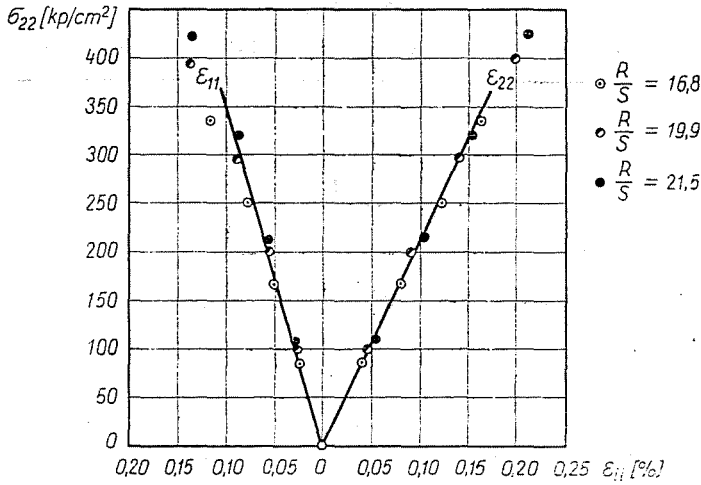


Abb. 2. Verlauf der Spannungen und Dehnungen bei einachsigem Spannungszustand

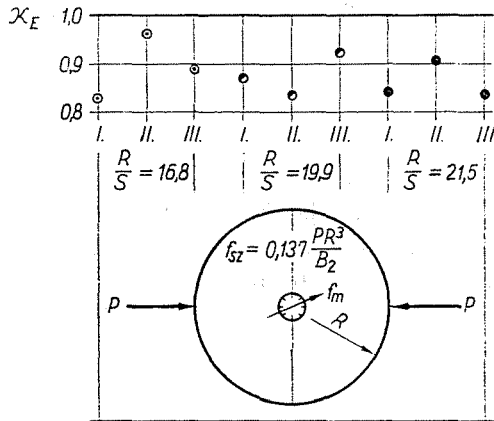


Abb. 3. Verlauf des an Probekörpern gemessenen Koeffizienten

berechneten Werte. Dies spiegelt sich auch in Tabelle 2, wo die für eine Kraft $P = 20$ kp ($\sigma_{22} \cong 600$ kp/cm²) berechneten und gemessenen Verschiebungen sowie deren Verhältniszahlen κ_E angeführt sind. Die Tabellenwerte für $\kappa_E = 0,82 \div 0,96$ stimmen im wesentlichen mit den Hinweisen der Fachliteratur [5], [6] überein, wonach in Biegungsfällen mit einem Elastizitätsmodul $E_{\text{Biegung}} < E_{\text{Zug}}$ zu rechnen ist (bei Stabilitätsuntersuchungen wird üblicherweise ein Verhältnis $E_{\text{Biegung}}/E_{\text{Zug}} = 0,8$ in Betracht gezogen).

Nach Erachten des Verfassers ist es richtiger, anstatt der Deutung des Biegeelastizitätsmoduls den Begriff der effektiven Biegesteifigkeit einzufüh-

Tabelle 2

Dehnungs- und Spannungswerte bei einachsigem Spannungszustand

$\frac{R}{s}$	Probekörper	f_{zs} [mm]	f_m [mm]	\varkappa^n
16,8	I.	2,42	2,93	0,824
	II.	2,42	2,51	0,965
	III.	2,42	2,72	0,888
19,9	I.	4,02	4,60	0,874
	II.	4,02	4,79	0,838
	III.	4,02	4,37	0,919
21,5	I.	5,06	5,99	0,845
	II.	5,06	5,57	0,910
	III.	5,06	6,07	0,834

ren, die für Schalen gemäß

$$B_{ii}^* = \varkappa_E \frac{E_i^* s^3}{12} \quad (i = 1, 2)$$

ausgelegt werden kann.

Eine der wesentlichen Ursachen der Abnahme der Biegesteifigkeit ist im allgemeinen die Tatsache, daß sich der Fasergehalt die Wandstärke entlang ändert. Eine weitere Ursache mag darin liegen, daß der Elastizitätsmodul bei Druck (E_{iD}) eventuell geringer als bei Zug (E_{iz}) ist. Der Verfasser suchte die Wirkung der erwähnten Ursachen auf theoretischem Wege zu verfolgen und kam zum Ergebnis, daß die Biegesteifigkeit einer aus n_r Lagen bestehenden Schale proportional dem Faktor

$$\varkappa_E \cong \frac{4(1 - \varrho/n_r)}{(1 + \sqrt{E_{iz}/E_{iD}})^2}$$

abnehmen kann [7] (zur Ermittlung des Proportionalitätsfaktors ϱ sind bis zur Zeit noch keine Messungen erfolgt).

Wie erwähnt, hatte der Verfasser keine Möglichkeit, an dem eingangs beschriebenen Probestück Messungen derselben (gleichen) Werte wie die letzt-erwähnten durchzuführen. Eine Kontrolle der berechneten Elastizitätskonstanten erfolgte nur auf mittelbarem Wege, durch Erzeugen eines zweiachsigen Membranspannungszustandes (hierzu wurde die an beiden Enden geschlossene Schale unter inneren Überdruck gesetzt). Diese Annäherung lieferte befriedigende Ergebnisse. Darum erfolgten die Berechnung der inneren Kräfte und die Ermittlung der zu den gemessenen Dehnungen gehörenden Spannungen unter Beachtung der auf theoretischem Wege berechneten Elastizitätskonstanten sowie unter der Annahme von $\varkappa_E = \varkappa_G = 1$.

2. Spannungen infolge Linienlast den Hauptkreis entlang

Bei den Untersuchungen wirkte am mittleren Hauptkreis der als unendlich lang betrachteten kreiszylindrischen Schale im Intervall $-c_2 \leq x_2 \leq c_2$ die nach πR periodische, zur Schalenfläche vertikale, konstante Linienlast P . Somit kann die für die Linienlast geltende Belastungsfunktion mit der unendlichen Reihe

$$P(\bar{x}_2) = P_0 + \sum_{n^*=1}^{\infty} \bar{P}_{nsz} \cos n\bar{x}_2$$

angenähert werden [7], worin

$$P_0 = \frac{2\bar{c}_2}{\pi} P, \quad \bar{P}_{nsz} = \frac{4P}{\pi} \frac{\sin n\bar{c}_2}{n}, \quad n = 2n^* \text{ und } n^* = 1, 2, 3, \dots \infty.$$

Die Berechnungen erfolgten auf einem Rechner ICT-1905, unter Erfüllung der für den belasteten Hauptkreis ($x_1 = 0$) geltenden Passungsbedingungen

$$u_0(0, \bar{x}_2) = w'_0(0, \bar{x}_2) = N_{12}(0, \bar{x}_2) = 0 \quad \text{und} \quad Q_{13}^* = -1/2 P(\bar{x}_2).$$

Als Endresultat lieferte der Rechner die zu den Werten $P = 1 \text{ kp/cm}$ und $c_2 = \bar{c}_2 R = 2,5 \text{ cm}$ gehörenden Spannungswerte $\bar{\sigma}_{ii} = \sigma_{ii}/P$ unter Beachtung der ersten 50 Glieder ($n^* = 1 \dots 50$) der die Belastung beschreibenden Fourier-Reihe. (Die vernachlässigten Glieder sind selbst bei den am langsamsten konvergierenden Schnittmomenten, auch bei deren höchstem Wert, ohne Wirkung). Die berechneten Werte sind in Tabelle 3 angeführt, wo die Indizes »b« und »k« auf die innere bzw. äußere Fläche der Schale hinweisen.

Die Messung der durch die Linienbelastung verursachten spezifischen Dehnungen erfolgte wie in Abb. 4 dargestellt. Die zur Oberfläche vertikale Last P_R wirkte im mittleren Abschnitt der Schale (in den Punkten mit den Koordinaten $\bar{x}_1 = 0$ und $\bar{x}_2 = 0$, weiters $\bar{x}_2 = \pi$). Die Linienbelastung wurde mittels einer aus Teflon gearbeiteten, kammartigen Kante, mit Zwischenschaltung einer Klemmbacke und eines Dynamometers, wie in Abb. 4 ersichtlich, eingetragen. Die Kante hatte den Abrundungshalbmesser $r = 0,1 \text{ cm}$ und eine Länge von $2c_2 = 5 \text{ cm}$.

Dehnungen, die mindestens an zwei Meßstellen übereinstimmen und sich wiederholen, sowie die aus diesen berechneten Spannungen sind ebenfalls in Tabelle 3 enthalten. Die angeführten Dehnungswerte gehören zu einer resultierenden Kraft $P_R = -84,5 \text{ kp}$ bzw. gelten für eine Linienbelastung $P = P_R/2c_2 = -16,9 \text{ kp/cm}$. Zum Vergleich der Spannungen dienen Abb. 5 und 6; diese veranschaulichen die Änderungen der aus den gemessenen Dehnungen resultierenden Spannungen (die Punkte verbindende dicke Linie) bzw. der theoretisch berechneten inneren Kräfte (dünne Vollinie) die Erzeugende und den Umfang entlang.

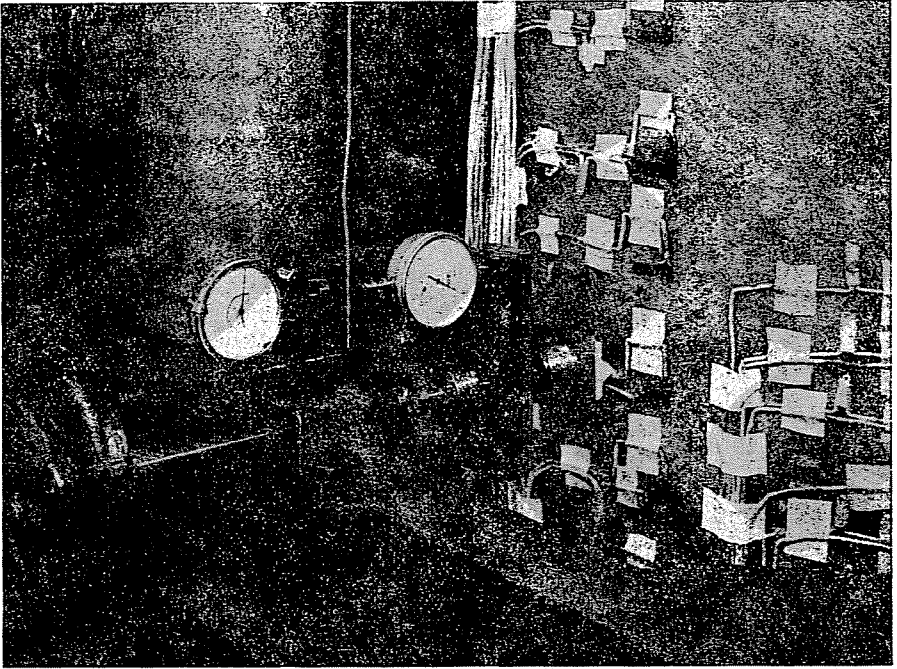


Abb. 4. Messung der spezifischen Dehnungen infolge einer Linienlast

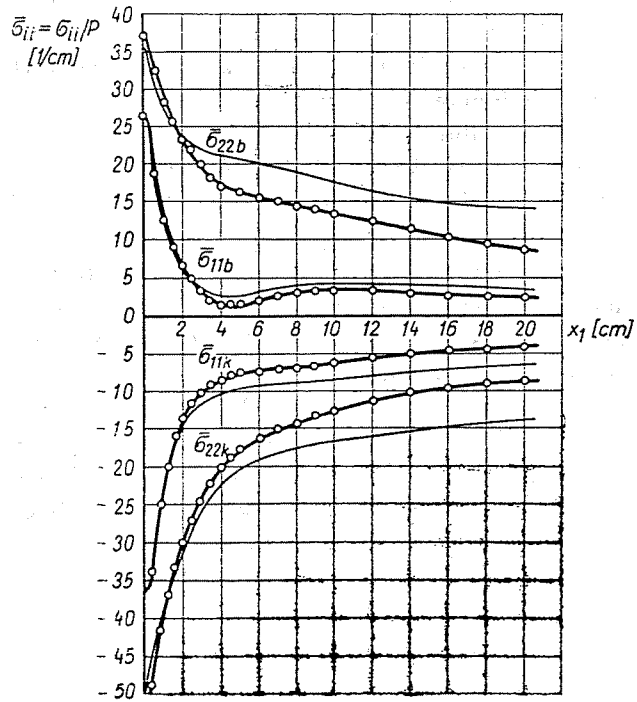


Abb. 5. Verlauf der Spannungen in Richtung der Erzeugenden infolge einer Linienlast

3. Spannungen infolge örtlicher, verteilter Last

In diesem Belastungsfall wirkte am Mittelteil der kreiszylindrischen Schale der Länge l in den Intervallen $l/2 - c_1 \leq x_1 \leq l/2 + c_1$ und $-c_2 \leq x_2 \leq c_2$ die nach $2l$ bzw. πR periodische, konstante verteilte Last p vertikal zur Schalenfläche. Somit kann die die äußere Last beschreibende Belastungsfunktion mit den unendlichen Reihen

$$X_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_{m^*=1}^{\infty} \sum_{n^*=0}^{\infty} \bar{X}_{3mn} \sin m\bar{x}_1 \cos n\bar{x}_2$$

angenähert werden [7], worin

$$\bar{X}_{3mn} = \frac{2}{n\bar{c}_2} \bar{X}_{3m0} \sin n\bar{c}_2 \quad \text{und} \quad \bar{X}_{3m0} = p \frac{2\bar{c}_2}{\pi l} \frac{2}{m} \sin \frac{m\bar{l}}{2} \sin m\bar{c}_1$$

weitere

$$m = m^* \frac{\pi R}{l} \quad \text{und} \quad m^* = 1, 2, 3 \dots \infty,$$

$$n = 2n^* \quad \text{und} \quad n^* = 0, 1, 2, 3 \dots \infty.$$

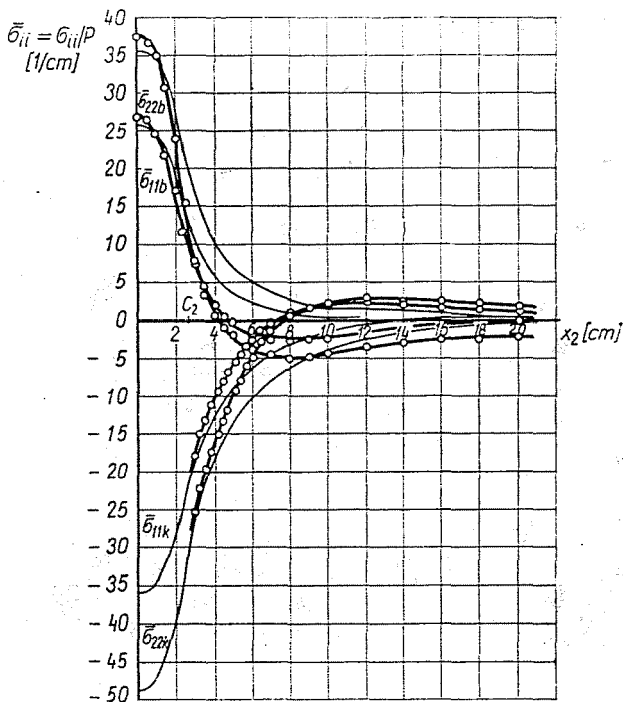


Abb. 6. Verlauf der Spannungen in Richtung des Umfanges infolge einer Linienlast

Die Belastungsfunktion erfüllt die für die Enden der kreiszylindrischen Schale ($x_1 = 0$ und $x_1 = l$) geltenden Randbedingungen

$$v = w = N_{11} = M_{11} = 0.$$

Die Berechnungen erfolgten auf einem Rechner ODRA-1204. Diese lieferten als Endresultat die zu den Werten $p = -1 \text{ kp/cm}^2$ und $c_1 = \bar{c}_1 R = c_2 = \bar{c}_2 R = 2,5 \text{ cm}$ gehörenden Spannungswerte $\bar{\sigma}_{ii} = \sigma_{ii}/P$ unter Beachtung der zu den Wellenzahlen $m^* = 1 \dots 250$ und $n^* = 0 \dots 20$ gehörenden Lastglieder der die Belastung beschreibenden Fourier-Reihe. Die berechneten Werte sind in Tafel 4 angeführt.

Die Messung der durch örtliche, verteilte Last verursachten spezifischen Dehnungen erfolgte wie in Abb. 7 dargestellt. Die zur Fläche vertikale Last P_n wirkte im mittleren Abschnitt der Schale (in den Punkten mit den Koordinaten $x_1 = l/2$ und $x_2 = 0$ weiters $x_2 = \pi R$). Zur gleichmäßigen Verteilung der Belastung war hier eine Gummiplatte von 1 cm Stärke an die Klemmbacke von der Seitenlänge $2c_1 = 2c_2 = 5 \text{ cm}$ angeklebt, wie in Abb. 7 dargestellt. Dehnungen, die mindestens an zwei Meßstellen übereinstimmen und sich wiederholen, sowie die aus diesen berechneten Spannungen sind ebenfalls in Tabelle 4 enthalten. Die angeführten Dehnungswerte gehören zur resultierenden Kraft $P_R = -100 \text{ kp}$ bzw. gelten für eine verteilte Belastung $p = P c_1 c_2 / 4 = -4 \text{ kp/cm}^2$.

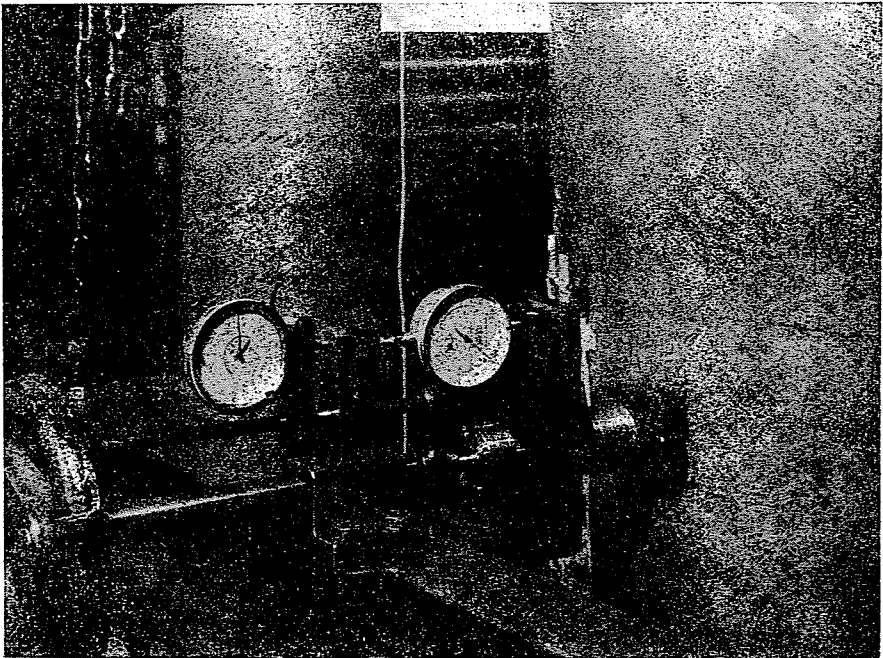


Abb. 7. Messung der spezifischen Dehnungen infolge örtlich verteilter Belastung

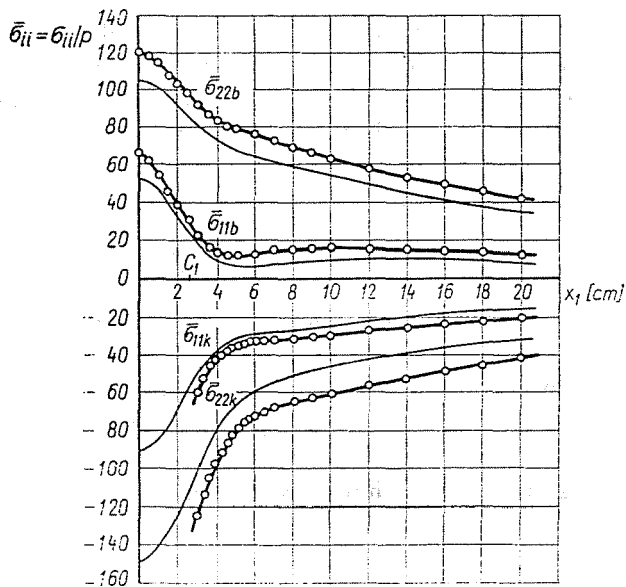


Abb. 8. Verlauf der Spannungen in Richtung der Erzeugenden infolge örtlicher verteilter Belastung

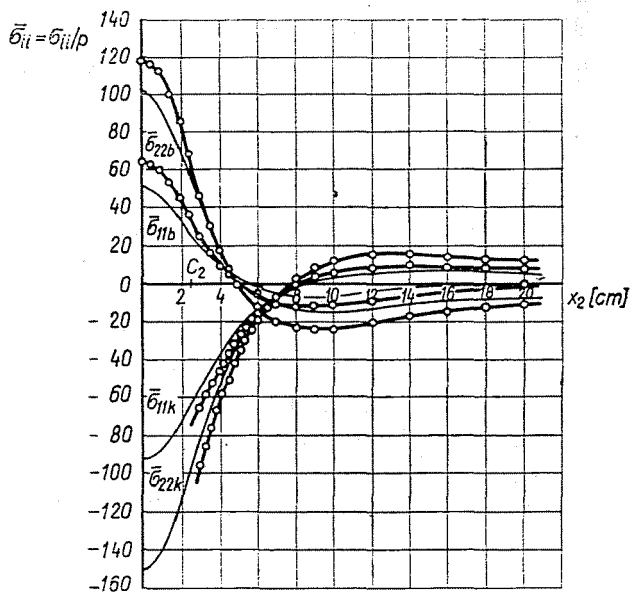


Abb. 9. Verlauf der Spannungen in Richtung des Umfanges infolge örtlicher verteilter Belastung

Zum Vergleich der Spannungen dienen Abb. 8 und 9; diese veranschaulichen die Änderungen der aus den gemessenen Dehnungen errechneten Spannungen (die Punkte verbindende dicke Linie) bzw. der theoretisch berechneten inneren Kräfte (dünne Vollinie) die Erzeugende und den Umfang entlang.

4. Streuung der Meßwerte

Die Tabellen 3 und 4 enthalten die an mindestens zwei Meßstellen übereinstimmenden, sich wiederholenden Dehnungswerte und die sich aus diesen ergebenden Spannungen. Aus den Ergebnissen der wiederholten Messungen an mehreren Meßstellen darf verallgemeinert werden, daß bei Schalen aus verstärktem Kunststoff, die in gleich stark belasteten Querschnitten an verschiedenen Stellen gemessenen Dehnungen stärker als gewohnt streuen. Deutlich geht dies aus Abb. 10 und 11 hervor, wo der Verlauf der für die Streuung von an 10 Stellen gemessenen Dehnungen kennzeichnenden Faktoren

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{[\varepsilon_{ii}(x_i)]_{\min}^{\max} - \varepsilon_{ii}(x_i)}{\varepsilon_{ii}(0)} \cdot 100(\%) \quad (i = 1, 2)$$

für die untersuchte Linienlast (Abb. 10) bzw. verteilte Last (Abb. 11) veranschaulicht ist. (Die in der Abhängigkeit erscheinenden Dehnungen $\varepsilon_{ii}(0)$ und $\varepsilon_{ii}(x_i)$ bedeuten die bereits angeführten, mindestens an zwei Meßstellen übereinstimmenden und sich wiederholenden Werte.) Das Streuungsbild beinhaltet auch die Dehnungsschwankungen an den einzelnen Meßstellen, die bei Linienlast zu 10–15%, bei verteilter Belastung zu 5–10% gefunden wurden. Setzt man diese ab, so können für beide Belastungsarten Dehnungsschwankungen von 15–20% zwischen den einzelnen Meßstellen festgestellt werden.

Als Ursachen der Streuung kommen sicherlich folgende Umstände in Betracht: Im Laufe der Meßreihe zur Untersuchung der einzelnen Querschnitte (Meßstellen) veränderte sich die Passung der lastübertragenden Kante und Gummipatte zur Schalenoberfläche und damit auch die Verteilung der äußeren Last. Diese Änderung der Kräfteintragung war die Ursache für die erwähnte Dehnungsschwankung von 10–15%. Die zwischen den einzelnen Meßstellen feststellbare Dehnungsschwankung von 15–20% ist wahrscheinlich die Folge von Inhomogenitäten des Werkstoffs, nämlich Schwankungen der örtlichen Wandstärke und des Glasfasergehalts. Möglicherweise trugen zur Verbreiterung des Streuungsbildes auch Abweichungen im Verhalten, insbesondere im Haften der einzelnen Meßstreifen sowie Fehler der Geräte und der Ablesungen bei; hoffentlich beschränkte sich aber die Wirkung der letzteren bei den mit großer Sorgfalt durchgeführten Messungen auf ein Mindestmaß.

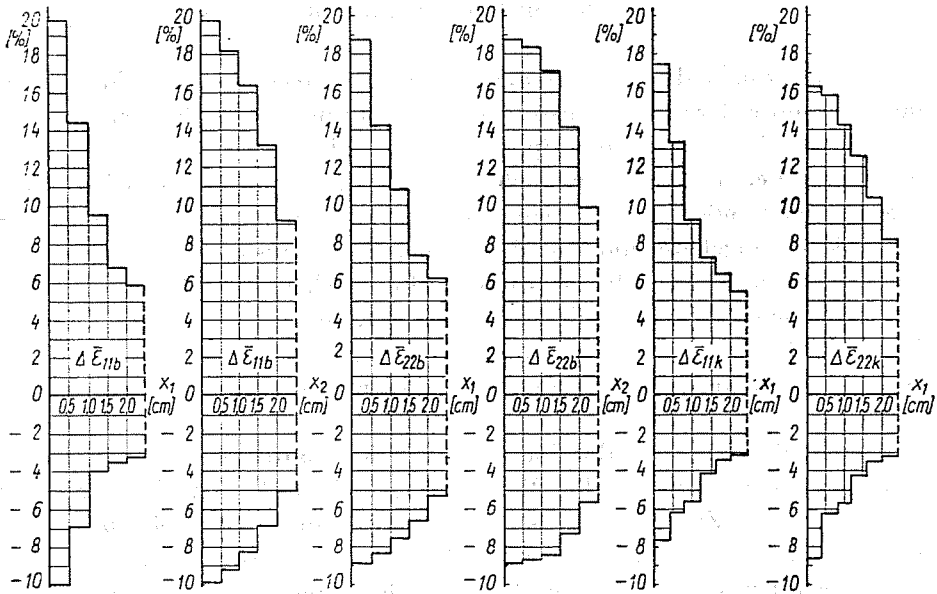


Abb. 10. Streuung der spezifischen Dehnungen bei Linienlast

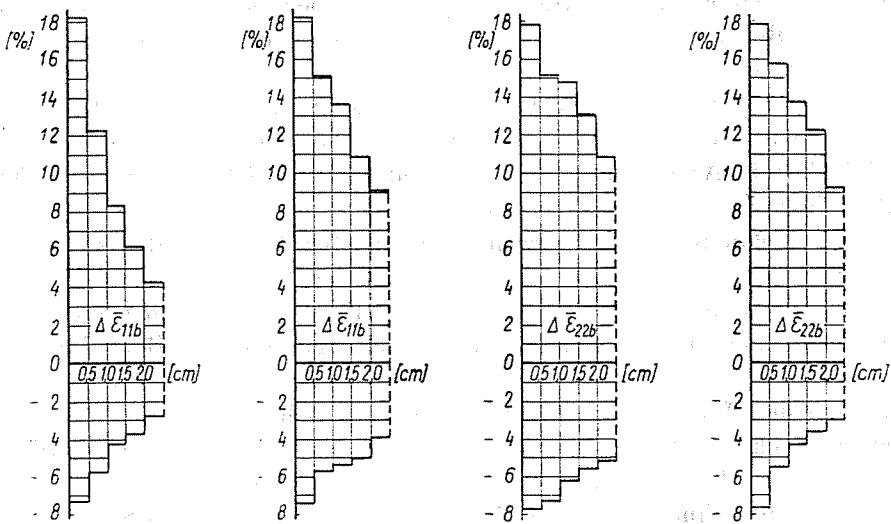


Abb. 11. Streuung der spezifischen Dehnungen bei örtlicher verteilter Belastung

5. Aus den Untersuchungen gezogene Schlüsse

Der Überblick der Berechnungen und Messungen für die beiden Belastungsfälle sowie deren Ergebnisse gestatten folgende Feststellungen:

Die zur Ermittlung des Spannungszustandes vorgeschlagene Berechnungsmethode erwies sich als einfach und praktisch, dank dem Umstand, daß die gesuchten Größen aus nur einer Veränderlichen, nämlich der Verschiebungsfunktion abgeleitet und mit dieser auch die Rand- oder Passungsbedingungen unmittelbar ausgedrückt werden. Hierdurch werden die numerischen Untersuchungen voll maschinell durchgerechnet. Die Methode ist auch für die weiteren, in der Praxis vorkommenden Belastungsfälle vorteilhaft anwendbar, da sich das erarbeitete Rechenprogramm ohne wesentliche Änderung verwenden läßt.

Die in den äußeren Randfasern der Schale auftretenden spezifischen Dehnungen können mit an die Oberfläche geklebten Meßstreifen verläßlich gemessen werden. Zu erwähnen ist, daß die Messungen nur bei streng konstanter Raumtemperatur, unter Ausschluß von Wärmestrahlung und Luftzug durchgeführt werden dürfen. Bei ähnlichen Messungen wie die hier beschriebenen empfiehlt es sich, die in der Konstruktion auftretenden Spannungen beträchtlich unter dem Bruchwert ($\sigma_{ii} \leq 1000 \text{ kp/cm}^2$) zu halten und die Meßstreifen in einem gewissen Abstand (0,4 cm) von der Krafteintragungsstelle anzubringen. Das Aufkleben der Streifen darf erst nach gründlicher Vorbereitung der Haftfläche und Beseitigung jeglicher Unebenheiten erfolgen.

Hinsichtlich des Verlaufes der berechneten und der aus Dehnungsmeßwerten ermittelten Spannungen darf festgestellt werden, daß die untersuchten Belastungen den erwarteten Spannungszustand bewirkt haben, wenn auch bei strenger Betrachtung gut wahrnehmbare Abweichungen zwischen berechneten und gemessenen Werten erscheinen, die sowohl Größen wie auch Verläufe der Spannungen betreffen. Unterschiede der Spannungsgrößen treten bei verteilter Belastung in Abb. 8 und 9 scharf hervor, während im Verlauf eher bei Linienlast in Abb. 5 und 6 Unterschiede anschaulich werden. Ursachen der Abweichungen sind sicherlich folgende:

Die berechneten Werte wurden unter den für dünne Schalen zulässigen Vernachlässigungen [1], unter Beachtung endlicher Gliederzahlen der für die äußere Last geltenden unendlichen Reihen ermittelt. Der davon herrührende Fehler bleibt nach den numerischen Untersuchungen unter 5. Bei Linienlast kann die Annahme einer Schale von unendlicher Länge und die nur annähernde Ermittlung der Wurzeln der kennzeichnenden Gleichung weitere Fehler verursachen. Nach den Kontrollberechnungen ist die Abweichung in der Spannungsdämpfung eher dem letzteren Umstand zuzuschreiben. Wider Erwarten kommen den berechneten Werten die durch Linienlast erzeugten Spannungen näher als die durch verteilte Belastung erregten inneren Kräfte. Dies ist gewiß

Tabelle 3
Durch Linienbelastung erzeugte Dehnungs- und Spannungswerte

x_1 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
An der Innenfläche gemessene Werte ($P = -16,9$ kp/cm)	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	2200	1190	390	- 85	- 380	- 600	- 740	- 835	- 835	- 795	- 730	- 605	- 485	- 395	- 305	- 245	- 180	- 150	- 145	- 140	- 125
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	2300	2280	2240	2230	2140	2070	1980	1860	1770	1710	1655	1545	1455	1380	1300	1235	1115	1015	915	845	795
	$\bar{\sigma}_{11b}$ (1/cm)	26,67	19,04	12,88	9,29	6,69	4,73	3,29	2,04	1,64	1,67	1,91	2,36	2,85	3,19	3,51	3,67	3,62	3,40	2,99	2,71	2,61
	$\bar{\sigma}_{22b}$ (1/cm)	37,27	32,54	28,50	26,27	23,88	22,07	20,37	18,52	17,44	16,90	16,53	15,77	15,23	14,74	14,18	13,67	12,52	11,46	10,29	9,47	8,94
x_2 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	2200	2130	2000	1730	1390	1050	780	540	330	175	75	- 70	- 125	- 130	- 115	- 85	- 25	15	55	80	90	
$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	2300	2280	2170	1900	1500	900	370	80	- 70	- 170	- 220	- 315	- 360	- 380	- 370	- 350	- 295	- 255	- 220	- 205	- 190	
$\bar{\sigma}_{11b}$	26,67	26,06	24,60	21,38	17,06	11,85	7,47	4,39	2,15	0,55	- 0,42	- 1,92	- 2,54	- 2,66	- 2,51	- 2,19	- 1,50	- 1,02	- 0,57	- 0,31	- 0,17	
$\bar{\sigma}_{22b}$	37,27	36,72	34,82	30,40	24,11	15,42	7,89	3,36	0,63	- 1,25	- 2,29	- 4,07	- 4,86	- 5,12	- 4,93	- 4,56	- 3,64	- 2,98	- 2,38	- 2,09	- 1,87	
x_1 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	
Für die Innenfläche berechnete Werte	$\bar{\sigma}_{11b}$ (1/cm)	26,10	17,83	11,87	8,34	5,92	4,38	3,49	3,02	2,84	2,86	2,94	3,12	3,32	3,52	3,71	3,85	4,19	4,05	3,87	3,74	3,64
	$\bar{\sigma}_{22b}$ (1/cm)	35,94	31,07	27,73	25,49	23,99	22,99	22,29	21,79	21,43	21,12	20,84	20,57	20,30	20,02	19,71	19,41	17,56	16,04	14,97	14,15	13,51
x_2 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	
$\bar{\sigma}_{11b}$ (1/cm)	26,10	25,70	24,86	23,49	20,53	15,72	10,83	7,67	6,04	4,69	3,33	2,45	1,96	1,42	0,90	0,67	0,21	0,49	0,52	0,44	0,10	
$\bar{\sigma}_{22b}$ (1/cm)	35,94	35,46	34,39	32,63	28,85	22,74	16,51	12,46	10,35	8,57	6,79	5,61	5,28	4,14	3,41	3,03	1,86	1,52	0,81	- 30,08	- 1,32	
x_1 (cm)	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
An der Außenfläche gemessene Werte ($P = -16,9$ kp/cm)	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	- 2710	- 1580	- 1000	- 620	- 410	- 260	- 185	- 140	- 115	- 115	- 125	- 180	- 220	- 240	- 245	- 240	- 205	- 175	- 160	- 140	- 130
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	- 3060	- 2900	- 2730	- 2540	- 2360	- 2160	- 1990	- 1800	- 1660	- 1540	- 1450	- 1300	- 1190	- 1100	- 1025	- 960	- 870	- 780	- 725	- 690	- 675
	$\bar{\sigma}_{11k}$ (1/cm)	- 33,86	- 24,71	- 19,62	- 15,94	- 13,57	- 11,56	- 10,24	- 9,06	- 8,25	- 7,71	- 7,39	- 7,13	- 6,94	- 6,69	- 6,39	- 6,07	- 5,40	- 4,78	- 4,42	- 4,12	- 3,97
	$\bar{\sigma}_{22k}$ (1/cm)	- 48,62	- 41,68	- 37,07	- 33,11	- 30,03	- 26,97	- 24,60	- 22,13	- 20,35	- 18,92	- 17,88	- 16,34	- 15,20	- 14,21	- 13,34	- 12,54	- 11,31	- 10,10	- 9,37	- 8,87	- 8,64
x_2 (cm)	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,5	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	- 1410	- 1150	- 1000	- 810	- 690	- 530	- 435	- 360	- 285	- 205	- 125	- 25	50	120	165	180	185	180	165	145	135	
$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	- 1600	- 1440	- 1270	- 1130	- 1010	- 900	- 770	- 645	- 555	- 440	- 365	- 225	- 135	- 20	45	95	155	165	145	115	95	
$\bar{\sigma}_{11k}$ (1/cm)	- 17,65	- 15,00	- 13,12	- 11,08	- 9,65	- 7,96	- 6,68	- 5,56	- 4,60	- 3,49	- 2,56	- 1,19	- 0,23	0,81	1,43	1,77	2,07	2,08	1,88	1,59	1,43	
$\bar{\sigma}_{22k}$ (1/cm)	- 25,39	- 22,32	- 19,62	- 17,10	- 15,14	- 13,11	- 11,13	- 9,31	- 7,90	- 6,17	- 4,92	- 2,80	- 1,39	0,29	1,27	1,94	2,57	2,79	2,47	2,02	1,73	
x_1 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	
Für die Außenfläche berechnete Werte	$\bar{\sigma}_{11k}$ (1/cm)	- 36,22	- 27,93	- 22,01	- 17,88	- 15,04	- 13,04	- 11,69	- 10,76	- 10,14	- 9,74	- 9,48	- 9,30	- 9,18	- 9,08	- 9,01	- 8,93	- 8,29	- 7,57	- 6,99	- 6,56	- 6,22
	$\bar{\sigma}_{22k}$ (1/cm)	- 48,96	- 43,39	- 38,49	- 34,31	- 30,85	- 27,99	- 25,67	- 23,81	- 22,33	- 21,16	- 20,24	- 19,53	- 18,96	- 18,50	- 18,11	- 17,81	- 16,48	- 15,42	- 14,53	- 13,81	- 13,25
x_2 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	
$\bar{\sigma}_{11k}$ (1/cm)	- 36,22	- 35,82	- 34,78	- 33,09	- 29,69	- 24,36	- 18,87	- 15,09	- 12,82	- 10,85	- 8,87	- 7,41	- 6,36	- 5,28	- 4,26	- 3,57	- 1,01	- 0,19	0,32	0,70	1,22	
$\bar{\sigma}_{22k}$ (1/cm)	- 48,96	- 48,40	- 47,07	- 44,91	- 40,59	- 33,82	- 26,85	- 22,04	- 19,15	- 16,59	- 14,07	- 12,15	- 11,14	- 9,36	- 8,01	- 7,07	- 3,46	- 1,96	- 0,81	0,20	1,42	

Tabelle 4

Durch örtliche verteilte Belastung erzeugte Dehnungs- und Spannungswerte

x_1 (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	
An der Innenfläche gemessene Werte ($p = -4$ kp/cm ²)	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	810	730	490	145	0	- 255	- 510	- 690	- 740	- 740	- 720	- 620	- 515	- 430	- 370	- 315	- 250	- 205	- 175	- 160	- 150
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	2060	2060	2060	2050	2040	2025	2010	1970	1925	1875	1825	1720	1615	1530	1450	1370	1245	1140	1050	970	900
	$\bar{\sigma}_{11b}$	64,29	61,77	54,20	43,12	38,36	30,03	21,71	15,27	12,85	11,91	11,60	12,78	14,12	15,20	15,59	15,82	15,52	14,97	14,22	13,19	12,19
	$\bar{\sigma}_{22b}$	119,2	117,7	113,2	106,2	103,0	97,45	91,91	86,50	83,29	80,77	78,62	75,20	71,87	69,17	66,26	63,25	58,16	53,71	49,73	45,97	42,62
	x_2 [cm]	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0
Für die Innenfläche berechnete Werte	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	810	790	730	650	550	450	340	240	145	80	20	- 75	- 130	- 135	- 125	- 90	- 30	25	75	105	130
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	2060	2040	1970	1760	1520	1215	790	525	310	145	- 10	- 200	- 335	- 400	- 430	- 425	- 395	- 345	- 295	- 265	- 250
	$\bar{\sigma}_{11b}$	64,29	63,28	60,07	53,60	45,93	37,04	25,58	17,44	10,40	5,25	0,44	- 6,13	- 10,40	- 11,78	- 12,03	- 10,83	- 8,37	- 5,70	- 3,18	- 1,67	- 0,60
	$\bar{\sigma}_{22b}$	119,2	117,8	113,2	101,1	87,07	69,80	46,27	31,02	18,37	8,82	- 0,18	- 11,51	- 19,35	- 22,73	- 24,06	- 23,15	- 20,51	- 16,95	- 13,48	- 11,40	- 10,18
	x_2 (cm)	0	0,66	1,32	1,98	2,64	3,30	3,96	4,62	5,28	5,94	6,60	7,26	7,92	11,88	15,84	19,80					
An der Außenfläche gemessene Werte ($p = -4$ kp/cm ²)	$\bar{\sigma}_{11b}$	50,81	48,49	42,19	33,27	23,67	15,17	9,03	5,68	9,13	10,34	9,11	8,25	7,72								
	$\bar{\sigma}_{22b}$	103,6	102,1	97,77	91,55	84,64	78,08	72,66	68,67	59,18	48,12	40,16	34,94	31,20								
	x_2 (cm)	0	0,66	1,32	1,98	2,64	3,30	3,96	4,62	5,28	5,94	6,60	7,26	7,92	11,88	15,84	19,80					
	$\bar{\sigma}_{11b}$	50,81	48,94	43,65	35,95	27,04	18,22	10,55	4,54	0,32	- 2,41	- 4,08	- 5,12	- 5,79	- 4,59	- 1,64	- 0,07					
	$\bar{\sigma}_{22b}$	103,6	99,77	88,73	72,67	54,19	36,12	20,54	8,58	0,33	- 4,92	- 8,19	- 10,40	- 12,09	- 13,05	- 9,97	- 8,20					
Für die Außenfläche berechnete Werte	x_1 (cm)	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,5	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0
	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	- 530	- 385	- 305	- 285	- 265	- 255	- 250	- 250	- 250	- 255	- 260	- 270	- 280	- 295	- 295	- 280	- 260	- 240	- 220	- 195	- 175
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	- 2280	- 2140	- 1970	- 1840	- 1730	- 1635	- 1550	- 1490	- 1435	- 1390	- 1355	- 1305	- 1260	- 1190	- 1140	- 1100	- 1020	- 945	- 880	- 820	- 760
	$\bar{\sigma}_{11k}$	- 59,59	- 52,38	- 46,66	- 43,59	- 40,89	- 38,79	- 37,03	- 35,90	- 34,87	- 34,18	- 33,68	- 33,06	- 32,53	- 31,68	- 30,74	- 29,52	- 27,36	- 25,34	- 23,49	- 21,57	- 19,81
	$\bar{\sigma}_{22k}$	- 125,1	- 115,3	- 105,2	- 98,25	- 92,33	- 87,34	- 82,95	- 79,92	- 77,15	- 74,94	- 73,30	- 70,96	- 68,88	- 65,62	- 63,10	- 60,80	- 56,38	- 52,22	- 48,56	- 45,06	- 41,66
Für die Außenfläche berechnete Werte	x_2 (cm)	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,5	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0
	$\epsilon_{11} \cdot 10^6$	- 1170	- 1070	- 970	- 885	- 800	- 710	- 635	- 560	- 490	- 425	- 365	- 280	- 200	- 70	25	95	165	190	170	155	140
	$\epsilon_{22} \cdot 10^6$	- 1480	- 1305	- 1150	- 1000	- 855	- 720	- 595	- 490	- 400	- 315	- 240	- 135	- 50	70	155	210	245	235	215	205	195
	$\bar{\sigma}_{11k}$	- 64,74	- 58,30	- 52,23	- 46,72	- 41,32	- 35,94	- 31,22	- 26,88	- 22,98	- 19,33	- 16,03	- 11,37	- 7,25	- 0,89	3,70	6,95	9,81	10,41	9,40	8,74	8,08
	$\bar{\sigma}_{22k}$	- 96,70	- 85,98	- 76,28	- 67,11	- 58,19	- 49,69	- 41,97	- 35,26	- 29,40	- 23,89	- 18,97	- 12,08	- 6,28	2,22	8,29	12,38	15,47	15,43	14,05	13,26	12,48
Für die Außenfläche berechnete Werte	x_1 (cm)	0	0,66	1,32	1,98	2,64	3,30	3,96	4,62	5,28	5,94	6,60	7,26	7,92	11,88	15,84	19,80					
	$\bar{\sigma}_{11k}$	- 92,35	- 89,63	- 82,13	- 71,37	- 59,45	- 48,39	- 39,61	- 33,70	- 27,65	- 23,22	- 19,07	- 16,31	- 14,42								
	$\bar{\sigma}_{22k}$	- 151,0	- 147,8	- 138,6	- 125,3	- 110,0	- 94,96	- 81,90	- 71,53	- 52,08	- 43,82	- 37,72	- 33,18	- 29,84								
	x_2 (cm)	0	0,66	1,32	1,98	2,64	3,30	3,96	4,62	5,28	5,94	6,60	7,26	7,92	11,88	15,84	19,80					
	$\bar{\sigma}_{11k}$	- 92,35	- 90,02	- 83,31	- 73,39	- 61,62	- 49,50	- 38,25	- 28,60	- 20,78	- 14,63	- 9,74	- 5,72	- 2,35	7,11	7,92	6,99					
$\bar{\sigma}_{22k}$	- 151,0	- 146,7	- 134,5	- 116,5	- 95,45	- 74,36	- 55,48	- 40,06	- 28,33	- 19,66	- 13,13	- 7,86	- 3,35	9,05	10,09	8,98						

dem Umstand zuzuschreiben, daß sich die zum Aufbringen der Linienlast benutzten kammartigen, abgerundeten Zähne unter Last ausbreiten, demzufolge die tatsächliche Belastung eigentlich auf einem etwa 0,4—0,6 cm breiten Streifen wirkt. In Anbetracht der schnellen Dämpfung ist leicht einzusehen, daß sich auf diese Weise geringere Formänderungen als bei der hypothetischen Linienlast ergeben. Selbstverständlich kann auch nicht behauptet werden, daß die Änderung der Linienlast den Umfang entlang oder die tatsächliche Verteilung der sog. verteilten Belastung über die Oberfläche den mit unendlichen Reihen angenäherten Belastungsfunktionen genau gefolgt wären. Auch damit ist zu rechnen, daß die gemessenen Dehnungen eigentlich die auf die Meßbasis (0,7 cm) der Klebestreifen bezogenen Durchschnittswerte bedeuten. Wesentlich ist schließlich, daß die bei den Untersuchungen in Betracht gezogenen Elastizitätskonstanten theoretisch ermittelte Werte sind. Die Tatsache, daß die aus den Messungen ermittelten höchsten Spannungen in beiden Belastungsfällen höher als die berechneten Werte sind, läßt sich nämlich am einfachsten damit erklären daß die Steifigkeit der untersuchten Schale niedriger als berechnet ist.

Jeder der aufgeführten Umstände kann zu den Abweichungen der gemessenen Werte von den berechneten Werten beitragen. Ihre vektorenartig summierte Wirkung verursacht die Abweichungen in Abb. 5, 6, 8 und 9, die ja bei ähnlichen Festigkeitsuntersuchungen gewohnt sind. Aufgrund der durchgeführten Untersuchungen und unter Beachtung der an den Verlauf der Ergebnisse geknüpften Bemerkungen sind folgende allgemeingültige Feststellungen möglich:

Zylindrische Schalen aus verstärktem Kunststoff verhalten sich auch bei Biegebeanspruchung ähnlich wie die gewohnten homogenen, isotropen Konstruktionen. Die spezifischen Dehnungen in den äußeren Fasern der Schale können mit an die Oberfläche geklebten Meßstreifen verlässlich gemessen werden. Infolge der Inhomogenität des Werkstoffs bzw. fertigungsbedingter Schwankungen der örtlichen Wandstärke und des örtlichen Glasfasergehaltes ist zwar mit Spannungsschwankungen von 15—20% zu rechnen, nichtsdestoweniger lassen sich die Spannungen nach dem vorgeschlagenen Berechnungsverfahren [1], selbst unter Einsatz nur der theoretisch ermittelten Elastizitätskonstanten, mit hinreichender Genauigkeit ermitteln.

Zusammenfassung

Das Berechnungsverfahren zur Ermittlung des allgemeinen Spannungszustandes von orthotropen zylindrischen Schalen aus verstärktem Kunststoff befindet sich in Teil I dieser Arbeit. Richtigkeit und Anwendbarkeit der auf theoretischem Wege abgeleiteten Zusammenhänge werden vom Verfasser durch Berechnungen und Messungen nachgewiesen, deren Ergebnisse in diesem Teil II der Arbeit enthalten sind.

Die Untersuchungen erfolgten am zylindrischen Körper eines Druckgefäßes und erstreckten sich auf Berechnung und Messung der in den äußeren Fasern der Schale in Richtung der Erzeugenden und des Umfanges wirkenden Normalspannungen, mit darauffolgendem Vergleich der berechneten und der gemessenen Werte.

Literatur

1. L. VARGA: Teil I.
2. A. PUCK: Kunststoffe Bd. 57 (1967) S. 284/93.
3. G. GRESZCZUK: Douglas Aircraft Corp. Report SM-45849. Jan. 1964. (2842)
4. J. ROARK: Formulas for stress and strain. McGraw-Hill, New York 1954.
5. H. ZOTT: Kunststoffe Bd. 62 (1972) S. 820.
6. J. DÜRKOP: Kunststoffe Bd. 63 (1973) S. 564.
7. L. VARGA: Doktorarbeit, Budapest 1974.

Dr. László VARGA H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 9.