EINIGE PROBLEME DER WAHRSCHEINLICHKEITS-VERTEILUNG VON PERIODISCH SYSTEMATISCHEN EINFLÜSSEN IN DER FERTIGUNGSMESSTECHNIK

Von

J. FARKAS und G. SZÁSZ

Lehrstuhl für Feinmechanik-Optik, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 25. August 1976

Vorgelegt von Prof. Dr. O. PETRIK

Eine der neueren Methoden der Bestimmung von Formabweichungen in der Fertigungsmeßtechnik ist, daß man die Abweichungen auf ein Regressionsprofil bezieht, welches durch die Methoden der mathematischen Statistik ermittelt wurde [1]. Im Zusammenhang mit der Meßaufgabe ist eine grundlegende Frage, wie der Umfang der Meßreihe zu einem vorgegebenen Konfidenzintervall des Regressionsprofils ermittelt werden soll.

Im vorliegenden Aufsatz wird als Beispiel ein in der Fertigungsmeßtechnik äußerst oft vorkommendes Problem, die Frage der Rundheitsmessung erörtert. Zahlreiche Messungen von mehreren Verfassern beweisen, daß periodische Formabweichungen bei der Bearbeitung von kreisförmigen Werkstücken — aus fertigungstechnischen Gründen — sehr häufig sind. WIRTZ [2] hat z. B. auf Grund von Untersuchung einer Vielzahl von Werkstücken festgestellt, daß 42% derselben mit periodischen Fehlern behaftet waren. BERGMANN [3] hat — ebenfalls auf Grund einer großen Anzahl von Messungen — für den Anteil solcher Werkstücke folgende Werte gefunden:

bei Drehen	44%;
bei Schleifen	46%;
bei Reiben	61%.

Man muß, um die ursprüngliche Frage zu beantworten, zwei Teilfragen klären. Erstens ist die Standardabweichung der erwartungsmäßigen Meßwerte zu ermitteln und zweitens ist die Verteilung der Mittelwerte der Meßreihen zu klären. In bezug auf die Verteilung sind die theoretischen und experimentellen Untersuchungen noch im Gange, über die Lösung der ersten Teilaufgabe können wir aber schon berichten.

Eine numerische Methode der Ermittlung der Standardabweichung und das Ergebnis wurden im Beitrag [4] mitgeteilt. Die neuesten Untersuchungen haben hingegen die analytische Auflösung des Problems geliefert.

Die analytische Ermittlung der Standardabweichung setzt die Kenntnis der Dichtefunktion der Meßergebnisse voraus. Die Aufgabe lautet also folgendermaßen: Wie streuen die auf den Radius des Regressionskreises abgebildeten Meßpunkte auf dem Radius im Falle sinusförmiger Formfehler, wenn die Profilpunkte in gleichmäßigen Teilungen gemessen werden?

Mathematisch handelt es sich hier um die Ableitung einer weiteren Zufallsgröße aus zwei Größen (aus einer Zufallsgröße gleichmäßiger Verteilung und einer sinusförmigen deterministischen Größe).

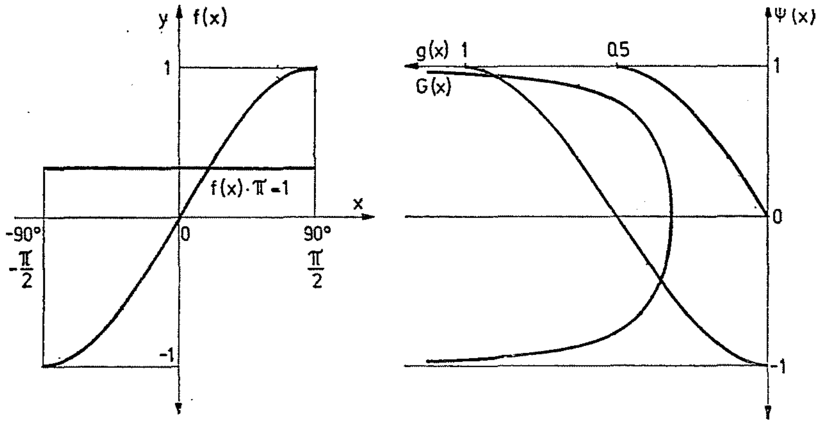

Abb. 1. Transformation der Dichtefunktion

Sei $f(x)$ die Dichtefunktion der Zufallsgröße ξ und $\psi(x)$ die andere, vorgegebene (deterministische) Funktion. Ist die Verteilung von ξ abschnittsweise glatt (differenzierbar), ist weiterhin die Funktion $\psi(x)$ im Wertbereich der Größe ξ monoton wachsend, differenzierbar und $\psi'(x) \neq 0$, und wird die Dichtefunktion von $\eta = \psi(\xi)$ mit $g(y)$ bezeichnet, dann ist nach [5]

$$g(y) = \frac{f[\psi^{-1}(y)]}{|\psi'[\psi^{-1}(y)]|}, \tag{1}$$

worin $x = \psi^{-1}(y)$ die inverse Funktion der Funktion $y = \psi(x)$ darstellt. Es sei in unserem Falle

$$\left.\begin{aligned} y &= \psi(x) = \sin x, \text{ dann} \\ x &= \psi^{-1}(y) = \operatorname{arc} \sin y \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und damit ist (auch die Bezeichnungen der Abb. 1 benutzt)

$$g(y) = \frac{f(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\pi} |(\operatorname{arc} \sin y)'| = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \tag{3}$$

welche also die Dichtefunktion der abgeleiteten Zufallsgröße ist. Mit Hilfe der Gleichung (3) ist die Varianz bereits zu errechnen:

$$D^2(y) = \int_{-1}^{1} [y - M(y)]^2 g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^2 \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}\arcsin y\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Damit ist die Standardabweichung

$$D(y) = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071067812\,, \tag{5}$$

mit welchem der in [4] durch eine numerische Methode früher ermittelte Zahlenwert eine entsprechende Übereinstimmung aufweist.

Nun soll die Richtigkeit des Ergebnisses (3) untersucht werden. Errechnen wir daher mit dessen Hilfe den Erwartungswert sowie das Integral der Dichtefunktion, d. h. die Verteilungsfunktion $G(y)$ bzw. die Fläche unterhalb der Dichtefunktion $f(x)$:

$$M(y) = \int_{-1}^{1} y \cdot g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[-\sqrt{1-y^2}\right]_{-1}^{1} = 0; \tag{6}$$

bzw.

$$G(y) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin y\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}, \tag{7}$$

d. h. die abgeleitete Dichtefunktion (3) liefert richtige Ergebnisse.

Es ist sehr lehrreich, die normierte Normalverteilung, die gleichmäßige Verteilung sowie die arc-sin-Verteilung miteinander zu vergleichen. Die Standardabweichung der normierten Normalverteilung ist

$$D(\xi)_{\text{Gauß normiert}} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = 0{,}3333333333\,. \tag{8}$$

Die Varianz der gleichmäßigen Verteilung:

$$\begin{aligned} D^2(\xi)_{\text{gleichm}} &= \int_{-a/2}^{a/2} [x - M(\xi)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-a/2}^{a/2} x^2\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{a^2}{12}. \end{aligned} \tag{9}$$

Wird die Größe von a — in Übereinstimmung mit dem Streubereich der normierten Normalverteilung sowie dem Bereich der Zufallsgröße y — zu $a = 2$ angenommen, so ist

$$D(\xi)_{\text{gleichm}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773502692 . \tag{10}$$

Die Standardabweichung der arc-sin-Verteilung ist hingegen nach der Formel(4)

$$D(y)_{\text{arc sin}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071067812 . \tag{11}$$

Es ist sehr interessant, daß die Änderung der Wurzeln von asymptotischem Charakter ist. Es ist weiterhin beachtenswert, daß

$$D(\xi)_{Gau\beta\ normiert} = [D(\xi)_{gleichm}]^2 = D^2(\xi)_{gleichm} , \tag{12}$$

und

$$D(y)_{\text{arc sin}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° . \tag{13}$$

Schließlich transformieren wir die Streubereiche sowie die Standardabweichungen zu den entsprechenden Parametern der Normalverteilung. So sind die Standardabweichungen:

$$\left.\begin{aligned} D(\xi)_{\text{Gauß}} &= 1{,}0 \ldots ; \\ D(\xi)_{\text{gleichm transf}} &= 3.0{,}5773502692 = 1{,}732050808; \\ D(\xi)_{\text{arc sin transf}} &= 3.0{,}7071067812 = 2.121320344. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Nach dem Obigen trifft also die Behauptung bzw. die Voraussetzung von WIRTZ [2] von dem normalen Charakter der Streuung der Meßwerte nicht zu.

Der Wert der Funktion $g(y)$ ist am Ort der Standardabweichung

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}5}} = 0{,}4501581581 . \tag{15}$$

Die Verhältnisse wurden in der Abb. 2 dargestellt.

Der Bereich der untersuchten Dichtefunktion $g(y)$ betrug ± 1 Einheit. Es soll daher der Bereich der periodischen Formfehler des Werkstückes an Hand einer gegebenen Meßaufgabe normiert werden, um die obigen Ergebnisse anwenden zu können.

Schließlich soll noch erwähnt werden, daß sich die dargelegten Untersuchungen auf einen Bereich von $\pi/2$ bzw. π beziehen obwohl $2k\pi$ Perioden

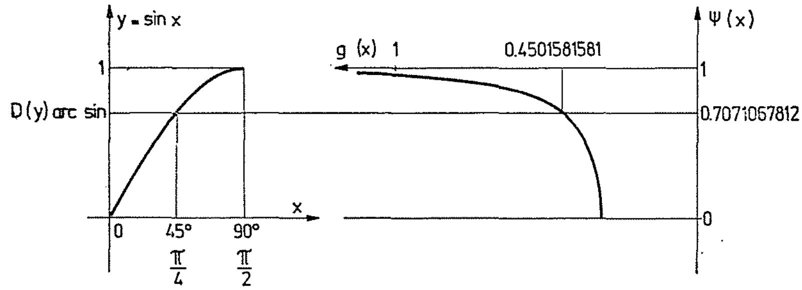

Abb. 2. Darstellung der errechneten Ergebnisse

in Wirklichkeit im vollen Kreis zu finden sind (k ist erfahrungsgemäß eine gerade Zahl über 4). Dieser Umstand steigert die Stabilität der relativen Häufigkeit der Meßwerte noch weiter und verstärkt dadurch die praktische Anwendbarkeit dieser Analyse.

Zusammenfassung

Im Aufsatz wird der häufige Fall der in der Fertigungsmeßtechnik vorkommenden Formmessungsaufgaben behandelt, wenn das theoretische Profil mit einem periodisch systematischen Fehler belastet ist. Die Verfasser liefern, die Methoden der Wahrscheinlichkeits-theorie angewendet, für die Verteilung der in gleichmäßigen Teilungen meßbaren Punkte eine exakte analytische Lösung. Im weiteren werden die Kennzeichen der arc-sin-Verteilung diskutiert.

Literatur

1. FARKAS, J.: Beiträge zur mathermatisch-statistischen Ermittlung von Formabweichungen. Tagungsbericht des IV. Oberflächen-Kolloquiums in Karl-Marx-Stadt, 1976. Herausgegeben von der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt.
2. WIRTZ, A.: Berücksichtigung von Formabweichungen bei der Maßbestimmung auf 3-Koordinaten-Meßmaschinen. Feingerätetechnik, *25.* (1976). 71.
3. BERGMANN, A.: Probleme und Möglichkeiten der Automatisierung von Form- und Lagemessungen. VDI-Berichte 230.
4. FARKAS, J.: Mathematisch-statistische Betrachtungen zur Ermittlung von Formabweichungen in der Fertigungstechnik. Periodica Polytechnica. 1976. Vol. 20. No. 2. S. 117—129.
5. RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, S. 745.

Dr. János FARKAS H-1521 Budapest