ANWENDUNG DES FALTUNGSINTEGRALS (KONVOLUTION) ZUR ANALYSE DER VARIANZ VON FERTIGUNGSTECHNISCHEN VERFAHREN

Von

J. FARKAS

Lehrstuhl für Fertigungstechnik, Technische Universität Budapest

Eingegangen am 9. November 1976
Vorgelegt von Doz. Dr. M. HORVÁTH

Die einzelnen Verfahren können in der Fertigungstechnik hinsichtlich der Genauigkeit durch ihre Qualitätszahl gekennzeichnet werden. Es ist bekannt, daß die einer n-ten Qualität angehörende Grundtoleranz — von der Qualität IT 6 an — folgendermaßen zu errechnen ist:

$$T = q_{R_5}^{n-1} \cdot i, \tag{1}$$

worin q_{R5} — der Quotient der geometrischen Reihe $R\,5$,
i — die Toleranzeinheit ist.

Zwischen der Grundtoleranz T und dem Streubereich R der Werkstücke besteht — aus ökonomischen Überlegungen — ein bestimmtes Verhältnis. Der Streubereich R steht gleichfalls mit der Standardabweichung σ in einer engen Korrelation. Die Analyse der Toleranzen oder der Streubereiche läßt sich daher auf die Analyse der Standardabweichungen bzw. der Varianzen zurückführen.

Sagt man beispielweise aus, daß die Genauigkeit des Schleifens durchschnittlich mit einer Qualität von etwa IT 6 zu kennzeichnen ist, so beträgt die Standardabweichung des Werkstückhaufens mit dem Durchmesser $D = 40$ mm — vorausgesetzt, daß die Toleranz mit dem Streubereich übereinstimmt — im Falle einer Normalverteilung $\sigma = R/6 = T/6 = 16/6 = 2{,}66\ \mu$m, da der Streubereich auf einem sehr hohen (99,97%) Wahrscheinlichkeitsniveau gleich der 6fachen Standardabweichung ist.

Bei spanabhebenden Bearbeitungen ist die Verteilung in der Regel als von normalem Charakter anzusehen, da eine Vielzahl von Einwirkungen zufälliger Art vorhanden ist. Dies ist im zentralen Grenzverteilungsgesetz abgefaßt, wonach (S. [1])

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqq \eta_n^* \leqq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

d. h. η_n ist bei einem hinreichend großen n annähernd normalverteilt, $N(0, 1)$. Hier ist

$$\eta_n^* = \frac{\eta_n - n \cdot m}{\sigma \sqrt{n}}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{worin}\quad \eta_n &= \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i + \ldots + \xi_n; \\ \xi_i &- \text{Zufallsgröße (= Mittel der Reihe);} \\ n &- \text{Anzahl der Reihen;} \\ m &= M(\xi); \\ \sigma &= D(\xi) \text{ sind.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die für ein fertigungstechnisches Verfahren kennzeichnende Standardabweichung bzw. Varianz setzt sich im wesentlichen aus zwei Komponenten: aus einer »eigenen« und einer aus dem Verschleiß des Werkzeuges herrührenden Varianz zusammen. Zur Illustration des Problems sei ein Beispiel angeführt.

Ein Zapfen wird nach Einstechverahren mit Anschlagen geschliffen. Würde kein Werkzeugverschleiß zustande kommen, so würde der Haufen der Durchmesser um einem festen Erwartungswert einer Normalverteilung gehorchen. Hätte das Verfahren hingegen keine solche eigene Streuung, d. h., wenn nur der Werkzeugverschleiß zur Geltung käme, dann würde der Durchmesserhaufen wegen der Verschiebung des Erwartungswertes — im Bereich des gleichmäßigen Verschleißes — eine gleichmäßige Verteilung aufweisen. In der Wirklichkeit wird die Streuung der Abmessungen von beiden Einflüssen mit hervorgerufen.

Mathematisch läßt sich das Problem folgendermaßen formulieren.

Es seien ξ und η unabhängige Zufallsgrößen und ihre Verteilung streckenweise glatt (d. h. differenzierbar). Ihre

$$\left.\begin{aligned} &\text{Dichtfunktionen sind} \\ &\qquad\qquad p(x), \\ &\qquad\qquad q(y); \\ &\text{ihre Erwartungswerte sind} \\ &\qquad\qquad \mu_x, \\ &\qquad\qquad \mu_y; \\ &\text{und ihre Standardabweichungen sind} \\ &\qquad\qquad \sigma_x, \\ &\qquad\qquad \sigma_y. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die resultierende Zufallsgröße sei $\zeta = \xi + \eta$. Nach [2] kann bewiesen werden, daß auch ζ eine Zufallsgröße von streckenweise glatter Verteilung ist und die Dichtefunktion

$$r(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, q(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-x)\, q(x)\, dx \tag{6}$$

hat; dieser Zusammenhang ist in der Regelungstheorie als Faltungsintegral bzw. Konvolution bekannt:

$$r(z) = p * q = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, q(z-x)\, dx = \text{usw.} \tag{7}$$

Die technische Interpretation der Zusammenhänge (6) bzw. (7) ist im gegebenen Falle wie folgt (S. Abb. 1). Der »eigene Streucharakter« des fertigungstechnischen Verfahrens wird durch die Dichtefunktion $p(z-x) = p(y)$, die vom Werkreugverschleiß verursachte Streuung hingegen durch die Dichtefunktion $q(x)$ gekennzeichnet. Der Erwartungswert der Normalverteilung ändert sich während der Zeitspanne der Untersuchung von a zu b.

Die Wahrscheinlichkeit dessen, daß sich ein Element des Haufens in dem kleinen Intervall Δy von der Einheit befindet, beträgt $1 \cdot q(x)$. Die resultierende Wahrscheinlichkeit ist für ein bestimmtes Intervall das Produkt beider Wahrscheinlichkeiten: $p(y) \cdot q(x)$. Weil aber die relative Lage der Kurven beider Dichtefunktionen sich stetig und kontinuierlich ändert, müssen die auf diese Weise ermittelten Wahrscheinlichkeitsprodukte integriert werden.

Das mathematische Modell der Aufgabe ist also die Komposition von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Abb. 2). Die Lösung der Aufgabe ist wie folgt:

$$\begin{aligned} r(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(z-x)\, q(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_1^2}}\, \frac{1}{b-a}\, dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(z-x)^2}{2\sigma_1^2}}\, dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma_1^2}}\, dx = \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\Phi\left(\frac{b-z}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{a-z}{\sigma_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Da nach x integriert werden muß, und sich der Wertbereich der Funktion $q(x)$ von a bis b erstreckt, können die Grenzen des Integrierens durch a und

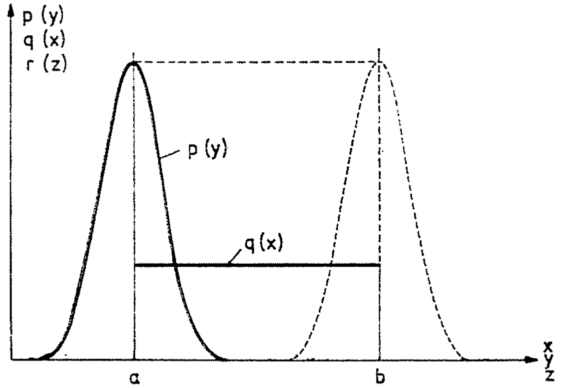

Abb. 1. Interpretation des Faltungsintegrals (Konvolution)

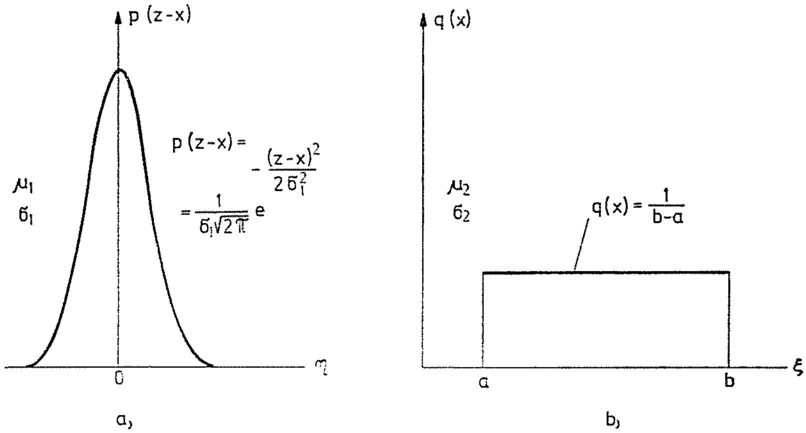

Abb. 2. Mathemathisches Modell der Aufgabe

b ersetzt werden. Die Veränderlichen x und z wurden in dem Exponenten aus Zweckmäßigkeitsgründen vertauscht. Da die Differenz beider Veränderlichen quadriert wird, ruft dieses Verfahren nämlich keine Vorzeichenänderung hervor.

Sind $z = a$ und $\sigma_1 = 1$, so gilt nach dem Ergebnis (8), daß

$$r(z) = \frac{1}{b-a}\left[\Phi(b-a) - \Phi(0)\right] = \frac{1}{b-a}\left[\Phi(b-a) - 0{,}5\right]. \tag{9}$$

Bei $z = b$ (und $\sigma_1 = 1$) ist hingegen

$$r(z) = \frac{1}{b-a}\left[\Phi(0) - \Phi(a-b)\right] = \frac{1}{b-a}\left\{0{,}5 - \left[1 - \Phi(b-a)\right]\right\}. \tag{10}$$

Es soll untersucht werden, ob die nach Formeln (9) und (10) ermittelten Wahrscheinlichkeiten gleich sind. Die Bedingung der Gleichheit lautet:

$$[\Phi(b-a)-0{,}5] = \{0{,}5-[1-\Phi(b-a)]\}. \tag{11}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Gleichheit (11) besteht, was übrigens aus der Symmetrie von vornherein folgt.

Als Probe der Richtigkeit des Ergebnisses (8) sei die nachstehende Kontrolle durchgeführt. Ist $\sigma_1 = 0$, dann muß $r(z) = \dfrac{1}{b-a}$ sein. Dies trifft zu, weil

$$\left[\Phi\left(\frac{b-z}{0}\right)-\Phi\left(\frac{a-z}{0}\right)\right] =$$

$$= [\Phi(+\infty)-\Phi(-\infty)] = [1-0] = 1. \tag{12}$$

Auf Grund des Zusammenhanges (8) wurden die Verhältnisse — für zwei charakteristische Fälle — in Abb. 3 und 4 dargestellt.

Sonst ergibt sich ebenfalls aus der Symmetrie der Verteilungen sowie der Komposition, daß der Erwartungswert der neuen Zufallsgröße

$$M(\zeta) = \frac{a+b}{2} \tag{13}$$

ist. Ihre Varianz — da es sich um unabhängige Zufallsgrößen handelt — ist die folgende:

$$D^2(\zeta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2. \tag{14}$$

Dieser Zusammenhang macht sehr wesentliche Überlegungen notwendig.

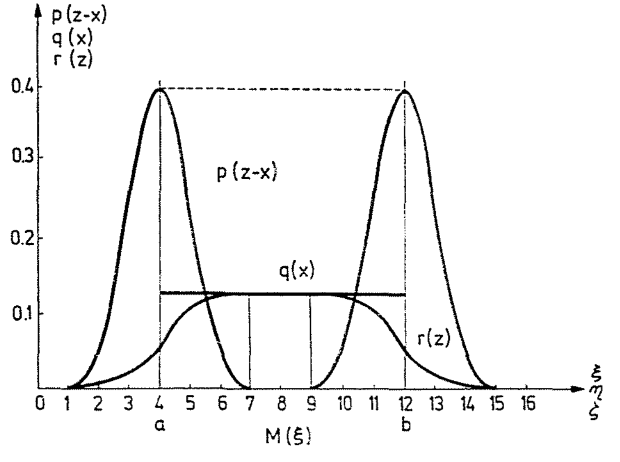

Abb. 3. Beispiel zur Komposition von Dichtefunktionen

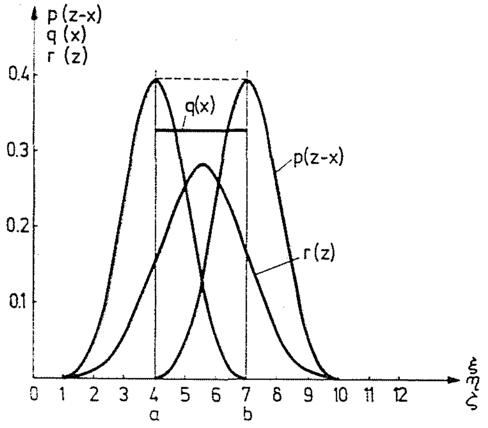

Abb. 4. Beispiel zur Komposition von Dichtefunktionen

Die Maßstreuung der durch Zerspanung bearbeiteten Werkstücke setzt sich nach Formel (14) aus zwei Komponenten: einerseits aus der »eigenen Streuung« des fertigungstechnischen Verfahrens und anderseits der durch den Werkzeugverschleiß hervorgerufenen Streuung zusammen. Auf Grund dieser Feststellung ist es bei der Charakterisierung der Genauigkeit der einzelnen Verfahren nicht gleichgültig, wie groß der durch den Werkzeugverschleiß verursachte Anteil der Varianz ist. Da der Einfluß des Werkzeugverschleißes das Kennzeichnen unsicher macht, ist es am richtigsten, diese Einwirkung abzutrennen.

Die eine Methode der Lösung besteht darin, daß die Standardabweichung σ_1 — bei kurzem Zerspanen — aus einer Probe geringer Stückzahl ermittelt wird. Diese Probe ist aber nicht repräsentativ, die so ermittelte Standardabweichung ist daher unsicher. Wird hingegen — um eine Probe ausreichender Stückzahl zu erhalten — lange zerspant, so wird die eigene Standardabweichung σ_1 des Verfahrens infolge der durch den Werkzeugverschleiß verursachten Standardabweichung σ_2 verzerrt. Die richtige Lösung besteht darin, daß man — bei beliebiger Zerspanungsdauer — die resultierende Varianz $D^2(\zeta)$ aus einer Probe großer Stückzahl sowie den Werkzeugverschleiß nach einem entsprechenden Verfahren bzw. aus diesem den Bereich $a - b$ ermittelt, und die Varianz der gleichmäßigen Verteilung σ_2^2 nach Formel (14) von der resultierenden Varianz $D^2(\zeta)$ analytisch abtrennt. Zur Ermittlung der Varianz der gleichmäßigen Verteilung sind unter anderem in [3] Hinweise zu finden, wonach

$$\sigma_2^2 = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{15}$$

Nach dem Obigen besteht die Möglichkeit, die zerspanenden fertigungstechnischen Verfahren exakter als bisher durch ihre eigenen Varianzen zu kennzeichnen.

Zusammenfassung

Im Maschinen- und Gerätebau setzt sich die Maßstreuung der Werkstücke im allgemeinen aus zwei Komponenten: aus einer »eigenen« Streuung des fertigungstechnischen Verfahrens und einer durch den Werkzeugverschleiß verursachten Streuung zusammen. In Kenntnis der den Streuungscharakter der Faktoren beschreibenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist die Komposition dieser Wahrscheinlichkeitsdichten bzw. das Zerlegen der resultierenden Varianz möglich. Im Beitrag wird für die Analyse der Verhältnisse ein exaktes mathematisches Verfahren gezeigt.

Literatur

1. Prékopa, A.: Valószínűségelmélet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972. 440 S.
2. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. 746 S.
3. Farkas, J.: Einige Probleme der Wahrscheinlichkeitsverteilung von periodisch systematischen Einflüssen in der Fertigungsmeßtechnik. Periodica Polytechnica, 1976. Vol. 20/3. 253—257. M. S.

Dr. János Farkas, H-1521 Budapest